Agrégation externe de mathématiques, session 2026
Épreuve de modélisation, option C : Algèbre et Calcul Formel

(*C01-public*)

Résumé : On présente des méthodes utilisées pour la construction d'images de synthèse. Cela suppose de représenter des surfaces définies par un ensemble de points au moyen de "pièces" paramétrées par des polynômes de petit degré, puis de trouver comment dessiner de telles pièces très rapidement. Nous étudierons également la représentation des contours visibles d'une pièce.

Mots clefs : algèbre linéaire, géométrie, polynômes à plusieurs variables, résultant.

► *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury apprécie qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et mettant en lumière les connaissances, à partir des éléments du texte. Il doit contenir des illustrations informatiques réalisées sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.*

1. Introduction

On assiste depuis une vingtaine d'années au développement à grande échelle des jeux vidéos et des films d'animation ; même plus généralement les images de synthèse sont de plus en plus utilisées dans les films. Tous ces domaines mobilisent une très importante quantité d'images. En parallèle, l'amélioration de la qualité des écrans ainsi que l'exigence de plus en plus grande des utilisateurs (en terme de qualité d'image, mais aussi de fluidité des animations) pose des contraintes très fortes.

La quantité des images à mémoriser interdit de stocker tous les points de l'image, ce qui serait nécessaire pour obtenir un rendu visuel de qualité ; à la place, on va se limiter à stocker un échantillon représentatif – et reconstituer le reste de la surface par interpolation.

Le besoin de fluidité nécessite en outre une représentation de l'image qui soit maniable en terme de calcul, afin de pouvoir la dessiner très efficacement.

Le présent texte va étudier la représentation des courbes (en 2d) et des surfaces (en 3d) dans un contexte de synthèse d'images, puis exposer comment dessiner une telle surface et en calculer les contours. Nous conclurons brièvement en étudiant la qualité de la représentation choisie.

2. Stockage compact et approximation de l'image

On part dans cette partie d'une courbe plane ou une surface de $\mathbb{R}^3$. Nous ne discuterons pas la phase d'échantillonnage, qui permet de choisir un ensemble fini de points à la fois pas trop gros et suffisamment représentatif de la géométrie de la courbe ou de la surface. Dans cette partie, nous étudions comment, à l'inverse, étant donné un tel ensemble fini (échantillon), on peut reconstruire une approximation de la courbe ou de la surface d'origine.

2.1. *Étude des courbes en 2 dimensions*

On suppose notre courbe donnée par une suite de $N+1$ points $(P_j)_{0\leqslant j\leqslant N}$. Une première possibilité de procéder est de relier les points par des segments : on obtient ainsi une ligne brisée approchant la courbe de départ. Cependant, cette solution n'est pas satisfaisante : si on souhaite obtenir une courbe approchante avec un aspect lisse, il serait nécessaire d'avoir un très grand nombre de points.

Pour contourner cette difficulté, on fixe un paramètre de degré d ($d=3$ est typique dans les applications), et on va découper l'échantillon en "pièces". Pour alléger les notations (et quitte à augmenter un peu la taille de l'échantillon) nous allons supposer que N est divisible par d. Notons $\mathscr{F}_j = (P_{jd}, P_{jd+1}, \dots, P_{(j+1)d}) \in (\mathbb{R}^2)^{d+1}$, pour $0 \leqslant j < N/d$.

Lemme 1. *Pour tout indice $0 \leqslant j < N/d$, il existe un unique couple de polynômes (f_j, g_j) de degrés $\leqslant d$ tel que pour tout $i \in [\![0,d]\!]$, le i-ème point de $\mathscr{F}_j$ soit $(f_j(i/d), g_j(i/d))$.*

Démonstration. Notons $P_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant N$. Pour tout $0 \leqslant j < N/d$, on cherche deux polynômes de degrés $\leqslant d$ vérifiant

$$\forall i \in [\![0,d]\!], \quad f_j(i/d) = x_{jd+i}, \quad g_j(i/d) = y_{jd+i}. \tag{1}$$

C'est un problème d'interpolation de Lagrange dont on sait qu'il admet une unique solution. □

Finalement, en notant $E(\cdot)$ la fonction partie entière, on peut définir

$$\varphi : \begin{cases} [0, N/d[& \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & \big(f_{E(t)}(t-E(t)), g_{E(t)}(t-E(t))\big) \end{cases}, \tag{2}$$

l'application qui "recolle" les différents morceaux. Notre courbe originelle, d'où est issu l'échantillon, sera alors reconstruite comme la courbe paramétrée donnée par l'image de l'application φ. Notons que l'application φ est continue par construction.

Remarque 2. *Notons $t_i = i/d$ pour tout $i \in [\![0,d]\!]$. En commençant par calculer $L = \prod_{i=0}^{d} (X - t_i)$, puis en remarquant que les polynômes de Lagrange associés à $(t_0, \dots, t_d)$ sont donnés par*

$$\forall i \in [\![0,d]\!], \quad L_i = \frac{L(X)}{(X-t_i)L'(t_i)}, \tag{3}$$

on en déduit que l'on peut calculer chaque f_j et chaque g_j en $O(d^2)$ opérations dans $\mathbb{R}$.

Il est parfois souhaitable d'obtenir une représentation par une courbe paramétrée de classe C^1 (ou plus) ; cela est possible, mais en contrepartie il faut augmenter le degré des polynômes. Une possibilité est de poser $(\tilde{f}_0, \tilde{g}_0) = (f_0, g_0)$, puis pour $j = 1, \dots, N/d$ de remplacer successivement (f_j, g_j) par $(\tilde{f}_j, \tilde{g}_j)$ où

$$\tilde{f}_j = f_j + \alpha_j \prod_{i=0}^{d} (X - i/d) \quad \text{et} \quad \tilde{g}_j = g_j + \beta_j \prod_{i=0}^{d} (X - i/d) \tag{4}$$

en choisissant les nombres réels α_j et β_j de sorte que la courbe paramétrée obtenue en recollant ces nouveaux morceaux soit de classe C^1.

2.2. *Étude des surfaces en 3 dimensions*

Nous allons utiliser la même approche, mais le problème d'interpolation est un peu plus délicat ; cette fois, notre échantillon est de la forme $(P_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant sd}$, nous conduisant à des portions

$$\mathscr{M}_{k,l} = \left(P_{i,j}\right)_{kd \leqslant i \leqslant (k+1)d, ld \leqslant j \leqslant (l+1)d} \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant k, l \leqslant (s-1). \tag{5}$$

Notons $\mathbb{R}[u,v]_{(d,d)}$ l'ensemble des polynômes en u, v dont le degré en chaque variable est au plus d. Dans le cas de $\mathscr{M}_{0,0}$, l'analogue du lemme précédent est alors :

Lemme 3. *Il existe un unique triplet de polynômes* $(f_0, g_0, h_0) \in \mathbb{R}[u,v]^3_{(d,d)}$ *tel que*

$$\mathscr{M}_{0,0} = \big((f_0(i/d, j/d), g_0(i/d, j/d), h_0(i/d, j/d))\big)_{0 \leqslant i,j \leqslant d}. \tag{6}$$

Démonstration. On traite le cas de f_0, les deux autres étant identiques. Considérons l'application linéaire

$$\mathrm{ev} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[u,v]_{(d,d)} & \to & \mathbb{R}^{(d+1)^2} \\ F & \mapsto & (F(i/d, j/d))_{0 \leqslant i,j \leqslant d}. \end{array} \right. \tag{7}$$

Montrons que ev est injective.

Soit $F(u,v) \in \mathbb{R}[u,v]$ tel que $F(i/d, j/d) = 0$ pour tout $0 \leqslant i, j \leqslant d$. En particulier, pour tout i fixé le polynôme $F(i/d, v)$ est un polynôme de degré $\leqslant d$ ayant $d+1$ racines, c'est donc le polynôme nul.

Ainsi, le polynôme $F(u,v) \in \mathbb{R}[v][u]$ est un polynôme de degré d en u à coefficients dans $\mathbb{R}[v]$, qui est égal au polynôme nul pour $u = 0, 1/d, \dots, 1$; il a donc $(d+1)$ racines et c'est le polynôme nul. L'application ev est donc bien injective, et le résultat annoncé s'ensuit. □

Noter qu'un argument voisin permet de montrer que le recollement de deux pièces voisines se fait automatiquement de manière continue.

La preuve précédente n'est pas effective, mais peut l'être rendue en résolvant un système linéaire de $(d+1)^2$ équations à $(d+1)^2$ inconnues.

3. Lancer de rayons

Nous étudions maintenant le tracé d'une pièce de courbe ou de surface paramétrée. Dans cette partie, nous allons légèrement généraliser la forme de la partie précédente en autorisant $f(t), g(t)$ (resp. $f(u,v)$, $g(u,v)$, $h(u,v)$) à être des fractions rationnelles plutôt que des polynômes.

L'application visée cherche à offrir une vision subjective de l'image en 2D (ou en 3D), restituant la perception qu'aurait un utilisateur placé dans la scène ou en avant de la scène. La technique la plus efficace pour ce faire est de reconstituer le processus physiologique de la vision : on prend un grand nombre de droites du plan (ou de l'espace) passant par l'oeil de l'utilisateur (supposé à l'origine) et chaque droite intersecte la courbe (ou la surface) en un ou plusieurs points (dont, si les objets sont opaques, seul le plus proche de l'origine est visible).

3.1. *Courbes en 2d*

Dans ce cas, une pièce est décrite sous la forme $(f(u), g(u))$, $u \in [0,1]$, et un rayon lumineux sous la forme $y = \alpha x$. Les paramètres des points d'intersection sont donc obtenus en résolvant l'équation polynomiale $g(u) - \alpha f(u) = 0$.

3.2. *Surfaces en 3d*

La situation des surfaces est un peu plus complexe. Dans ce cas, une pièce est décrite sous la forme $(f(u,v), g(u,v), h(u,v))$, et un rayon lumineux sous la forme $y = \alpha x, z = \beta x$.

Pour illustrer le cas des surfaces, nous utiliserons la sphère centrée en $(0,0,2)$ et de rayon 1, d'équation paramétrique

$$\left(\frac{2u(1-v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)}, \frac{(1-u^2)(1-v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)}, 2+\frac{2v}{1+v^2}\right), \tag{8}$$

avec un observateur positionné à l'origine de l'espace (et regardant dans la direction des $Z > 0$), et (u,v) décrivant $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

On trouve alors le système

$$\begin{cases} F_1(u,v) := g(u,v) - \alpha f(u,v) &= 0 \\ F_2(u,v) := h(u,v) - \beta f(u,v) &= 0. \end{cases} \tag{9}$$

Ce système se résout en multipliant par le plus petit multiple commun des dénominateurs, puis en considérant le résultant des deux membres gauches, par exemple par rapport au paramètre u. Notons $H := \mathrm{Res}_u(F_1, F_2)$. On obtient alors une équation $H(v) = 0$, de degré $\leqslant 2d^2$. Cette équation est non triviale (i.e., $H \neq 0$) si la surface ne contient pas le rayon lumineux considéré, et on peut alors la résoudre. Pour chaque valeur de v obtenue, on peut alors déterminer les valeurs de u possibles à l'aide du système.

Exemple 4. *Considérons le rayon lumineux d'équation paramétrique* $(t, t/2, 2t)$ *et notre sphère centrée en* $(0,0,2)$ *(et de rayon 1). On trouve alors*

$$H(v) = 4(v-1)^2(v+1)^2(v^2+3v+1)(v^2+7v+1). \tag{10}$$

Les solutions $v = \pm 1$ *sont parasites, et on trouve donc que* $v \in \{\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}, \frac{-7\pm3\sqrt{5}}{2}\}$. *De proche en proche, après calculs, on trouve finalement les deux points d'intersection* $(2/3, 1/3, 4/3)$ *et* $(6/7, 3/7, 12/7)$, *dont un seul est visible par l'utilisateur.*

3.3. *Calcul rapide du résultant*

Lors du tracé d'une image, le calcul précédent doit être effectué un très grand nombre de fois. Il importe donc que le calcul du résultant soit le plus efficace possible. Dans le cas typique $d = 3$, ce calcul s'effectue, a priori, par un déterminant de taille 6×6, ce qui est assez conséquent. Il est néanmoins possible de le simplifier un peu, en utilisant la proposition suivante :

Proposition 5. *Soit* $A(u) = \sum_{i=0}^{3} a_i u^i$ *et* $B(u) = \sum_{i=0}^{3} b_i u^i$ *deux polynômes de degré exactement* 3 *à coefficients dans un anneau. Introduisons*

$$\Psi(u,v) = \frac{A(u)B(v) - A(v)B(u)}{u-v} = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant 2} \psi_{i,j} u^i v^j. \tag{11}$$

Alors le déterminant de la matrice $(\psi_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant 2}$ *est (au signe près) le résultant de* A *et* B.

Démonstration. Pour $d = 3$, cela suit d'une vérification explicite à l'aide d'un système de calcul formel. La proposition reste vraie dans un cadre plus général, mais est plus délicate à prouver. □

Ce résultat ramène le calcul du résultant à un calcul de déterminant 3×3 (dont les coefficients s'expriment simplement en fonction des coefficients de A et B), a priori plus simple à évaluer.

Suggestions et pistes de réflexion

► *Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives et il n'est pas obligatoire de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier, ou non, certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos illustrations informatiques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en œuvre.*

— Mettre en œuvre en utilisant l'outil informatique les méthodes présentées dans la partie 2.1 avec $N = 7$ et différentes valeurs de d pour construire des approximations de la courbe passant par les points

$$(P_0, \ldots, P_6) = \big((0,0), (4,0), (3,2), (1,2), (0,0), (1,-2), (3,-2)\big).$$

— Expliciter comment, dans la deuxième partie, parvenir à un raccordement de classe C^1 (resp. C^k), dans le cas des courbes (puis, éventuellement, des surfaces).
— Expliciter la question de continuité du recollement des pièces dans le cas des surfaces.
— Quel est le système linéaire de $(d+1)^2$ équations à $(d+1)^2$ inconnues évoqué dans la partie 2.2 du texte ?
— Prouver la proposition 5 dans le cas $d \leqslant 3$ à l'aide d'un système de calcul formel, éventuellement augmenter d.
— Reproduire les exemples esquissés dans le texte, les généraliser à un ellipsoïde centré en un point de votre choix.
— Le texte parle à plusieurs reprises de solutions parasites ; expliquer ce qui se passe sur un exemple.
— En quoi la "méthode rapide" évoquée en 3.3 est-elle plus intéressante qu'un calcul direct de déterminant 6×6, ou qu'une évaluation d'une formule explicite pour le déterminant de Sylvester des deux polynômes concernés ?