(*B01-public*)

Résumé : On étudie des équations différentielles modélisant la ventilation pulmonaire et leur approximation numérique. On s'intéresse en particulier aux solutions périodiques.

Mots clefs : Équations différentielles ordinaires. Propriétés qualitatives. Aspects numériques du problème de Cauchy.

► *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury apprécie qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et mettant en lumière les connaissances, à partir des éléments du texte. Il doit contenir des illustrations informatiques réalisées sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.*

L'appareil respiratoire a pour fonction d'amener l'oxygène de l'air de la bouche jusqu'aux alvéoles pulmonaires où a lieu la diffusion de l'oxygène de l'air vers le sang. Inversement, le dioxyde de carbone sanguin est expiré des alvéoles vers la bouche. La première fonction du poumon est donc de transporter les gaz de l'air, c'est ce que l'on appelle la ventilation. Plus précisément, l'air est transporté à travers l'arbre bronchique et le flux d'air est créé à l'inspiration par la contraction du diaphragme, qui entraîne les tissus pulmonaires et crée une différence de pression entre la bouche et les alvéoles. En respiration au repos, l'expiration est passive et due à l'énergie élastique emmagasinée lors de la phase active d'inspiration. Nous allons chercher à obtenir des modèles simplifiés, linéaire ou non linéaire, permettant de décrire ce phénomène de ventilation. L'arbre bronchique est assimilé à un unique tuyau qui relie l'extérieur à l'ensemble des alvéoles, considéré ici comme un unique ballon élastique, de volume $V(t)$ à l'instant t. On suppose que la pression atmosphérique est nulle, et que le saut de pression entre l'extérieur et les alvéoles est proportionnel au débit d'air avec un coefficient $R > 0$ appelé résistance hydraulique. On obtient donc l'équation :

$$0 - P_{alv}(t) = R\dot{V}(t), \tag{1}$$

où $P_{alv}(t)$ désigne la pression de l'air dans l'alvéole à l'instant t et $\dot{V}$ la dérivée de V par rapport au temps. On note $P(t)$ la pression exercée par le diaphragme sur le ballon. C'est une fonction donnée du temps. Enfin, on note $E > 0$ un coefficient qui quantifie l'élasticité du ballon et V_{repos} son volume au repos.

1. Modèle linéaire

On suppose pour le moment que le comportement élastique du ballon est donné par une relation linéaire entre la variation de volume autour de V_{repos} et le saut de pression à travers la membrane du ballon :

$$P_{alv}(t) - P(t) = E(V(t) - V_{repos}). \tag{2}$$

En combinant (1) et (2), on obtient le problème de Cauchy suivant pour l'inconnue V :

$$\forall t > 0, \quad R\dot{V}(t) + E(V(t) - V_{repos}) = -P(t), \quad V(0) = V_0, \tag{3}$$

où $V_0 > 0$ est le volume donné à l'instant initial.

Proposition 1. *Le problème* (3) *possède une unique solution sur* $\mathbb{R}$*, que l'on peut expliciter.*

La ventilation étant un phénomène périodique, on considère que P est une fonction périodique de période $T > 0$ donnée. On peut alors montrer que V se comporte asymptotiquement de manière périodique.

Proposition 2. *On suppose que* $t \mapsto P(t)$ *est continue et* T*-périodique. Alors la solution* V *de* (3) *est asymptotiquement périodique au sens où la suite de fonctions* $V_k : t \in [0,T] \mapsto V(kT+t)$ *converge uniformément vers*

$$V_\infty(t) = V_{repos} + e^{-Et/R} W - \frac{1}{R}\int_0^t P(s) e^{-E(t-s)/R} ds, \text{ où } W = -\frac{1}{R}\frac{1}{1-e^{-ET/R}}\int_0^T P(s) e^{-E(T-s)/R} ds. \tag{4}$$

Démonstration. En utilisant un changement de variable et la périodicité de P, on montre que V_k converge uniformément vers V_∞ avec $V_\infty(t) = V_{repos} - \frac{1}{R}\int_{-\infty}^t P(s) e^{-E(t-s)/R} ds$, qui peut se réécrire en utilisant que $\int_{-\infty}^0 P(s) e^{-E(t-s)/R} ds = \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{-(j+1)T}^{-jT} P(s) e^{-E(t-s)/R} ds$, et en changeant de variable dans chacune des intégrales pour se ramener à une intégrale sur $[0,T]$. □

Pour la solution périodique V_∞, le volume $V_{repos} + W$ est le volume du poumon au début d'une inspiration et W peut s'interpréter comme le résultat d'une relaxation incomplète du volume du poumon vers le volume à vide V_{repos}.

Remarque 3. *On peut modéliser une crise d'asthme en considérant que la résistance* R *augmente. Quand* R *tend vers* $+\infty$*,* V_∞ *converge uniformément vers la fonction constante égale à* $V_{repos} - \frac{1}{TE}\int_0^T P(s) ds$.

2. Modèle non linéaire

Dans le cas de grands efforts respiratoires ($|P|$ grand), le modèle linéaire (3) n'est plus pertinent ; en particulier il peut aboutir à des volumes négatifs. Afin de tenir compte du fait que le poumon ne peut pas s'écraser et de la présence de la cage thoracique, on peut supposer que la relation entre le saut de pression et le volume n'est plus linéaire, et remplacer (2) par

$$P_{alv}(t) - P(t) = \varphi(V(t)). \tag{5}$$

On suppose la fonction φ définie sur un intervalle $]V_R, V_{CPT}[$, où V_R est le volume résiduel, c'est-à-dire le volume minimal présent à la fin d'une expiration forcée, et V_{CPT} est la capacité pulmonaire totale, c'est-à-dire le volume après une inspiration maximale. On suppose que φ est $\mathscr{C}^1(]V_R, V_{CPT}[)$ et $\varphi' > 0$ sur $]V_R, V_{CPT}[$, et que $\varphi(V) \to -\infty$ quand $V \to V_R$ et $\varphi(V) \to +\infty$ quand $V \to V_{CPT}$. La fonction φ s'annule en un unique point, noté V_{CRF} et appelé capacité résiduelle fonctionnelle, correspondant au volume présent dans les poumons à la fin d'une expiration passive. On définit une énergie potentielle associée à φ

$$\psi(V) = \int_{V_{CRF}}^{V} \varphi(s)\,ds, \tag{6}$$

et on supposera que φ est telle que ψ tend vers $+\infty$ quand V tend vers V_R par valeurs supérieures et quand V tend vers V_{CPT} par valeurs inférieures. On peut par exemple considérer

$$\varphi(V) = \mu\left(\frac{1}{V_{CPT} - V} - \frac{1}{V - V_R} - \left(\frac{1}{V_{CPT} - V_{CRF}} - \frac{1}{V_{CRF} - V_R}\right)\right), \quad \mu > 0. \tag{7}$$

Dans toutes les illustrations numériques qui suivent, on considèrera cette définition de φ. En combinant (1) et (5), on obtient donc finalement le problème de Cauchy suivant :

$$R\dot{V}(t) + \varphi(V(t)) = -P(t), \quad \forall\, t > 0, \quad V(t=0) = V_0. \tag{8}$$

En multipliant (8) par $\dot{V}$, on obtient l'égalité d'énergie suivante :

$$R\int_0^t (\dot{V}(s))^2\,ds + \psi(V(t)) - \psi(V_0) = -\int_0^t P(s)\dot{V}(s)\,ds. \tag{9}$$

Sous certaines hypothèses, le problème de Cauchy (8) admet une unique solution globale, vérifiant de plus un principe du maximum :

Proposition 4. *On suppose que $P \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^+)$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$, et on note $P_{min} = \inf_{t\in\mathbb{R}^+} P(t)$ et $P_{max} = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} P(t)$, et V_{max} et V_{min} les volumes correspondants, définis par : $\varphi(V_{max}) = -P_{min}$ et $\varphi(V_{min}) = -P_{max}$. Alors le problème* (8) *admet une unique solution globale $t \in [0, +\infty[\mapsto V(t) \in]V_R, V_{CPT}[$. Si on suppose de plus que la donnée initiale $V_0 \in [V_{min}, V_{max}]$, la solution $V(t)$ de* (8) *reste dans $[V_{min}, V_{max}]$.*

Démonstration. En appliquant le théorème de Cauchy-Lipschitz, on obtient l'existence d'une unique solution maximale définie sur $]0, t^*[$ pour un certain $t^* \in]0, +\infty]$. Si $t^* < +\infty$ alors $\lim_{t\to t^*} V(t) = V_R$ ou V_{CPT}. On montre que cela ne peut pas se produire, en montrant que $\psi(V(t))$ reste bornée quand $t \to t^*$. La preuve repose sur (9), qui implique, en tenant compte de la positivité de ψ, que

$$R\int_0^t (\dot{V}(s))^2\,ds \le \psi(V_0) + \left(\int_0^t (P(s))^2\,ds\right)^{1/2}\left(\int_0^t (\dot{V}(s))^2\,ds\right)^{1/2}. \tag{10}$$

Ainsi $t \mapsto \int_0^t (\dot{V}(s))^2\,ds$ est uniformément bornée par rapport à t. On en déduit qu'il en est de même pour $t \mapsto \psi(V(t))$.
Pour établir que $V(t) \in [V_{min}, V_{max}]$, il suffit de remarquer que

$$\frac{d}{dt}(V_{min} - V(t)) \le \frac{1}{R}(\varphi(V(t)) - \varphi(V_{min})), \tag{11}$$

ce qui implique grâce à un raisonnement par l'absurde que $V_{min} \leq V(t)$. On raisonne de même pour montrer que $V(t) \leq V_{max}$. □

Comme pour le cas linéaire, il est intéressant de considérer des solutions périodiques.

Proposition 5. *On suppose que φ est $\mathscr{C}^2(]V_R, V_{CPT}[)$. Alors pour tout $T > 0$, pour tout $P \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^+)$, T-périodique, l'équation* (8) *admet une unique solution qui est T-périodique sur $\mathbb{R}^+$.*

Démonstration. On montre que l'application F qui à $V_0 \in]V_R, V_{CPT}[$ associe $V(T)$, où V est la solution du problème de Cauchy (8) admet un unique point fixe. En particulier, en utilisant la dépendance $\mathscr{C}^2$ de la solution V par rapport aux données initiales et au temps (propriété que l'on admettra), en dérivant l'équation (8) par rapport à V_0, on obtient que

$$F'(V_0) = \exp\left(-\int_0^T \frac{\varphi'(V(s))}{R} ds\right). \tag{12}$$

Ainsi F est contractante, ce qui permet de conclure.

□

On pourra remarquer que la Proposition 5 reste vraie quand $P \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^+)$.

3. Simulations numériques

On s'intéresse maintenant à une discrétisation du modèle non linéaire (8). Si dans des conditions de ventilation normales, c'est-à-dire pour des valeurs modérées de P, le schéma d'Euler explicite est satisfaisant, ce n'est plus forcément le cas dans des conditions plus extrêmes. Nous allons donc plutôt considérer un schéma implicite. Soit $\Delta t > 0$ le pas de temps, et $t_n = n\Delta t$ pour $n \geq 0$. Le schéma est le suivant, où $P_n = P(t_n)$:

$$V_{0,\Delta t} = V_0, \quad V_{n+1,\Delta t} + \tfrac{\Delta t}{R}\varphi(V_{n+1,\Delta t}) = V_{n,\Delta t} - \tfrac{\Delta t}{R}P_{n+1}, \quad \forall n \geq 0. \tag{13}$$

On remarque que ce schéma conduit à résoudre une équation non linéaire à chaque itération. En pratique, on pourra pour cela mettre en œuvre une méthode de Newton. On peut montrer que ce schéma admet une unique solution, et que cette solution vérifie un principe du maximum discret :

Proposition 6. *En reprenant les mêmes notations qu'à la proposition 4, si on suppose que la donnée initiale V_0 est dans $[V_{min}, V_{max}]$, alors le schéma* (13) *admet une unique solution dans $]V_R, V_{CPT}[$, qui vérifie de plus*

$$V_{n,\Delta t} \in [V_{min}, V_{max}], \quad \forall n \geq 0. \tag{14}$$

Démonstration. Étant donné $V_{n,\Delta t}$, l'existence de $V_{n+1,\Delta t}$ s'obtient en étudiant la fonction Φ définie pour $V \in]V_R, V_{CPT}[$ par

$$V \mapsto \Phi(V) = V + \tfrac{\Delta t}{R}\varphi(V). \tag{15}$$

De plus, comme $P_{n+1} \in [P_{min}, P_{max}]$, en supposant que $V_{n,\Delta t} \in [V_{min}, V_{max}]$, et en utilisant le schéma (13), on déduit que $V_{n+1,\Delta t} \leq V_{max}$. On montre de même que $V_{min} \leq V_{n+1,\Delta t}$. □

On a de plus le résultat suivant concernant la convergence du schéma (13).

Proposition 7. *Soit $T > 0$. On note V l'unique solution du problème de Cauchy* (8) *et à la condition initiale V_0. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $N\Delta t = T$. On pose $V_{0,\Delta t} = V_0$, $V_{1,\Delta t}$,...,$V_{N,\Delta t}$ les volumes successifs obtenus par le schéma* (13).
Alors en supposant P globalement lipschitzienne, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\sup_{0\le n\le N} |V_{n,\Delta t} - V(t_n)| \le CT\Delta t. \tag{16}$$

Démonstration. En écrivant le problème de Cauchy sous forme intégrale, et en étudiant sa différence avec le schéma, les propriétés de Φ permettent de conclure. □

On s'intéresse maintenant à l'approximation des solutions périodiques quand P est T-périodique. Une première stratégie possible, en supposant que la solution périodique est asymptotiquement stable, consiste à approcher le problème de Cauchy sur un certain nombre de périodes (à l'aide du schéma (13) par exemple), et à considérer le régime périodique atteint quand l'approximation ne varie plus beaucoup entre une période et la suivante. Un des problèmes de cette approche est que la convergence peut être lente.

On propose alors de mettre en place un algorithme dans l'esprit de la Proposition 5. Pour toute condition initiale V_0, on note $F_{\Delta t}(V_0)$ la solution approchée au temps T, *i.e.* $V_{0,\Delta t} = V_0$, $V_{1,\Delta t}$, ..., $V_{N,\Delta t}$ sont construits avec le schéma (13), et on pose $F_{\Delta t}(V_0) = V_{N,\Delta t}$. On veut calculer un point fixe de $F_{\Delta t}$, en utilisant la méthode de Newton. On a besoin pour cela de calculer la dérivée de $F_{\Delta t}$. À partir du schéma (13), si on considère $V_{n+1,\Delta t}$ comme une fonction de $V_{n,\Delta t}$, on a :

$$\frac{dV_{n+1,\Delta t}}{dV_{n,\Delta t}} = \left(1 + \tfrac{\Delta t}{R}\varphi'(V_{n+1,\Delta t})\right)^{-1}. \tag{17}$$

On obtient alors

$$F'_{\Delta t}(V_0) = \prod_{n=0}^{N-1} \left(1 + \tfrac{\Delta t}{R}\varphi'(V_{n+1,\Delta t})\right)^{-1}. \tag{18}$$

Les valeurs numériques qui suivent sont exprimées dans des unités appropriées. Dans les simulations numériques présentées, on considère un pas de temps $\Delta t = 0.05$ et une fonction P de période $T = 5$, définie sur $[0,5[$ par :

$$\begin{aligned} P(t) &= 10P_{min}\, t\, \mathbf{1}_{t\in[0,0.1]} + P_{min}\, \mathbf{1}_{t\in]0.1,1.9]} \\ &\quad + 5\left[(2.1-t)P_{min} + (t-1.9)P_{max}\right]\mathbf{1}_{t\in]1.9,2.1]} + P_{max}\,\mathbf{1}_{t\in]2.1,4.9]} + 10P_{max}\,(5-t)\,\mathbf{1}_{t\in]4.9,5]}. \end{aligned} \tag{19}$$

Pour une respiration normale, on peut considérer que $P_{min} = -20$ et $P_{max} = 0$, et pour une respiration forcée $P_{min} = -100$ et $P_{max} = 120$. Les volumes sont les suivants : $V_R = 1$, $V_{CPT} = 6$, $V_{CRF} = 3$. On prend $\mu = E\left(\frac{1}{(V_{CPT}-V_{CRF})^2} + \frac{1}{(V_{CRF}-V_R)^2}\right)^{-1}$, avec $E = 5$. La résistance est $R = 20$ pour un patient sain et $R = 100$ pour un patient asthmatique. On initialise à $V_0 = V_{CRF}$. On observe sur la figure 1 les solutions obtenues par le schéma (13) avec une respiration normale, pour un patient sain ou asthmatique. La figure 1 montre aussi les solutions approchées construites lors des deux premières itérations de la méthode de Newton mise en œuvre pour calculer le point fixe de $F_{\Delta t}$.

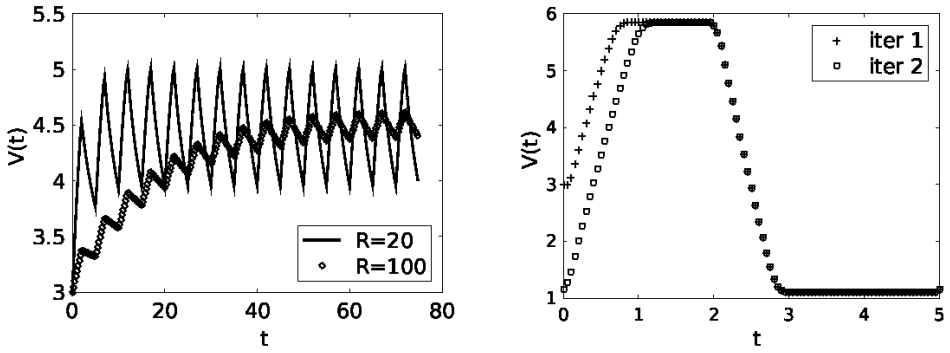


FIGURE 1. Solutions du schéma (13) en respiration normale (gauche), et solutions approchées construites lors des 2 premières itérations de la méthode de Newton pour $F_{\Delta t}$ dans le cas sain en respiration forcée (droite).

Suggestions et pistes de réflexion

► *Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives et il n'est pas obligatoire de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier, ou non, certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos illustrations informatiques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en œuvre.*

- Présenter une simulation numérique du modèle linéaire.
- Commenter et comparer les différents modèles, les hypothèses sur φ, expliquer comment est obtenue l'égalité d'énergie, ...
- Démontrer les Propositions 1 et 2.
- Démontrer la Proposition 4.
- Démontrer la Proposition 7.
- Résoudre numériquement le modèle non linéaire (8) avec une méthode d'Euler explicite et une méthode d'Euler implicite. Comparer les solutions numériques obtenues dans le cas d'un patient sain, d'un patient asthmatique, pour une respiration normale ou pour une respiration forcée.
- Discuter le comportement en temps long des schémas d'Euler explicite ou implicite. Permettent-ils d'obtenir la solution périodique en temps long, en particulier lorsque R croît ? Comparer cette stratégie à celle qui consiste à calculer par la méthode de Newton un point fixe de $F_{\Delta t}$.