Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.

La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. Les candidats sont donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Les candidats peuvent utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant dans ce cas à préciser la référence du résultat utilisé.

Notations et rappels

On note :

- $\delta_{x,y}$ le *symbole de Kronecker* valant 1 si $x = y$ et 0 sinon, pour deux objets x et y ;
- $\mathcal{P}_k(Y)$ l'ensemble des parties à k éléments d'un ensemble Y ;
- $\mathbb{N}^\star = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{N}' = \mathbb{N}^\star \setminus \{1\}$;
- $[\![p, q]\!] = \{n \in \mathbb{Z} \mid p \leqslant n \leqslant q\}$, pour p et q deux entiers relatifs ;
- X l'indéterminée des polynômes ;
- χ_M le polynôme caractéristique (unitaire) d'une matrice M.

Pour $\mathbb{K}$ désignant le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et n et p des éléments de $\mathbb{N}^\star$:

- $\mathrm{U}_{n,p}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1 ;
- I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
- $e = (e_i)_{i=1}^n$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$;
- on identifie $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ en associant le vecteur $x = (x_i)_{i=1}^n$ à la matrice $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

On pourra utiliser sans démonstration l'inégalité de Hoeffding pour une variable aléatoire Y suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathrm{P}\left(\left| \frac{Y}{n} - p \right| \geqslant \varepsilon \right) \leqslant 2\mathrm{e}^{-2n\varepsilon^2}.$$

I. Préliminaire

1. Montrer que la matrice

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
En donner une base explicite de vecteurs propres dans $\mathbb{C}^3$, exprimée en fonction de $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

II. Premiers exemples

Soit n un élément de $\mathbb{N}'$.
Dans cette partie, on travaille sur le corps de base $\mathbb{R}$ et on s'intéresse aux éléments propres des matrices suivantes :

$$K_n = n\,\mathrm{I}_n - \mathrm{U}_{n,n} = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$$

et

$$S_n = \left(\begin{array}{c|c} (n-1) & -\mathrm{U}_{1,n-1} \\ \hline -\mathrm{U}_{n-1,1} & \mathrm{I}_{n-1} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Justifier l'existence d'une matrice D diagonale à coefficients réels et d'une matrice P orthogonale telles que $K_n = PDP^{\mathrm{T}}$.

3. Montrer que $\chi_{K_n} = X(X-n)^{n-1}$.

4. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} K_n$.
En déduire une équation de l'espace propre de K_n associé à la valeur propre n.
Montrer que $b = (b_i)_{i=2}^n = (e_i - e_1)_{i=2}^n$ est une base de cet espace propre.

5. Énoncer le théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour une famille finie.
On donnera les formules explicites utilisées pour construire la famille orthonormée.

6. Donner **sans justification** la forme générale des vecteurs e'_i de la famille $e' = (e'_i)_{i=2}^n$ obtenue par orthonormalisation de b.
(On pourra, au brouillon, calculer quelques vecteurs, conjecturer la formule et la vérifier.)
En déduire des matrices P et D qui vérifient le résultat du point **2**.

7. On définit le déterminant suivant

$$\delta_n = \left|\begin{array}{c|c} (1) & \mathrm{U}_{1,n-1} \\ \hline \mathrm{U}_{n-1,1} & (X-1)\mathrm{I}_n \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & X-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & X-1 \end{vmatrix}.$$

Prouver soigneusement que $\delta_n = (X-n)(X-1)^{n-2}$.

8. En déduire le spectre de S_n.
On précisera les multiplicités de ses valeurs propres dans son polynôme caractéristique, ainsi que les dimensions de ses espaces propres.

III. Graphes

Un *graphe (non orienté)* Γ est un couple d'ensembles $\Gamma = (S, A)$, où $A \subset \mathcal{P}_2(S)$. Les *sommets* de Γ sont les éléments de S. Les *arêtes* de Γ sont les éléments de A : ce sont des paires de sommets.
Pour deux sommets x et y, on dit que x est *voisin* de y et on note $x \sim y$ si, et seulement si, l'arête $\{x, y\}$ appartient à A. Cette relation est symétrique, puisque $\{x, y\} = \{y, x\}$.
Soient deux sommets x et y. On dit que x est *relié* à y et on note $x \leftrightarrow y$ lorsque la condition suivante est réalisée :

$$\exists\, p \in \mathbb{N},\ \exists\, (z_i)_{i=0}^{p} \in S^{p+1},\ \Big(z_0 = x,\ z_p = y \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, p]\!], z_{i-1} \sim z_i\Big).$$

Un tel $(p+1)$-uplet est un *chemin de longueur p reliant x à y*.

9. Montrer que $\leftrightarrow$ est une relation d'équivalence sur S.

Les classes d'équivalence de cette relation sont appelées les *composantes connexes* de Γ.
Le graphe Γ est dit *connexe* si, et seulement si,

$$\forall x, y \in S, \quad x \leftrightarrow y.$$

Cela signifie que Γ a au plus une composante connexe.

On suppose dorénavant que le graphe Γ est connexe.
Pour deux sommets x et y, on note $\mathrm{d}(x, y)$ la plus petite longueur des chemins reliant x à y.

10. Montrer que l'application d est une distance sur l'ensemble S.

11. Quels sont les ouverts de S définis par cette distance ?
Quelles sont les applications de S vers $\mathbb{R}$ qui sont continues pour cette distance ?

IV. Laplacien

Soit $\Gamma = (S, A)$ un graphe connexe ayant au moins deux sommets.
On suppose que Γ est *de degré uniformément borné*, c'est-à-dire qu'il existe un entier K tel que tout sommet admette au plus K voisins.
Le *degré* $\deg(x)$ d'un sommet x est alors son nombre (fini) de voisins.
On note $E = \mathbb{R}^S$ et

$$H = \ell^2_{\mathbb{R}}(S) = \left\{ f \in E \;\middle|\; \sum_{x \in S} f(x)^2 < +\infty \right\},$$

qu'on munit de son produit scalaire canonique défini par

$$\forall (f, g) \in H \times H, \quad \langle f, g \rangle_H = \sum_{x \in S} f(x) g(x).$$

On définit l'application *laplacien combinatoire* de Γ :

$$\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \left(\Delta f : x \longmapsto \deg(x)\, f(x) - \displaystyle\sum_{\substack{y \in S \\ y \sim x}} f(y) \right) \end{array} \right. .$$

Les éléments de $\operatorname{Ker} \Delta$ sont appelés les *fonctions harmoniques* sur Γ.

12. Montrer que Δ est bien définie et que c'est un endomorphisme de E non injectif.

13. On étudie dans cette question deux exemples infinis.

(a) On prend ici $\Gamma = \Gamma_{\mathbb{N}} = \Big(\mathbb{N}, \Big\{\{n, n+1\};\ n \in \mathbb{N}\Big\}\Big)$.
Montrer que $\operatorname{Ker}\Delta$ est une droite et que Δ est surjectif.

(b) On prend ici $\Gamma = \Gamma_{\mathbb{Z}} = \Big(\mathbb{Z}, \Big\{\ \{n, n+1\}\ ;\ n \in \mathbb{Z}\Big\}\Big)$.
Déterminer $\operatorname{Ker}\Delta$.
Est-ce que Δ est surjectif ?

On revient au cas général.

14. Montrer que $H = E$ si, et seulement si, S est fini.

15. Montrer que H est stable par Δ.

On note Δ_H l'endomorphisme induit par Δ sur H.

16. Est-ce que Δ_H est continu pour la norme associée au produit scalaire canonique ?

17. Montrer soigneusement que

$$\forall f, g \in H, \quad \langle f, \Delta_H\, g\rangle_H = \sum_{\{x,y\}\in A} (f(x) - f(y))\,(g(x) - g(y)).$$

On justifiera d'abord la notation du membre de droite, puis son existence.
En déduire que Δ_H est autoadjoint.

V. Cas fini

On suppose dans cette partie que le graphe Γ est *fini*, c'est-à-dire que S est fini.
On peut supposer, sans perte de généralité, que $S = [\![1, n]\!]$, avec n un élément de $\mathbb{N}'$.
On peut alors identifier E à $\mathbb{R}^n$, en assimilant un élément f de E au vecteur

$$\begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix}.$$

Enfin, $\operatorname{Mat}_e(\Delta)$ est appelée la *matrice laplacienne* de Γ.

18. Est-ce que Δ est surjectif ?
Est-ce que Δ est diagonalisable ?

19. Utiliser la partie précédente pour montrer que $\operatorname{Ker}\Delta$ est une droite vectorielle.

20. Montrer que

$$\operatorname{Im}\Delta = \left\{ f \in E \;\middle|\; \sum_{x\in S} f(x) = 0 \right\}.$$

21. Dessiner **sans justification** deux graphes ayant pour matrices laplaciennes K_5 et S_5.
On numérotera leurs sommets et on représentera leurs arêtes par des segments.

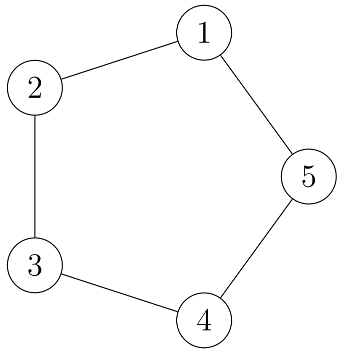

FIGURE 1 – Graphe cyclique à 5 sommets

22. Soit n un entier supérieur ou égal à 3.
On considère le *graphe cyclique à n sommets*, qu'on voit sur la figure 1 pour $n = 5$.
Formellement, ce graphe est le couple $\left([\![1, n]\!], \left\{\ \{i, i+1\}\ ; i \in [\![1, n-1]\!]\right\} \cup \left\{\ \{n, 1\}\ \right\}\right)$.
Donner sans justification sa matrice laplacienne C_n.
Exprimer C_n comme une combinaison linéaire de I_n, J_n et J_n^{-1}, la matrice J_n étant définie, en désignant par $\overline{k}$ la classe d'un entier k modulo n, comme

$$J_n = (\delta_{\overline{i+1}, \overline{j}})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

23. On note $\omega_n = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$.
Montrer que, pour tout élément p de $[\![1, n]\!]$, $\left(\omega_n^{(p-1)(k-1)}\right)_{k=1}^{n}$ est un vecteur propre de J_n.

24. En déduire une base de vecteurs propres de C_n dans $\mathbb{C}^n$, puis son spectre.
Déterminer soigneusement les multiplicités des valeurs propres.

25. Soit n un élément de $\mathbb{N}'$.
On note L_n la matrice laplacienne du graphe $\left([\![1, n]\!], \left\{\ \{i, i+1\}\ ; i \in [\![1, n-1]\!]\right\}\right)$.

(a) Soit $x = (x_i)_{i=1}^{2n}$ un vecteur propre de C_{2n} tel que $x_{n+1} = x_n$ et $x_{2n} = x_1$.
Montrer que $x' = (x_i)_{i=1}^{n}$ est un vecteur propre de L_n.

(b) En déduire, par des combinaisons linéaires judicieuses, les éléments propres de L_n.

VI. Graphe de Cayley et croissance

On considère ici un groupe $(G, \cdot)$ de *type fini*, *i.e.* qui possède une partie génératrice finie Z.
Quitte à l'enlever, on peut supposer que le neutre 1_G de G n'appartient pas à Z.
Quitte à rajouter certains inverses de ses éléments, on peut aussi supposer que la partie Z est *symétrique*, c'est-à-dire que, pour tout élément a de Z, a^{-1} appartient aussi à Z.
Une telle partie génératrice sera appelée ici un *système générateur*.

Le *graphe (non orienté) de Cayley* $\Gamma(G, Z)$ du groupe G muni du système générateur Z est le graphe (S, A), où :

- l'ensemble S des sommets est G lui-même ;
- l'ensemble des arêtes est $A = \Big\{ \{x, xa\} \ ; \ (x, a) \in G \times Z \Big\}$.

(Bien remarquer que $\{x, xa\}$ et $\{xa, (xa)a^{-1}\}$ ne forment qu'une seule et même arête.)

26. Déterminer, parmi les graphes définis dans les questions **13**a, **13**b, **21**, **22** et **25**, lesquels sont des graphes de Cayley, en précisant à chaque fois le groupe et le système générateur choisis et en justifiant les réponses négatives.

On définit la *fonction de croissance* de (G, Z) par

$$\beta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ k & \longmapsto & \mathrm{Card}\Big(B(1_G, k)\Big), \end{array} \right.$$

où $B(1_G, k)$ est la boule fermée de centre 1_G et de rayon k pour la distance de la question **10**.

On dit que la *croissance* de (G, Z) est :

- *polynomiale* lorsqu'il existe un entier naturel n tel que $\beta(k) \underset{k \to +\infty}{=} O(k^n)$;
- *polynomiale de degré n* si, de plus, $k^n \underset{k \to +\infty}{=} O\Big(\beta(k)\Big)$;
- *exponentielle* lorsqu'il existe un réel $c > 1$ tel que $c^k \underset{k \to +\infty}{=} O\Big(\beta(k)\Big)$;
- *intermédiaire* lorsque sa croissance n'est ni polynomiale, ni exponentielle.

27. On note C le cardinal de Z.
Montrer que, pour tout k appartenant à $\mathbb{N}^\star$, $\beta(k) - \beta(k-1) \leqslant C(C-1)^{k-1}$.
Commenter la définition de la croissance exponentielle ainsi que le mot « intermédiaire ».

28. On munit $(\mathbb{Z}^2, +)$ du système générateur $Z_{can} = \Big\{(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)\Big\}$.
Dessiner sans justification la boule $B\Big((0,0), k\Big)$ pour k dans $\mathbb{N}^\star$.
En déduire une formule explicite pour la fonction de croissance de $(\mathbb{Z}^2, Z_{can})$.

29. Soit G un groupe de type fini.

(a) Montrer que le type de croissance de (G, Z), ainsi, le cas échéant, que son degré de croissance polynomiale, ne dépendent pas du système générateur Z choisi.
On peut donc parler du *type de croissance du groupe G*.

(b) Montrer que si G est abélien, alors sa croissance est polynomiale.

VII. Groupe de Heisenberg discret

Soit H_3 le sous-groupe de $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ engendré par les trois matrices suivantes :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $Z = \{S, S^{-1}, T, T^{-1}, U, U^{-1}\}$, d la distance sur $\Gamma(\mathrm{H}_3, Z)$ et, pour tout élément X du groupe H_3, $|X| = \mathrm{d}(\mathrm{I}_3, X)$.

30. (a) Calculer $S^k T^\ell U^m$ pour k, ℓ, m éléments de $\mathbb{Z}$.

En déduire que $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^3 & \longrightarrow & \mathrm{H}_3 \\ (k,\ell,m) & \longmapsto & S^k T^\ell U^m \end{array} \right.$ est bijective.

(b) Pour $k, \ell, m, k', \ell', m'$ appartenant à $\mathbb{Z}$, expliciter k'', ℓ'', m'' dans $\mathbb{Z}$ tels que

$$S^k T^\ell U^m S^{k'} T^{\ell'} U^{m'} = S^{k''} T^{\ell''} U^{m''}.$$

Le groupe H_3 est-il commutatif ?

Quel est le sous-groupe de H_3 engendré par $\{S, T\}$?

31. Montrer que $\quad \forall k, \ell, m \in \mathbb{Z}, \quad \left| S^k T^\ell U^m \right| \leqslant |k| + |\ell| + 6\sqrt{|m|}$.

32. Soient k, ℓ, m des éléments de $\mathbb{Z}$.

Montrer par récurrence que $|k| + |\ell| \leqslant \left| S^k T^\ell U^m \right|$ et $|m| \leqslant \left| S^k T^\ell U^m \right|^2$.

En déduire que $\frac{1}{2}\left(|k| + |\ell| + \sqrt{|m|} \right) \leqslant \left| S^k T^\ell U^m \right|$.

33. Montrer que la croissance de H_3 est polynomiale d'un degré à préciser.

VIII. Groupe libre

Soit $\Gamma = (S, A)$ un graphe.

- On dit que c'est un *arbre* lorsqu'il est connexe et « minimal » pour cette propriété au sens où, pour toute arête $a = \{x, y\}$, x et y ne sont plus reliés dans le graphe $\Gamma' = (S, A \setminus \{a\})$.
- On dit qu'un chemin $(z_0, \ldots, z_i, \ldots, z_p)$ de Γ admet un *aller-retour en i* $\;(i \in [\![1, p-1]\!])$ lorsque $z_{i-1} = z_{i+1}$.
- On appelle *lacet* tout chemin de Γ reliant un point à lui-même.

34. Soit $T = (S, A)$ un arbre.

(a) Soient x et y deux sommets distincts à distance p.

Montrer qu'il existe un unique voisin de y à distance $p-1$ de x et que tous ses autres voisins sont à distance $p+1$ de x.

En déduire que tout lacet de longueur non nulle admet un aller-retour.

(b) Soient x et y deux sommets de T.

Montrer qu'il existe un unique chemin reliant x à y sans aller-retour.

En déduire que c'est aussi l'unique chemin reliant x à y de longueur $\mathrm{d}(x, y)$.

On **admet** l'existence d'un groupe F_2 engendré par deux éléments a et b tels que, d'une part, l'ensemble $Z = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ soit de cardinal 4 et, d'autre part, $\Gamma = \Gamma(\mathrm{F}_2, Z)$ soit un arbre. On note 1 son neutre. Ces notations valent jusqu'à la fin du sujet.

Dans une suite finie ou infinie d'éléments de Z, on appelle *simplification* toute succession d'un élément de Z et de son inverse (aa^{-1}, bb^{-1}, $a^{-1}a$, $b^{-1}b$). Dans le cas d'une suite finie, une simplification peut être retirée sans changer la valeur du produit des éléments de la suite.
Pour un élément x de F_2, on appelle *écriture réduite* de x toute écriture de x comme produit d'une suite finie d'éléments de Z sans simplifications.
On convient que le produit vide d'éléments de Z est une écriture réduite de 1, encore notée 1.

35. Dessiner la boule de Γ de centre 1 et de rayon 3, en nommant les sommets qui sont à distance au plus 2 de l'élément neutre.

36. Montrer que chaque élément de F_2 admet une unique écriture réduite.

37. Calculer la fonction de croissance de (F_2, Z) et déterminer son type.
En quel sens est-elle maximale ?

On note Δ le laplacien de Γ.

38. Est-ce que Δ est surjectif ?

Pour un élément x de F_2 dont l'écriture réduite est $x_1 x_2 \cdots x_k$, on note $x_{\to p} = x_1 \cdots x_p$ pour tout p dans $[\![0, k]\!]$. Par convention, $x_{\to 0} = 1$.
On définit aussi le *bord* $\partial \mathrm{F}_2$ de F_2 comme l'ensemble des suites infinies $\varphi = (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ d'éléments de Z sans simplifications.
Pour un tel φ et un entier naturel p, on définit aussi $\varphi_{\to p} = \varphi_1 \cdots \varphi_p$.

Soit φ un élément de $\partial \mathrm{F}_2$ fixé.
Pour un élément x de F_2 d'écriture réduite $x_1 x_2 \cdots x_k$, on note

$$m = m(x, \varphi) = \max \Big\{ p \in [\![0, k]\!] \mid x_{\to p} = \varphi_{\to p} \Big\}$$

et on pose $b_\varphi(x) = (k - m) - m = k - 2m$.
On définit ainsi la *fonction de Busemann* b_φ du point φ, dont on peut voir les lignes de niveau sur la figure 2.
On pourra utiliser sans démonstration le fait suivant : tout sommet x a un unique voisin dans l'ensemble $b_\varphi^{-1}\Big(\{ b_\varphi(x) - 1 \} \Big)$ et les trois autres dans l'ensemble $b_\varphi^{-1}\Big(\{ b_\varphi(x) + 1 \} \Big)$.

39. Trouver une fonction harmonique f sur Γ telle que

$$f(1) = 1 \quad \text{ et } \quad \forall \psi \in \partial \mathrm{F}_2 \setminus \{\varphi\}, \ \lim_{p \to +\infty} f(\psi_{\to p}) = 0.$$

Vérifier que $\lim\limits_{p \to +\infty} f(\varphi_{\to p}) = +\infty$.

40. Soient q dans $\mathbb{N}$ et h une fonction harmonique tels que $h(\varphi_{\to q}) = 0$ et $\lim\limits_{p \to +\infty} h(\psi_{\to p}) = 0$ pour tout point ψ du bord tel que $\psi_{\to q+1} \neq \varphi_{\to q+1}$.
Montrer que h s'annule en tout x de F_2 tel que $m(x, \varphi) \leqslant q$.
En déduire l'unicité de la fonction f précédente.

On note p_φ cette fonction.

41. Que dire de la dimension de $\operatorname{Ker} \Delta$?

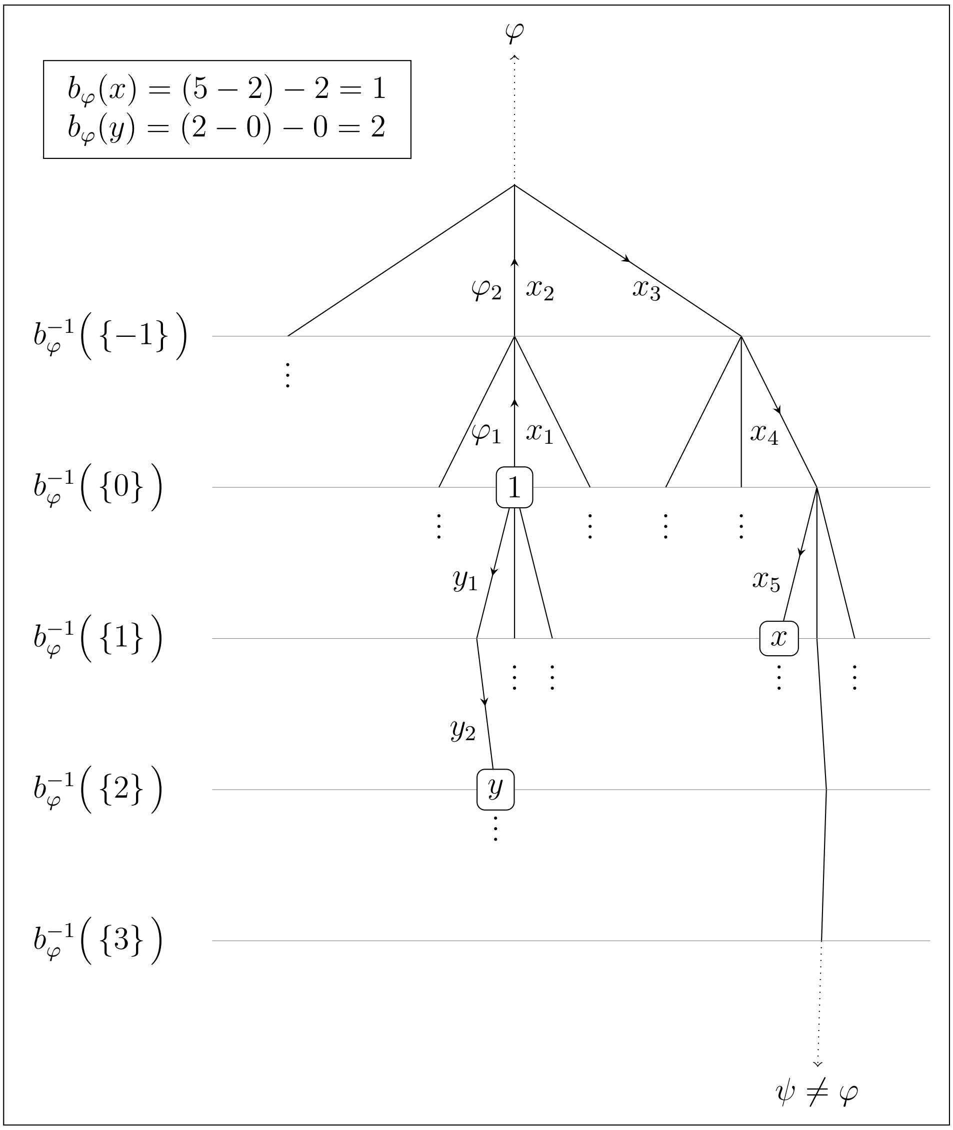

FIGURE 2 – Lignes de niveau de la fonction b_φ

IX. Marche au hasard et vitesse de fuite

Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la même loi uniforme d'image Z.
On définit, pour tout entier naturel n, la variable aléatoire suivante, à valeurs dans F_2 :

$$X_n = Y_1 \cdots Y_n.$$

La variable aléatoire X_0 est ainsi certaine de valeur 1.

42. Soit φ un élément de $\partial\mathrm{F}_2$.
Montrer que $\dfrac{b_\varphi(X_n)+n}{2}$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 3/4)$.
En déduire que, pour tout réel ε strictement positif,

$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{b_\varphi(X_n)}{n} - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\mathrm{e}^{-n\varepsilon^2/2}.$$

43. Montrer que, presque sûrement,

$$\frac{\mathrm{d}(1, X_n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

44. Montrer que, pour toute partie finie E de F_2,

$$\mathrm{P}\Big(\exists\, N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, X_n \notin E\Big) = 1.$$

X. Compactification

On note $\overline{\mathrm{F}_2} = \mathrm{F}_2 \cup \partial\mathrm{F}_2$.

Par unicité de l'écriture réduite des éléments de F_2, on peut identifier un élément x de F_2 et l'unique suite finie d'éléments de Z sans simplifications $(x_1, \ldots, x_k)$ telle que $x = x_1 \cdots x_k$.
Pour unifier l'écriture des éléments de $\overline{\mathrm{F}_2}$, on prolonge ces suites finies par une infinité de 1 en écrivant $x = (x_1, \ldots, x_k, 1, 1, \ldots)$. Ainsi, tout élément y de $\overline{\mathrm{F}_2}$ est uniquement représenté par une suite infinie qu'on note $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.
On étend naturellement la notation $y_{\to p}$ déjà employée précédemment.
On étend aussi l'action de translation à gauche de F_2 sur lui-même en une action de F_2 sur $\overline{\mathrm{F}_2}$: pour $x = x_1 \cdots x_k$ dans F_2 et y dans $\overline{\mathrm{F}_2}$, $x\cdot y$ est l'élément de $\overline{\mathrm{F}_2}$ décrit par la suite infinie obtenue en supprimant successivement toutes les simplifications de la concaténation $x_1 \cdots x_k y_1 y_2 \cdots$.

Pour un élément y de $\overline{\mathrm{F}_2}$ et un entier naturel p, on définit

$$C(y,p) = \Big\{z \in \overline{\mathrm{F}_2} \mid z_{\to p} = y_{\to p}\Big\} \qquad \text{et} \qquad I(y,p) = C(y,p) \cap \partial\mathrm{F}_2.$$

Pour x et y appartenant à $\overline{\mathrm{F}_2}$, on définit

$$\mathrm{d}'(x,y) = \exp\Big(-\max\left\{p \in \mathbb{N} \mid x_{\to p} = y_{\to p}\right\}\Big).$$

45. Montrer que

$$\forall x, y, z \in \overline{\mathrm{F}_2}, \quad \mathrm{d}'(x,z) \leqslant \max\Big(\mathrm{d}'(x,y), \mathrm{d}'(y,z)\Big).$$

En déduire que d' est une distance sur $\overline{\mathrm{F}_2}$.
Montrer que sa restriction à $\mathrm{F}_2 \times \mathrm{F}_2$ est topologiquement équivalente à d.
Décrire les boules ouvertes et les boules fermées, pour la distance d', à l'aide des $C(y,p)$ ci-dessus et en déduire que ces ensembles sont à la fois ouverts et fermés.

46. Montrer que $\overline{\mathrm{F}_2}$ est un compact dont F_2 est une partie dense.

47. Montrer que $\partial\mathrm{F}_2$ est compact.
Montrer qu'il est *sans point isolé* : aucun singleton n'est ouvert.
Montrer qu'il est *totalement discontinu* : ses composantes connexes sont les singletons.

XI. Sortie de la marche au hasard

48. Démontrer que, presque sûrement, il existe un élément du bord X_∞ tel que

$$X_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} X_\infty.$$

On **admet** les faits intuitifs suivants :

- l'application X_∞ est une variable aléatoire (lorsqu'on munit $\partial \mathrm{F}_2$ de la tribu borélienne). On appelle *mesure harmonique basée en* 1 sa loi $\mu_1 = \mathrm{P}_{X_\infty}$, qui est donc une probabilité sur $\partial \mathrm{F}_2$: c'est la *loi de sortie* de la marche au hasard ;
- en lançant la marche au hasard à partir d'un point x de F_2 autre que 1, autrement dit en considérant les variables aléatoires $xY_1 \cdots Y_n$, on obtient des résultats analogues : presque sûrement, la marche tend vers un point du bord et sa loi de sortie est μ_x, *mesure harmonique basée en* x ;
- pour des raisons de symétrie, si l'on fixe un élément x de F_2 et un entier naturel p, la probabilité $\mu_x\big(x \cdot I(\varphi, p)\big)$ ne dépend pas de l'élément φ de $\partial \mathrm{F}_2$.

49. Soit (x, φ, p) un élément de $\mathrm{F}_2 \times \partial \mathrm{F}_2 \times \mathbb{N}$.
Calculer $\mu_x\big(x \cdot I(\varphi, p)\big)$ et vérifier que ce nombre ne dépend pas de x.
Montrer que, pour tout élément x de F_2 et tout borélien B de $\partial \mathrm{F}_2$,

$$\mu_x(B) = \int_B p_\varphi(x)\,\mathrm{d}\mu_1(\varphi).$$

(On rappelle que les fonctions p_φ ont été définies à la question **40**.)

XII. Problème de Dirichlet

Soit g une fonction continue sur $\partial \mathrm{F}_2$.

50. Montrer qu'il existe une unique fonction f définie sur $\overline{\mathrm{F}_2}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- la fonction f est continue ;
- la restriction de f à F_2 est harmonique ;
- la restriction de f à $\partial \mathrm{F}_2$ égale g.

On pourra commencer par montrer que la fonction

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{F}_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{\partial \mathrm{F}_2} g(\varphi)\,\mathrm{d}\mu_x(\varphi) \end{array} \right.$$

est harmonique.