Exercices

I. Analyse réelle

1. Soit $T > 0$ une période de f. On a $f(\mathbb{R}) = f([0,T])$ et $[0,T]$ est compact, donc f est bornée sur $\mathbb{R}$ et atteint ses bornes. Soient M et m respectivement le maximum et le minimum de f, u et v dans $\mathbb{R}$ tels que $f(u) = m, f(v) = M$. La fonction :

$$g : x \longmapsto f(x+t) - f(x)$$

est continue sur $\mathbb{R}$, prend une valeur positive ou nulle en u, négative ou nulle en v. Le théorème des valeurs intermédiaires garantit que g s'annule, ce qui donne le résultat désiré.

2. En utilisant le théorème de Rolle, on montre par récurrence finie que, pour k dans $\{0,\dots,n\}$, $f^{(k)}$ s'annule en au moins $(n+1-k)$ points de $\mathbb{R}$. Pour $k = n$, on obtient le résultat demandé.

II. Suites et séries de fonctions

3. Posons, pour n dans $\mathbb{N}$ et x dans $\mathbb{R}$:

$$u_n(x) = \frac{e^{i2^n x}}{n!}.$$

a) Il suffit de noter que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n(x)| \leq \frac{1}{n!}.$$

La série majorante converge, d'où la convergence absolue de la série de fonctions.

b) La fonction u_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour k dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad u_n^{(k)}(x) = \frac{(i2^n)^k}{n!} e^{2^n ix}.$$

Il s'ensuit que, pour k dans $\mathbb{N}$:

$$\|u_n^{(k)}\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{2^{nk}}{n!}.$$

La série majorante converge (sa somme est $\exp(2^k)$). Il s'ensuit que, pour tout k, la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$. Sa somme est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme. Ainsi, pour k dans $\mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^n i)^k}{n!} e^{2^n ix}.$$

En particulier

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad f^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^n i)^k}{n!} = i^k \exp(2^k).$$

c) Soit r dans $\mathbb{R}^{+*}$. Posons, pour k dans $\mathbb{N}$:

$$v_k = \frac{[f^{(k)}(0)|\, r^k}{k!} = \exp\left(2^k + k\ln(r) - \ln(k!)\right).$$

Compte-tenu de l'équivalent

$$\ln(k!) \sim k\ln(k),$$

ou même simplement de l'estimation élémentaire

$$\ln(k!) \leq k\ln(k),$$

l'expression de droite montre que

$$v_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

On en déduit le résultat.

4. La fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f_n(t) = \frac{1+t^n}{\sqrt{t}+t^{2n}}$$

est continue. On a :

$$f_n(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad f_n(t) = \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^n}.$$

On en déduit la convergence de I_n puisque $n \geq 2$.

La suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers la fonction f définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad f(t) = \frac{1_{]0,1]}(t)}{\sqrt{t}}.$$

Soit d'autre part g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$\forall t \in]0,1], \quad g(t) = \frac{2}{\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad \forall t \in [1,+\infty[, \quad g(t) = \frac{2}{t^2}.$$

La fonction g est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$. On vérifie immédiatement que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad |f_n(t)| \leq g(t).$$

Le théorème de convergence dominée montre que :

$$\int_0^{+\infty} f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f \quad \text{i.e.} \quad \int_0^{+\infty} f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2.$$

III. Topologie et analyse fonctionnelle

5. a) Dire que E est connexe, c'est dire que les seules parties ouvertes et fermées de E sont E et $\emptyset$.

b) Soit X' une partie ouverte et fermée de E'. Par continuité de f,

$$X = f^{(-1)}(X')$$

est une partie ouverte et fermée de E. Par suite, X est soit vide, soit égale à E. Puisque f est surjective, $X' = f(X)$. Il s'ensuit que X' est soit vide, soit égale à E'.

6. On suppose par l'absurde que le résultat est faux. On dispose d'une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $E \setminus \Omega$ et d'une suite $(y_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de K vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}.$$
Par compacité de K, on a une extraction φ et y dans K tels que
$$y_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y.$$
On a également
$$x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} y.$$
Puisque $E \setminus \Omega$ est fermé dans E, on aboutit à la contradiction
$$y \in K \cap (E \setminus \Omega).$$

7. Le théorème d'Ascoli assure qu'une partie $\mathcal{F}$ de C est relativement compacte pour la norme uniforme si et seulement si elle est uniformément bornée et équicontinue, ce qui signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que
$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad \forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |x-y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$
Soit maintenant f dans K. Si x et y sont dans $[0,1]$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit :
$$|f(x) - f(y)| = \left|\int_x^y f'\right| \leq \sqrt{\left|\int_x^y f'^2\right|} \times \sqrt{|y-x|} \leq \sqrt{\left|\int_0^1 f'^2\right|} \times \sqrt{|y-x|} \leq \sqrt{|y-x|}.$$
Cette inégalité $\frac{1}{2}$-hölderienne établit l'équicontinuité de K.
D'autre part, puisque $\int_0^1 f^2 \leq 1$, il existe x_0 dans $[0,1]$ tel que
$$|f(x_0)| \leq 1.$$
Par conséquent, pour x dans $[0,1]$:
$$|f(x)| \leq |f(x_0)| + |f(x) - f(x_0)| \leq 1 + \sqrt{|x - x_0|} \leq 2,$$
d'où le caractère uniformément borné de K et la conclusion.

IV. Calcul différentiel et équations différentielles

8. Posons :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$
La fonction g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et on a, pour x dans $\mathbb{R}$:
$$g''(x) = (x^2 - 1)g(x).$$
On a également
$$(g(0),\ g'(0)) = (1, 0).$$
La partie unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz (appliqué ici à une équation linéaire) dit que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = g(x).$$

9. On a, pour j dans $\{1, \ldots, n\}$ et x dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = 2x_j g'(x_1^2 + \cdots + x_n^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {x_j}^2}(x) = 4{x_j}^2 g''(x_1^2 + \cdots + x_n^2) + 2g'(x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$

Par suite

$$\Delta f(x) = 2ng'(x_1^2 + \cdots + x_n^2) + 4\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right) g''(x_1^2 + \cdots + x_n^2).$$

Il s'ensuit que f est harmonique si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \qquad ng'(t) + 2tg''(t) = 0.$$

Les solutions de

$$y' + \frac{n}{2t} y = 0$$

sur $\mathbb{R}^{+*}$ sont les

$$t \longmapsto \frac{A}{t^{n/2}}, \qquad A \in \mathbb{R}.$$

Il s'ensuit que f est harmonique si et seulement si g est de la forme

$$t \longmapsto A\ln(t) + B, \qquad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

si $n = 2$, de la forme

$$t \longmapsto \frac{A}{t^{-1+n/2}} + B, \qquad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

si $n \geq 3$.

10. a) On peut utiliser le critère de submersion. L'application

$$g \ : x \longmapsto \|x\|^2$$

de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ a pour gradient au point x le vecteur $2x$. C'est donc une submersion en tout x de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, en particulier en tout x de S^{n-1}. La sphère S^{n-1} est donc une sous-variété comme image réciproque d'un point par une submersion. L'espace tangent à S^{n-1} est alors le noyau de la différentielle de f en x_0, c'est-à-dire $\nabla f(x_0)^\perp$. Autrement dit :

$$T_{x_0} S^{n-1} = x_0^\perp.$$

Si v est un vecteur unitaire orthogonal à x_0, l'application

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \cos(t)x_0 + \sin(t)v$$

est un chemin tracé sur S^{n-1} tel que $\gamma(0) = x_0$ et $\gamma'(0) = v$.

b) On sait, par le théorème des extrema liés, que $\nabla f(x_0)$ est orthogonal à $\nabla g(x_0) = x_0^\perp$, donc colinéaire à x_0.

11. a) L'existence et l'unicité de x proviennent du théorème de Cauchy-Lipschitz, qui s'applique parce que ∇f est de classe C^1, en particulier localement lipschitzien.

b) On a, pour t dans I :

$$g'(t) = \langle \nabla f(x(t)), x'(t) \rangle = -\|\nabla f(x(t))\|^2 \leq 0.$$

b) On a donc, pour t dans $I \cap \mathbb{R}^+$,

$$x(t) \in K.$$

Il est alors classique que I contient $\mathbb{R}^+$, justifions cette assertion. Supposons par l'absurde I majoré, soit s sa borne supérieure. Puisque I est ouvert dans $\mathbb{R}$, s n'est pas dans I. On a :

$$\forall t \in [0, s[, \qquad x(t) = x(0) + \int_0^t \nabla f(x(u))\, du.$$

Puisque la restriction de x à $[0, s[$ est à valeurs dans le compact K, la restriction à $[0, s]$ de

$$u \longmapsto \nabla f(x(u))$$

est bornée et l'intégrale

$$\int_0^s \nabla f(x(u))\, du$$

converge, c'est-à-dire que $x(t)$ a une limite ℓ dans $\mathbb{R}^n$ lorsque t tend vers s. En prolongeant x en lui attribuant la valeur ℓ en s, on obtient une fonction $\tilde{x}$ de classe C^1 sur $I \cap \{s\}$ solution du même problème de Cauchy que x, ce qui contredit la maximalité.

V. Algèbre générale

12. Soient I un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$, P dans $I \setminus \{0\}$ de degré d minimal. Montrons

$$I = P\,\mathbb{K}[X].$$

Puisque P est dans I, l'inclusion

$$P\,\mathbb{K}[X] \subset I$$

est immédiate. Soit réciproquement A dans I. On effectue la division euclidienne de A par P :

$$A = PQ + R, \qquad Q \in \mathbb{K}[X], \quad R \in \mathbb{K}[X],$$

avec R de degré strictement inférieur à d. On a

$$R = A - PQ \in I,$$

d'où, par choix de d, $R = 0$, i.e. A multiple de P dans $\mathbb{K}[X]$.

13. a) L'application qui à un sous-groupe K de G/N associe son image réciproque par la surjection canonique de G sur G/N est une bijection de l'ensemble des sous-groupes de G/N sur l'ensemble des sous-groupes de G contenant N.

b) Il suit de a) que l'ensemble des sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est en bijection avec l'ensemble des sous-groupes de $\mathbb{Z}$ contenant $n\mathbb{Z}$. Tout sous-groupe de $\mathbb{Z}$ est de la forme $a\mathbb{Z}$ pour un unique $a \in \mathbb{N}$. On a, pour a dans $\mathbb{N}$:

$$n\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z} \Longleftrightarrow a|n.$$

Le nombre de sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est donc le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$.

14. Soit $\sigma = \gamma_1 \circ \cdots \circ \gamma_r$ la décomposition de σ en cycle à supports disjoints. Pour i dans $\{1, \ldots, r\}$, soit n_i la longueur de γ_i. Pour k dans $\mathbb{Z}$, on a, puisque les γ_i sont à supports disjoints
$$\sigma^k = \mathrm{id} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall i \in \{1, \ldots, r\},\ \gamma_i^k = \mathrm{id}.$$
Cette condition équivaut à
$$\forall i \in \{1, \ldots, r\}, \quad n_i \,|\, k.$$
L'ordre de σ est donc le p.p.c.m. des longueurs des cycles de sa décomposition canonique.

VI. Algèbre linéaire et réduction

15. Il suffit d'appliquer le théorème du rang à l'endomorphisme $\tilde{v}$, restriction de v à $\mathrm{Im}(u)$, dont l'image est $\mathrm{Im}(v \circ u)$ et le noyau $\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$.

16. La trace est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Son noyau H est donc un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de dimension $n^2 - 1$.

Une application f de V est déterminée par sa valeur à l'origine $f(0)$ et par les pentes successives
$$\frac{f(a_{k+1}) - f(a_k)}{a_{k+1} - a_k}, \quad 0 \leq k \leq n-1,$$
qui peuvent être arbitrairement prescrites. En d'autres termes, l'application
$$f \in V \longmapsto \left(f(a_0), \frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0}, \ldots, \frac{f(a_n) - f(a_{n-1})}{a_n - a_{n-1}} \right)$$
est un isomorphisme de V sur $\mathbb{R}^{n+1}$. L'espace V est de dimension $n+1$.

17. La matrice J est de rang 1. Son noyau est donc de dimension $n-1$. C'est l'hyperplan H d'équation
$$x_1 + \cdots + x_n = 0.$$
D'autre part, le vecteur $v = {}^t(1, \ldots, 1)$ vérifie $Jv = nv$. Il s'ensuit que J a deux valeurs propres, 0 et 1, dont les espaces propres associés sont respectivement H et $\mathbb{C}v$.

18. a) Le lemme de décomposition des noyaux dit que, si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $P_1, \ldots, P_r$ des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux, alors
$$\mathrm{Ker}(P_1 \ldots P_r)(u) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_i(u)).$$
Le théorème de Cayley-Hamilton assure que, si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, alors $\chi_u(u)$ est l'endomorphisme nul de E.

b) Il suit du théorème de Cayley-Hamilton que
$$E = \mathrm{Ker}(\chi_u(u)).$$
Mais, puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, on a, si $\sigma(u)$ est le spectre de u et si, pour λ dans $\sigma(u)$, on note m_λ la multiplicité de λ comme racine de χ_u :
$$\chi_u = \prod_{\lambda \in \sigma(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}.$$

Les polynômes $(X-\lambda)^{m_\lambda}$ pour λ dans $\sigma(u)$ sont deux à deux premiers entre eux, d'où, par le lemme de décomposition des noyaux :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(u)} \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}.$$

c) Supposons $\sigma(u)$ de cardinal n :

$$\sigma(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}.$$

Soit v un endomorphisme de E commutant à u. Les sous-espaces propres $\mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$ sont alors stables par v. Ces espaces sont des droites, donc v est diagonalisable. Un endomorphisme diagonalisable et nilpotent est nul, ce qui prouve la première implication.

Supposons que $\sigma(u)$ n'est pas de cardinal n et montrons qu'il existe un endomorphisme de E nilpotent et non nul commutant à u. On distingue deux cas.

- L'endomorphisme u est diagonalisable. Dans ce cas, un des sous-espaces propres de u est de dimension au moins 2. Soient W ce sous-espace, w un endomorphisme nilpotent non nul de W, v l'unique endomorphisme de E coïncidant avec w sur W, avec l'endomorphisme nul sur chacun des autres sous-espaces propres de u. Alors v est nilpotent, non nul et commute à u.

- L'endomorphisme u n'est pas diagonalisable. Il existe alors λ dans $\sigma(u)$ tel que la restriction de u à $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)^{m_\lambda}$ ne soit pas diagonalisable. Comme la seule valeur propre de cette restriction est λ, cette restriction est de la forme $\lambda \mathrm{Id}_{E_\lambda} + \nu$ où ν est un endomorphisme nilpotent et non nul de E_λ. Soit maintenant v l'unique endomorphisme de E coïncidant avec ν sur E_λ, avec l'application linéaire nulle sur chacun des autres espaces caractéristiques de u. L'endomorphisme v est nilpotent, non nul et commute à u.

VII. Probabilités

19. Toutes les X_n sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour k dans $\mathbb{N}$:

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k \, (1-p_n)^{n-k}.$$

Pour k fixé,

$$\binom{n}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}.$$

On a

$$n^k p_n^k = (np_n)^k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Par ailleurs

$$(n-k)\ln(1-p_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} -np_n,$$

d'où

$$(n-k)\ln(1-p_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\lambda.$$

Il s'ensuit que

$$P(X_n = k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Ainsi, $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable de Poisson de paramètre λ.

20. a) On a

$$(S_{n+1} \notin \{S_0, \dots, S_n\}) = \bigcap_{k=0}^{n} (X_{k+1} + \cdots + X_{n+1} \neq 0)\,.$$

Mais, puisque les X_i sont i.i.d., on a l'égalité en loi :

$$(X_1, \dots, X_{n+1}) \sim (X_{n+1}, \dots, X_1).$$

Il s'ensuit que

$$P\left(\bigcap_{k=0}^{n} (X_{k+1} + \cdots + X_{n+1} \neq 0)\right) = P\left(\bigcap_{k=0}^{n} (X_1 + \cdots + X_{n-k+1} \neq 0)\right).$$

C'est l'égalité désirée.

b) Pour i dans $\mathbb{N}$, soit U_i la variable de Bernoulli :

$$U_i = 1_{\{S_i \notin \{S_0, \dots, S_{i-1}\}\}}.$$

On a

$$N_n = 1 + \sum_{i=1}^{n} U_i,$$

Par linéarité de l'espérance

$$E(N_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} E(U_i).$$

Mais, grâce à la question a) :

$$(1) \quad E(U_i) = P\left(\bigcap_{j=1}^{i+1} (S_j \neq 0)\right).$$

D'autre part, par continuité décroissante de P :

$$(2) \quad P\left(\bigcap_{j=1}^{i+1} (S_j \neq 0)\right) \underset{i \to +\infty}{\longrightarrow} P(A).$$

En combinant (1), (2) et le théorème de Cesàro :

$$\frac{E(N_n)}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} P(A).$$

Problème 1

I. De grandes parties absolument instables

1. Pour k, ℓ dans $\{m, \ldots, 2m-1\}$:

$$2m \leq k + \ell \leq 4m - 2.$$

On a d'autre part :

$$3m - 1 \leq n < 3m + 2, \quad \text{donc} \quad 4m - 2 - n \leq m - 1,$$

ce qui montre que

$$\overline{k+\ell} \in \{\bar{i}\ ;\ 0 \leq i \leq m-1\} \cup \{\bar{i}\ ;\ 2m \leq i \leq n\}.$$

C'est dire que X est absolument instable. On a donc, puisque $|X| = m$ et $m \geq 2$:

$$\alpha(G) \geq m \geq \frac{2}{7}\,(3m+1) \geq \frac{2}{7}\,n.$$

2. Soient h et h' dans H. Alors

$$g^{-1}(ghgh') = hgh'.$$

Si cet élément était dans H, il en serait de même de

$$h^{-1}(hgh')h'^{-1} = g,$$

contradiction. Ainsi, gH est absolument instable. Comme

$$x \longmapsto gx$$

est une bijection de G sur G, $|gH| = |H|$ et donc

$$\alpha(G) \geq |H|.$$

Ceci étant vrai pour tout H, il vient

$$\alpha(G) \geq \kappa(G).$$

3. a) Si X n'est pas absolument instable, on dispose de a et b dans X tels que $ab \in X$. Comme π est un morphisme, $\pi(a)\pi(b) = \pi(ab)$ est dans $\pi(X)$. On en déduit par contraposition le résultat demandé.

Soit Y une partie absolument instable de G/N de cardinal $\alpha(G/N)$. Posons $X = \pi^{-1}(Y)$. Alors X est une partie absolument instable de G grâce à ce qui précède, de cardinal $|Y|\,|N|$. Il s'ensuit que

$$\alpha(G) \geq |Y|\,|N|, \quad \text{i.e.} \quad \alpha(G) \geq \alpha(G/N)|N|.$$

b) Soit K un sous-groupe de G/N autre que G/N. Il existe un sous-groupe H de G contenant N tel que $K = H/N$; bien évidemment $H \neq G$. On a alors $|H| = |K|\,|N|$ donc

$$\kappa(G) \geq |K|\,|N|.$$

Ceci est vrai pour tout K donc

$$\kappa(G) \geq \kappa(G/N)|N|.$$

4. a) La surjection canonique de G sur G/N induit une bijection de l'ensemble des sous-groupes de G contenant N sur l'ensemble des sous-groupes de G/N. D'autre part, si K est un sous-groupe de G contenant N, K/N est distingué dans G/N si et seulement si K est distingué dans G. Par conséquent, si N est maximal dans l'ensemble des sous-groupes distingués de G contenant N et autres que G, alors G/N est simple.

   Considérons l'ensemble $\mathcal{G}$ des sous-groupes de G distingués dans G et distincts de G. Cet ensemble contient $\{e\}$ et n'est donc pas vide. Si N est un élément de $\mathcal{G}$ de cardinal maximal, N est un élément de $\mathcal{G}$ maximal pour l'inclusion, donc G/N est simple.

   b) Si G est de cardinal premier, le théorème de Lagrange montre que les seuls sous-groupes de G sont $\{e\}$ et G. En particulier, G est simple. Le théorème de Lagrange entraîne aussi que, si x est un élément de $G \setminus \{e\}$, le sous-groupe engendré par x est égal à G : G est cyclique, donc abélien.

   Supposons G abélien. Tous les sous-groupes de G sont distingués. Il s'ensuit que G est simple si et seulement si les seuls sous-groupes de G sont G et $\{e\}$. Ainsi, G est cyclique et engendré par n'importe lequel de ses éléments autres que e. On en déduit que $|G|$ est premier. Soit en effet x un élément de $G \setminus \{e\}$. Si l'ordre m de x n'est pas premier, on considère un diviseur premier p de m et on note que x^p est d'ordre m/p, donc non nul et non générateur de G, contradiction.

5. a) Il suffit d'appliquer les questions 1 et 3.a) :

$$\alpha(G) \geq \alpha(G/N)\,|N| \geq \frac{2}{7}\frac{n}{|N|}\,|N|, \quad \text{i.e.} \quad \alpha(G) \geq \frac{2}{7}n.$$

   Si G est abélien, il en est de même de G/N. On en déduit le résultat via les questions 4.A) et 4.b).

   b) Si G est simple, on utilise le résultat admis par l'énoncé et l'inégalité $\alpha(G) \geq \kappa(G)$. Sinon, on considère, grâce à la question 4.a), un sous-groupe distingué N autre que G de G tel que G/N soit simple. On applique les questions 2 et 3.b), ainsi que le résultat admis par l'énoncé :

$$\alpha(G) \geq \kappa(G) \geq \kappa(G/N)|N| \geq C\left|\frac{n}{|N|}\right|^{4/7}|N|, \quad \text{d'où :} \quad \alpha(G) \geq C\,n^{4/7}.$$

II. Groupes d-quasi aléatoires

II.A Généralités

6. Si G est d-quasi aléatoire, toute représentation non triviale de G est de degré au moins d. Tel est en particulier le cas de toute représentation irréductible non triviale. Supposons, réciproquement, que toute représentation irréductible non triviale de G est de degré supérieur ou égal à d et considérons une représentation non triviale ρ de G. Par le théorème de Maschke, ρ est somme de sous-représentations irréductibles. L'une au moins de ces représentations irréductibles est non triviale, donc de degré au moins d, ce qui implique que le degré de ρ est au moins d.

7. La signature est un morphisme non trivial de $\mathcal{S}_m$ dans $\{-1, 1\}$, donc une représentation non triviale de degré 1 de $\mathcal{S}_m$. Par suite, $\mathcal{S}_m$ n'est pas 2-quasi aléatoire.

8. Par hypothèse $g^k = e$. Comme ρ est un morphisme, $\rho(g)^k$ est l'identité de l'espace de la représentation ρ. Le polynôme

$$P = X^k - 1 = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_k} (X - \omega)$$

annule donc $\rho(g)$. Comme P est simplement scindé sur $\mathbb{C}$, $\rho(g)$ est diagonalisable. Les valeurs propres de $\rho(g)$ sont racines de P, i.e. racines k-ièmes de 1.

9. Soit ρ une représentation de G dans E. On a vu dans la question précédente que les éléments de $\rho(G)$ sont diagonalisables. D'autre part, $\rho(G)$ est commutatif. Il existe une base de E qui diagonalise tous les $\rho(g), g \in G$. Il s'ensuit que E est somme de droites stables par tous les $\rho(g)$. Ainsi, si E est de dimension supérieure ou égale à 2, ρ n'est pas irréductible. Il s'ensuit que G n'est pas 2-quasi aléatoire.

II.B. Exemples : groupes alternés et groupes $\mathbf{SL}_2(\mathbb{F}_p)$

10. Comme $\rho(g)$ est diagonalisable et différent de l'identité, il admet une valeur propre λ autre que 1. Cette valeur propre est un élément de $\mathbb{U}_p \setminus \{1\}$.

    Si x est un vecteur propre de $\rho(g)$ associé à λ, alors, pour tout j de $\mathbb{N}$, x est vecteur propre de l'endomorphisme $\rho(g)^j = \rho(g^j)$ associé à λ^j. Maintenant, si g et g^j sont conjugués dans G, les endomorphismes $\rho(g)$ et $\rho(g^j)$ sont semblables, donc ont même spectre. Il s'ensuit que λ^j est valeur propre de $\rho(g)$.

    Comme p est premier, λ est d'ordre p et les λ^j pour $1 \leq j \leq p-1$ sont deux à deux distincts. On en déduit le résultat.

11. a) Soient $\gamma = (a_1 \ldots a_\ell)$ et $\gamma' = (a'_1 \ldots a'_\ell)$ les deux ℓ-cycles considérés. Soit σ la bijection de $\{a_1, \ldots, a_\ell\}$ sur $\{a'_1, \ldots, a'_\ell\}$ envoyant, pour tout i de $\{1, \ldots, \ell\}$, a_i sur a'_i. Les complémentaires de $\{a_1, \ldots, a_\ell\}$ et $\{a'_1, \ldots, a'_\ell\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ ont tous deux pour cardinal $n - \ell$. Il existe donc une bijection σ' du premier de ces ensembles sur le second. Concaténant σ et σ', on obtient g dans $\mathcal{S}_n$ tel que

$$\forall i \in \{1, \ldots, \ell\}, \qquad g(a_i) = a'_i.$$

On vérifie alors aussitôt :
$$g \circ \gamma \circ g^{-1} = \gamma'.$$

b) La signature d'un ℓ-cycle est $(-1)^{\ell-1}$, comme on le voit soit en notant qu'un ℓ-cycle admet $n-\ell+1$ orbites, soit en écrivant un ℓ-cycle comme produit de $\ell-1$ transpositions. Ceci établit le premier point. Pour le second, on note que, si $\ell \leq n-2$, alors $n-\ell \geq 2$. Reprenant la question a), ceci permet, de choisir σ' de manière à ce que g soit paire : il suffit, au besoin, de composer σ' à gauche par une transposition de support contenu dans $\{1, \dots, n\} \setminus \{a'_1, \dots, a'_\ell\}$.

12. a) Le noyau de ρ est un sous-groupe normal de $\mathcal{A}_m$, différent de $\mathcal{A}_m$ car ρ n'est pas trivial. Il est donc réduit à $\{e\}$ et ρ est fidèle.

    b) La question 11 montre que γ est dans $\mathcal{A}_m$. Les γ^j pour $1 \leq j \leq p-1$ sont des p-cycles, donc sont conjugués à γ dans $\mathcal{A}_m$, toujours grâce à la question 11. Comme ρ est fidèle, la question 10 entraîne que $\rho(\gamma)$ admet au moins $p-1$ valeurs propres distinctes, donc que le degré de ρ est supérieur ou égal à $p-1$.

13. a) Soit
$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
La matrice M appartient à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$ et $M^{-1} = -M$. Pour t dans $\mathbb{F}_p$:
$$MA_tM^{-1} = B_{-t},$$
ce qui établit le résultat désiré.

    b) Le noyau de ρ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$. S'il contient A_1, il contient les puissances de A_1. Or, pour k dans $\mathbb{Z}$:
$${A_1}^k = A_{\overline{k}}$$
où $\overline{k}$ désigne la réduction de k modulo p. Il s'ensuit que $\mathrm{Ker}(\rho)$ contient les matrices A_t pour t dans $\mathbb{F}_p$. Comme $\mathrm{Ker}(\rho)$ est normal dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$, la question a) entraîne que $\mathrm{Ker}(\rho)$ contient également les matrices B_t pour t dans $\mathbb{F}_p$. Comme le sous-groupe engendré par
$$\{A_t \ ; \ t \in \mathbb{F}_p\} \cup \{B_t \ ; \ t \in \mathbb{F}_p\}$$
n'est autre que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$, ρ est triviale.

    c) Soit x dans $\mathbb{F}_p^*$. Alors
$$D(x)^{-1} = D(1/x) \quad \text{et} \quad D(x)A_1D(x)^{-1} = A_{x^2}.$$
Pour x dans $\mathbb{F}_p^*$, les matrices A_1 et A_{x^2} sont donc conjuguées dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$. Comme A_1 est d'ordre p, on peut noter sans ambiguïté ${A_1}^y$ pour y dans $\mathbb{F}_p$. La relation précédente montre que, pour tout x dans $\mathbb{F}_p^*$, A_1 est conjugué à ${A_1}^{x^2}$. Il est classique que l'ensemble des carrés de $\mathbb{F}_p^*$ a pour cardinal $\dfrac{p-1}{2}$. Comme A_1 n'est pas dans le noyau de ρ grâce à b), la question 9 s'applique et montre que $\rho(A_1)$ admet au moins $\dfrac{p-1}{2}$ valeurs propres distinctes. Le degré de ρ est donc supérieur ou égal à $\dfrac{p-1}{2}$, ce qui entraîne le résultat désiré.

III. Mélange dans un groupe d-quasi aléatoire

III.A. Préliminaires

14. Soient u et v dans $\mathbb{C}[G]$. On a :

$$\|u\| = \sqrt{\sum_{g\in G} |u(g)|^2} \leq \sqrt{|G|\ \|u\|_\infty^2} = \sqrt{|G|}\ \|u\|_\infty.$$

D'autre part, pour g dans G, l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne :

$$|(u * v)(g)| \leq \sum_{h\in G} |u(h)\ v(gh^{-1})| \leq \sqrt{\sum_{h\in G} |u(h)|^2}\sqrt{\sum_{h\in G} |v(gh^{-1})|^2}$$

Comme l'application

$$h \longmapsto gh^{-1}$$

est une bijection de G sur G, le majorant n'est autre que $\|u\|\|v\|$. On en déduit la seconde inégalité.

La troisième inégalité se déduit des deux premières :

$$\|u * v\| \leq \sqrt{|G|}\ \|u * v\|_\infty \leq \sqrt{|G|}\ \|u * v\|.$$

15. a) On a d'abord

$$(\varphi^* \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ (\varphi^*)^* = \varphi^* \circ \varphi,$$

ce qui établit que $\varphi^* \circ \varphi$ est hermitien.

D'autre part, pour x dans V :

$$\langle \varphi^* \circ \varphi(x), x\rangle = \|\varphi(x)\|^2 \geq 0.$$

On en déduit la positivité de $\varphi^* \circ \varphi$.

b) Le théorème spectral hermitien entraîne que $\varphi^* \circ \varphi$ est diagonalisable dans une base orthonormée $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de V, à valeurs propres réelles. Écrivons donc

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad \varphi^* \circ \varphi(e_i) = \lambda_i e_i$$

avec

$$\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

La positivité de $\varphi^* \circ \varphi$ fait que les λ_i sont dans $\mathbb{R}^+$. D'autre part, si x est un élément de E, on écrit

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

où les x_i sont dans $\mathbb{C}$ et il vient

$$\|\varphi(x)\|^2 = \langle \varphi^* \circ \varphi(x), x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i|^2 \leq \lambda_n \|x\|^2.$$

Cette inégalité est une égalité pour x colinéaire à e_n, ce qui montre bien que la norme d'opérateur de φ est $\sqrt{\lambda_n}$.

16. a) Pour u dans $\mathbb{C}[G]$ et x dans G

$$K_u(1_G)(x) = \sum_{s\in G} u(s) = \langle 1_G, u\rangle\,.$$

Ainsi

$$K_u = \langle 1_G, u\rangle\ 1_G$$

Soient g, g' et x dans G. On a

$$K_u(\delta_g)(x) = \sum_{h\in G} u(h)\ \delta_g(h^{-1}x) = u(xg^{-1}).$$

Par conséquent :

$$\langle \delta_{g'}, K_u(\delta_g)\rangle = u(g'g^{-1}).$$

b) De même qu'en a) :

$$K_{\tilde{u}}(\delta_g)(x) = \tilde{u}(xg^{-1}) = \overline{u(gx^{-1})}.$$

Et donc

$$\langle \delta_{g'}, K_{\tilde{u}}(\delta_g)\rangle = \overline{u(gg'^{-1})}.$$

Choisissons une numérotation $g_1, \dots, g_n$ de G. Si A (resp. B) est la matrice de K_u dans $(\delta_{g_i})_{\leq i\leq n}$, on a

$$B = {}^t\overline{A}.$$

Compte-tenu du fait que $(\delta_g)_{g\in G}$ est une bse orthonormée de $\mathbb{C}[G]$, on en déduit le résultat (qu'il est également possible de vérifier en revenant à la définition de l'adjoint, sans utiliser de base).

c) On a, pour g dans G

$$\langle \delta_g, (K_u^* \circ K_u)(\delta_g)\rangle = \|K_u(\delta_g)\|^2 = \sum_{x\in G} |u(xg^{-1})|^2 = \|u\|^2.$$

Il s'ensuit que

$$\mathrm{Tr}(K_u^* \circ K_u) = \sum_{g\in G} \langle \delta_g, (K_u^* \circ K_u)(\delta_g)\rangle = |G|\ \|u\|^2.$$

d) Le premier calcul de la question 16.a) montre que la droite $\mathbb{C}1$ est stable par $K_{\tilde{u}} = K_u^*$. Il en résulte que $\mathbb{C}_0[G] = 1_G^{\perp}$ est stable par K_u.

17. a) Pour w dans $\mathbb{C}[G]$, $K_v \circ R_g(w)$ est la fonction définie par

$$\forall x \in G, \qquad (K_v \circ R_g)(w)(x) = \sum_{h\in G} u(h)v(h^{-1}xg).$$

De même, $R_g \circ K_v(w)$ est la fonction définie par

$$\forall x \in G, \qquad (R_g \circ K_v)(w)(x) = \sum_{h\in G} u(h)v(h^{-1}xg).$$

Le résultat suit.

b) Soit w dans $\mathbb{C}[G]$ telle que

$$\forall g \in G, \qquad R_g(w) = w.$$

Alors

$$\forall (g,h) \in G^2, \qquad w(h) = w(hg).$$

Comme $g \mapsto hg$ est une bijection de G sur G, la condition précédente signifie que w est constante, i.e. que w appartient à $\mathbb{C}1$. Ainsi

$$\mathbb{C}[G]^R = \mathbb{C}1_G.$$

III.B. Le théorème de Gowers-Nikolov-Pyber

18. a) Soit $m(\lambda)$ la dimension de l'espace propre de $K_u^* \circ K_u$ associée à λ.

Pour voir que $m(\lambda)$ est supérieur ou égal à d, il suffit de montrer qu'il existe une représentation non triviale de G dans

$$V = \mathrm{Ker}(K_u^* \circ K_u - \lambda \mathrm{Id}).$$

La question 17.a) assure que, pour tout g dans G, $K_u^* \circ K_u = K_{\tilde{u}} \circ K_u$ commute à R_g, donc que V est stable par R_g. Il reste à voir que la représentation obtenue en associant à l'élément g de G la restriction de R_g à V n'est pas triviale. Si tel était le cas, V serait contenu dans l'espace $\mathbb{C}[G]^R$ de la question 17.b), c'est-à-dire dans $\mathbb{C}1_G$. Comme u est dans $\mathbb{C}_0[G]$, $\mathbb{C}1_G$ est contenu dans $\mathrm{Ker}(K_u)$, donc a fortiori dans $\mathrm{Ker}(K_u^* \circ K_u)$. Comme λ est non nul, on obtient la contradiction désirée.

Comme $K_u^* \circ K_u$ est hermitien positif, il est diagonalisable à valeurs propres dans $\mathbb{R}^+$. En écrivant que sa trace est la somme de ses valeurs propres comptées avec multiplicité, il s'ensuit que

$$m(\lambda)\,\lambda \leq \mathrm{Tr}(K_u^* \circ K_u).$$

L'expression de $\mathrm{Tr}(K_u^* \circ K_u)$ déterminée dans la question 16.c) amène

$$m(\lambda) \leq \frac{|G|\ \|u\|^2}{\lambda}.$$

b) Si u est nul, le résultat est évident. Sinon, K_u est non nul et l'opérateur $K_u^* \circ K_u$ admet une valeur propre strictement positive. Soit λ la plus grande valeur propre de K_u. Les questions 15.b) et 18.a) entraînent, si v est dans $\mathbb{C}[G]$:

$$\|u * v\| = \|K_u(v)\| \leq \sqrt{\lambda}\|v\| \leq \sqrt{\frac{|G|}{m(\lambda)}}\|u\|\ \|v\| \leq \sqrt{\frac{|G|}{d}}\|u\|\ \|v\|.$$

19. a) Posons

$$u = 1_A - \frac{|A|}{|G|}1_G \quad \text{et} \quad v = 1_B.$$

La fonction u appartient à $\mathbb{C}_0[G]$. On observe que

$$u * v = 1_A * 1_B - \frac{|A|\,|B|}{|G|} 1_G.$$

Il est d'autre part clair que

$$\|v\|^2 = \|1_B\|^2 = |B|.$$

Comme u et 1_G sont orthogonales, le théorème de Pythagore implique

$$\|u\|^2 = \|1_A\|^2 - \left(\frac{|A|}{|G|}\right)^2 |G| = |A| - \frac{|A|^2}{|G|} \leq |A|.$$

Ainsi

$$\|u\| \leq \sqrt{|A|}.$$

L'inégalité

$$\left\| 1_A * 1_B - \frac{|A|\,|B|}{|G|} 1_G \right\| \leq \sqrt{\frac{|G|\,|A|\,|B|}{d}}$$

provient alors du résultat de la question 18.b).

b) On applique la seconde inégalité de la question 14 aux fonctions

$$u = 1_A * 1_B - \frac{|A|\,|B|}{|G|} \quad \text{et} \quad v = 1_C.$$

Il vient, en tenant compte de la question 19.a) :

$$\left\| 1_A * 1_B * 1_C - \frac{|A|\,|B|\,|C|}{|G|} \right\|_\infty \leq \sqrt{\frac{|G|\,|A|\,|B|\,|C|}{d}}.$$

c) On applique l'inégalité de la question 19.b). Pour g dans G, on a

$$1_A * 1_B * 1_C(g) = \sum_{\substack{(a,b,c) \in A \times B \times C \\ abc = g}} 1.$$

Il suffit donc de montrer que $1_A * 1_B * 1_C$ ne s'annule pas pour obtenir le résultat désiré. C'est le cas dès que

$$\frac{|A|\,|B|\,|C|}{|G|} > \sqrt{\frac{|G|\,|A|\,|B|\,|C|}{d}},$$

ce qui équivaut bien à

$$|A|\,|B|\,|C| > \frac{|G|^3}{d}.$$

d) On applique le résultat de la question c) aux ensembles A, B et $C^{-1} = \{c^{-1}\ ;\ c \in C\}$, ce qui est licite car $|C^{-1}| = |C|$. Le neutre e de G s'écrit abc^{-1} avec (a,b,c) dans $A \times B \times C$, ce qui donne bien l'existence de (a,b,c) dans $A \times B \times C$ tel que $ab = c$.

On en déduit aussitôt

$$\alpha(G) \leq \frac{|G|}{\sqrt[3]{d}}.$$

20. Notons d'abord que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ est naturellement équipotent à l'ensemble des bases de $\mathbb{F}_p^2$ comme $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel, ce qui amène :

$$|\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)| = (p^2-1)(p^2-p).$$

L'application déterminant induit un morphisme surjectif de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ sur $\mathbb{F}_p^*$, de noyau $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)$. On en déduit

$$|\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)| = \frac{(p^2-1)(p^2-p)}{p-1} = p(p-1)(p+1) = p^3-p.$$

La question 19.d) entraîne l'inégalité :

$$\alpha(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)) \leq \sqrt[3]{2}\,\frac{p^3-p}{\sqrt[3]{p-1}}.$$

Le majorant est $O(p^{8/3})$ c'est-à-dire $O\left(|\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_p)|^{8/9}\right)$ lorsque p tend vers $+\infty$, ce qui amène la conclusion désirée.

Problème 2

I. Fonctions semi-continues , intégrabilité au sens de Riemann

A. Fonctions semi-continues

1. a) Soit α un nombre réel. L'ensemble $]-\infty,\alpha]$ est fermé dans $\mathbb{R}$. Puisque f est continue, il en est de même de $f^{-1}(]-\infty,\alpha])$. Par suite, f est s.c.i.

   La fonction f égale à 1 sur $\mathbb{R}^*$ et à 0 en 0 est s.c.i. sur $\mathbb{R}$.

   b) L'ensemble $\{y \in E\ ;\ f(y) > f(x)-\varepsilon\}$ est le complémentaire du fermé $f^{-1}(]-\infty, f(x)-\varepsilon])$. Cet ensemble est donc ouvert dans E. Comme il contient x, il est voisinage de x.

   c) Pour α dans $\mathbb{R}$,
$$f^{-1}(]-\infty,\alpha]) = \bigcap_{i\in I} f_i^{-1}(]-\infty,\alpha])$$
   est fermé dans E comme intersection de fermés. On en déduit le résultat.

2. a) Soit M un majorant de f. La fonction constante égale à M appartient à $\Lambda^+(f)$, ce qui montre que cet ensemble n'est pas vide. Il s'ensuit que $\{u(x)\ ;\ u \in \Lambda^+(f)\}$ est non vide et minoré par $f(x)$, ce qui justifie la définition de $f^+(x)$.

   On justifie de même la définition de f^-.

   Enfin, on a clairement
$$f^-(x) \leq f(x) \leq f^+(x).$$

   b) Supposons f continue en x. Fixons ε dans $\mathbb{R}^{+*}$ et montrons :
$$(1) \qquad f^+(x) \leq f(x) + \varepsilon.$$
   Comme $f^+(x) \geq f(x)$, le caractère arbitraire de ε permettra d'en déduire $f^+(x) = f(x)$. Un raisonnement analogue établira $f^-(x) = f(x)$.

   Soit M un majorant de f. Nous allons montrer que, pour un bon choix de C dans $\mathbb{R}^+$, la fonction continue
$$v_C\ : y \longmapsto f(x) + \varepsilon + Cd(x,y),$$
   qui vaut $f(x)+\varepsilon$ en x, appartient à $\Lambda^+(f)$, ce qui garantira (1).

   On dispose de r dans $\mathbb{R}^{+*}$ tel que
$$\forall y \in E, \quad d(y,x) \leq r \Longrightarrow |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon.$$
   Pour y dans E tel que $d(x,y) \leq r$, on a, quel que soit le choix de C dans $\mathbb{R}^+$:
$$v_C(y) \geq f(x) + \varepsilon \geq f(y).$$

Pour y dans E tel que $d(x,y) > r$, on a

$$v_C(y) \geq f(x) + \varepsilon + Cr.$$

Il reste à choisir $C > 0$ assez grand pour que

$$f(x) + \varepsilon + Cr \geq M.$$

Supposons à présent que $f^+(x)$ et $f^-(x)$ sont égaux, donc égaux à $f(x)$. Soit ε dans $\mathbb{R}^{+*}$. D'après la question 1.c), la fonction f^- est s.c.i. D'après la question 1.b), on dispose d'un voisinage V de x dans E tel que

$$\forall y \in V, \qquad f^-(y) > f(x) - \varepsilon.$$

On a, a fortiori,

$$\forall y \in V, \qquad f(y) > f(x) - \varepsilon.$$

En utilisant f^+, on montre de même l'existence d'un voisinage V' de x dans E tel que

$$\forall y \in V', \qquad f(y) < f(x) + \varepsilon.$$

Finalement, $V \cap V'$ est un voisinage de x dans E et

$$\forall y \in V \cap V', \qquad f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon.$$

La fonction f est continue en x.

3. Soit m un minorant de f. Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans E , on a

$$\forall y \in E, \qquad f(y) + nd(x,y) \geq m,$$

ce qui justifie la définition de $f_n(x)$.

a) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On a

$$f_n(x) \leq f(x) + nd(x,x) \quad \text{i.e.} \quad f_n(x) \leq f(x).$$

D'autre part :

$$\forall y \in E, \qquad f(y) + nd(x,y) \leq f(y) + (n+1)d(x,y),$$

ce qui entraîne, par « passage à la borne inférieure » :

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x).$$

En fin de compte

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq f(x).$$

b) Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et y dans E, la fonction

$$x \in E \longmapsto f(y) + nd(x,y)$$

est n-lipschitzienne grâce à l'inégalité triangulaire. Il reste à utiliser le fait simple selon lequel une enveloppe supérieure de fonctions n-lipschitziennes est n-lipschitzienne.

c) Fixons x dans E. On a déjà :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f_n(x) \leq f(x).$$

Fixons maintenant ε dans $\mathbb{R}^{+*}$. On dispose d'un voisinage V de x dans E tel que

$$\forall y \in V, \qquad f(y) > f(x) - \varepsilon.$$

Soit r dans $\mathbb{R}^{+*}$ tel que V contienne la boule ouverte de centre x et de rayon r, boule que nous notons B. Soit par ailleurs m un minorant de f. Pour y dans B :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f(y) + nd(x, y) > f(x) - \varepsilon.$$

Pour y dans $E \setminus B$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f(y) + nd(x, y) \geq m + nd(x, y) \geq m + nr.$$

Supposons

$$n \geq \frac{f(x) - \varepsilon - m}{r}.$$

Alors

$$\forall y \in E, \qquad f(y) + nd(x, y) \geq f(x) - \varepsilon \quad \text{et} \quad f_n(x) \geq f(x) - \varepsilon.$$

Ainsi

$$n \geq \frac{f(x) - \varepsilon - m}{r} \Longrightarrow f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x).$$

La convergence simple est établie.

d) Supposons f s.c.i. En reprenant les questions b) et c), on voit que les fonctions f_n sont lipschitziennes, donc continues, et que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers f. La question a) assure par ailleurs que, pour tout x de E, la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est croissante. On obtient bien une suite $(g_n)_{n \geq 1} = (f_n)_{n \geq 1}$ vérifiant les conditions requises par l'énoncé.

Supposons qu'existe une suite $(g_n)_{n \geq 1}$ comme dans l'énoncé. On a alors

$$\forall x \in E, \qquad f(x) = \sup \{g_n(x) \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\}$$

et la fonction f est s.c.i grâce aux questions 1.a) et 1.c).

B. Intégrabilité au sens de Riemann

4. a) Prenons $\varepsilon = 1$ dans la définition de l'intégrabilité au sens de Riemann. On dispose de deux fonctions u et v continues de P dans $\mathbb{R}$ telles que

$$u \leq f \leq v.$$

Comme P est compact, les fonctions continues u et v sont bornées sur P. il s'ensuit aussitôt que f est bornée sur P.

b) Fixons ε dans $\mathbb{R}^+$. On dispose de u et v continues sur P telles que

$$u \leq f \leq v \quad \text{et} \quad \int_P (v - u) \leq \varepsilon.$$

On a

$$u \leq f^- \leq f \leq f^+ \leq v.$$

On en déduit

$$0 \leq \int_P (f^+ - f^-) \leq \int_P (v - u) \leq \varepsilon.$$

Le caractère arbitraire de ε permet de conclure

$$\int_P (f^+ - f^-) = 0.$$

La fonction $f^+ - f^-$ est positive d'intégrale nulle, donc nulle presque partout. Or, d'après la question 2.b), $f^+ - f^-$ est nulle en x si et seulement si x est un point de continuité de f.

5. Grâce à la question 3, on dispose de deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ de fonctions continues de P dans $\mathbb{R}$ convergeant respectivement vers f^- et f^+ et telles que, pour tout x dans E, $(u_n(x))_{n\geq 1}$ (resp. $(v_n(x))_{n\geq 1}$) soit croissante (resp. décroissante).

   La suite de fonctions positives $(v_n - u_n)_{n\geq 1}$ converge en décroissant vers $f^+ - f^-$. La fonction $v_1 - u_1$ est continue sur P, donc bornée, donc intégrable. Le théorème de convergence monotone assure que

   $$\int_P (v_n - u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_P (f^+ - f^-).$$

   Comme l'ensemble des points de discontinuité de f est négligeable, la fonction $f^+ - f^-$ est presque partout nulle. Ainsi

   $$\int_P (v_n - u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Fixons ε dans $\mathbb{R}^{+*}$. On dispose de N dans $\mathbb{N}^*$ tel que, pour n dans $\mathbb{N}$ tel que $n \geq N$:

   $$\int_P (v_n - u_n) \leq \varepsilon.$$

   Il s'ensuit que f est intégrable au sens de Riemann.

6. On vérifie facilement que les points de discontinuité de la fonction caractéristique de A sont ceux de la frontière de A. Il résulte alors des questions 4 et 5 que A est intégrable au sens de Riemann si et seulement si la frontière de A est négligeable.

II. Translation de vecteur irrationnel

A. Équirépartition modulo $\mathbb{Z}^d$

7. Dire que la famille $(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ de nombres réels est $\mathbb{Q}$-libre, c'est dire que, pour $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_d)$ dans $\mathbb{Q}^{d+1}$, la relation

   $$\lambda_0 + \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \alpha_i = 0$$

   entraîne que les λ_i, pour $0 \leq i \leq d$, sont tous nuls. En multipliant par un entier, on voit que cette propriété équivaut au fait que, pour $(\mu_1, \ldots \mu_d)$ dans $\mathbb{Z}^d$, la relation

   $$\sum_{i=1}^{d} \mu_i \alpha_i \in \mathbb{Z}$$

implique que les μ_i, pour $1 \leq i \leq d$, sont nuls. C'est l'équivalence des deux premières conditions.

Notons mainteant que

$$S_n(e_v)(x) = \exp\left(2i\pi \langle v, x\rangle\right) \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(2ik\pi \langle v, \alpha\rangle\right).$$

Soit v dans $\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$. Supposons d'abord :

$$\langle \alpha, v\rangle \in \mathbb{Z}.$$

Alors, pour n dans $\mathbb{N}^*$:

$$S_n(e_v)(0) = n \quad \text{et} \quad \frac{S_n(e_v)(0)}{n} = 1.$$

En particulier, la suite

$$\left(\frac{S_n(e_v)(0)}{n}\right)_{n\geq 1}$$

ne tend pas vers 0.

Supposons maintenant :

$$\langle \alpha, v\rangle \notin \mathbb{Z}.$$

Pour x de $\mathbb{R}^d$ et n dans $\mathbb{N}^*$

$$S_n(e_v)(x) = \exp(2i\pi \langle v, x\rangle)\, \frac{1 - \exp\left(2i\pi n \langle v, \alpha\rangle\right)}{1 - \exp\left(2i\pi \langle v, \alpha\rangle\right)}.$$

En particulier

$$|S_n(e_v)(x)| \leq \frac{2}{\left|1 - \exp\left(2i\pi \langle v, \alpha\rangle\right)\right|}$$

La suite $(S_n(e_v)(x))_{n\geq 1}$ est bornée, la suite

$$\left(\frac{S_n(e_v)(x)}{n}\right)_{n\geq 1}$$

converge vers 0.

8. a) Soit x dans $\mathbb{R}^d$. Par linéarité, la relation demandée est vraie pour f dans $\mathcal{P}$. Soit maintenant f dans $\mathcal{C}$. Fixons ε dans $\mathbb{R}^{+*}$. On dispose de p dans $\mathcal{P}$ tel que

$$\forall y \in \mathbb{R}^d, \qquad |f(y) - p(y)| \leq \varepsilon.$$

On dispose d'autre part de N dans $\mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geq N, \qquad \left|\frac{S_n(p)(x)}{n} - \int_{[0,1]^d} p\right| \leq \varepsilon.$$

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Alors

$$\left|\frac{S_n(f)(x)}{n} - \int_{[0,1]^d} f\right| \leq \left|\frac{S_n(f)(x)}{n} - \frac{S_n(p)(x)}{n}\right| + \left|\frac{S_n(p)(x)}{n} - \int_{[0,1]^d} p\right| + \left|\int_{[0,1]^d} (p - f)\right|.$$

Or

$$\frac{|S_n(f)(x) - S_n(p)(x)|}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |f(x+k\alpha)-p(x+k\alpha)| \leq \varepsilon, \qquad \left|\int_{[0,1]^d} (p-f)\right| \leq \int_{[0,1]^d} |f-p| \leq \varepsilon.$$

Il résulte des inégalités précédentes que, pour $n \geq N$:

$$\left|\frac{S_n(f)(x)}{n} - \int_{[0,1]^d} f\right| \leq 3\varepsilon.$$

Version plus condensée : les formes linéaires

$$f \longmapsto \frac{S_n(f)(x)}{n}, \ n \in \mathbb{N}^*$$

sont équicontinues sur $(\mathcal{C}, \| \ \|_\infty)$ (car de norme d'opérateur égale à 1). Pour établir la convergence simple de cette suite de formes linéaires, il suffit de la vérifier sur une partie dense de $(\mathcal{C}, \| \ \|_\infty)$.

b) Soient x dans $\mathbb{R}^d$, ε dans $\mathbb{R}^{+*}$. On dispose de u et v dans $\mathcal{C}$ telles que

$$u \leq f \leq v \quad \text{et} \quad \int_P (v-u) \leq \varepsilon.$$

On a, pour n dans $\mathbb{N}^*$

$$S_n(u)(x) \leq S_n(f)(x) \leq S_n(v)(x).$$

Choisissons N dans $\mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq N, \qquad \left|S_n(u)(x) - \int_{[0,1]^d} u\right| \leq \varepsilon, \quad \left|S_n(v)(x) - \int_{[0,1]^d} v\right| \leq \varepsilon.$$

Alors, si $n \geq N$

$$S_n(f)(x) \leq S_n(v)(x) \leq \int_{[0,1]^d} v + \varepsilon \leq \int_{[0,1]^d} u + 2\varepsilon \leq \int_{[0,1]^d} f + 2\varepsilon.$$

De même, pour $n \geq N$:

$$S_n(f)(x) \geq S_n(v)(x) \geq \int_{[0,1]^d} f - 2\varepsilon.$$

Le résultat est démontré.

c) Remarquons que, pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}^d$,

$$N_n^A(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \chi_A(x+k\alpha) = S_n(\chi_A)(x).$$

L'intégrabilité au sens de Riemann de χ_A et la question b) entraînent

$$\frac{N_n^A(x)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mu(A).$$

9. Dire que α est dans J, c'est dire qu'existent $v_1, \ldots, v_d$ dans $\mathbb{Z}$, non tous nuls et m dans $\mathbb{Z}$, tels que α appartienne à l'hyperplan d'équation

$$\sum_{i=1}^{d} v_i x_i = m.$$

Comme $(\mathbb{Z}^d \backslash \{0\}) \times \mathbb{Z}$ est dénombrable, on en déduit bien que J est une réunion dénombrable d'hyperplans affines.

Or, un hyperplan affine de $\mathbb{R}^d$ est négligeable. Comme une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable, il vient

$$\mu(J) = 0.$$

B. Opérateurs de translation dans L^2

10. a) Vérifions d'abord que la famille $(e_v)_{v \in \mathbb{Z}^d}$ est orthonormée. Pour v et w dans $\mathbb{Z}^d$, on a, en posant $m = w - v$:

$$\langle e_v, e_w \rangle = \int_{[0,1]^d} e_m.$$

Si $v = w$, $m = 0$ et e_0 est la fonction constante égale à 1. Les vecteurs e_v, $v \in \mathbb{Z}^d$ sont donc unitaires.

Si $v \neq w$, $m \neq 0$. Posant $m = (m_1, \ldots, m_d)$, on dispose de j dans $\{1, \ldots, d\}$ tel que $m_j \neq 0$. On a alors :

$$\int_0^1 \exp(2i\pi m_j x_j) \, \mathrm{d}x_j = 0$$

et, d'après le théorème de Fubini, applicable puisque e_m est bornée et donc intégrable sur $[0,1]^d$:

$$\int_{[0,1]^d} e_m = \prod_{k=1}^{d} \int_0^1 \exp(2i\pi m_k x_k) \, \mathrm{d}x_k = 0.$$

Il reste à montrer que le sous-espace $\mathcal{P}$ de L^2 engendré par $(e_v)_{v \in \mathbb{Z}^d}$ est dense dans L^2. Or, $\mathcal{P}$ est dense dans $(\mathcal{C}, \| \; \|_\infty)$, donc dans $(\mathcal{C}, \| \; \|)$, car, sur un espace de mesure finie, la norme uniforme domine la norme de la convergence en moyenne quadratique. La densité de $\mathcal{C}$ dans L^2 achève la vérification de la densité de $\mathcal{P}$ dans L^2.

b) Pour v dans $\mathbb{Z}^d$, il est immédiat de vérifier que

$$T_\alpha(e_v) = \exp\left(2i\pi \langle \alpha, v \rangle\right) e_v.$$

11. a) La linéarité de T_α est évidente. Par ailleurs, pour f dans L^2 :

$$\int_{[0,1]^d} |f(x+\alpha)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_{[0,1]^d + \alpha} |f(y)|^2 \, \mathrm{d}y = \int_{[0,1]^d} |f(z)|^2 \, \mathrm{d}z,$$

où la première égalité résulte d'un changement de variable affine, la deuxième de la $\mathbb{Z}^d$-périodicité de f. Il s'ensuit que T_α envoie L^2 dans lui-même et réalise une isométrie de L^2, a fortiori un endomorphisme continu de L^2.

Pour f dans L^2 et v dans $\mathbb{Z}^d$, des arguments analogues aux précédents permettent d'écrire :

$$c_v(T_\alpha(f)) = \int_{[0,1]^d} f(x+\alpha)\, e_{-v}(x)\, \mathrm{d}x = \int_{[0,1]+\alpha} f(y)\, e_{-v}(y-\alpha)\, \mathrm{d}y,$$

$$c_v(T_\alpha(f)) = \int_{[0,1]+\alpha} f(y)\, e_{-v}(y)\, e_v(\alpha)\, \mathrm{d}y = e_v(\alpha)\, c_v(f).$$

b) Un élément d'un espace de Hilbert est déterminé par ses coefficients de Fourier relativement à une base hilbertienne. Il s'ensuit que l'élément f de L^2 appartient à $E_\lambda(T_\alpha)$ si et seulement si

$$\forall v \in \mathbb{Z}^d, \qquad c_v(T_\alpha(f)) = c_v(\lambda f),$$

c'est-à-dire si

$$\forall v \in \mathbb{Z}^d, \qquad c_v(f)\left(\exp\left(2i\pi \langle v, \alpha\rangle\right) - \lambda\right) = 0.$$

Si λ n'est pas de la forme

$$\exp\left(2i\pi \langle v, \alpha\rangle\right) \quad \text{avec} \quad v \in \mathbb{Z}^d,$$

la condition précédente implique que tous les $c_v(f)$ sont nuls, donc que f est l'élément nul de L^2. Ainsi, λ n'est pas valeur propre de T_α.

Dans le cas contraire, le résultat de la question 10.b) montre que λ est valeur propre de T_α.

12. L'élément g de L^2 est dans l'image de $T_\alpha - \mathrm{Id}$ si et seulement s'il existe f dans L^2 tel que

$$\forall v \in \mathbb{Z}^d, \qquad c_v(g) = c_v(T_\alpha(f) - f) = \left(\exp\left(2i\pi \langle v, \alpha\rangle\right) - 1\right) c_v(f).$$

Tel est le cas si et seulement si $c_0(g) = 0$ et s'il existe f dans L^2 tel que :

$$\forall v \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}, \qquad c_v(f) = \frac{c_v(g)}{\exp\left(2i\pi \langle v, \alpha\rangle\right) - 1}\,.$$

Le théorème de Riesz-Fischer assure que cette condition équivaut à :

$$c_0(g) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{v \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \frac{|c_v(g)|^2}{|\exp\left(2i\pi \langle v, \alpha\rangle\right) - 1|^2} < +\infty.$$

Comme

$$\forall v \in \mathbb{Z}^d, \qquad |\exp\left(2i\pi \langle v, \alpha\rangle\right) - 1|^2 = 4\sin^2\left(\pi \langle v, \alpha\rangle\right),$$

on en déduit l'équivalence demandée.

III. Parties à restes bornés modulo α

A. L'équation $f(x+\alpha) - f(x) = g(x)$

13. On note que

$$(1) \quad S_n(g)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(x+(k+1)\alpha) - f(x+k\alpha)\right) = f(x+n\alpha) - f(x).$$

Soient E une partie négligeable de $\mathbb{R}^d$ et M un élément de $\mathbb{R}^{+*}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus E, \qquad |f(x)| \leq M.$$

Pour n dans $\mathbb{N}$, l'ensemble $E - n\alpha$ est négligeable comme translaté d'un ensemble négligeable. Si

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E - n\alpha),$$

F est négligeable comme réunion d'ensembles négligeables. Pour x dans $\mathbb{R}^d \setminus F$, on a, grâce à (1) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |S_n(g)(x)| \leq 2M.$$

14. Soient m et M deux nombres réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad m \leq u_n \leq M.$$

Pour n dans $\mathbb{N}$, l'ensemble

$$\{u_k \ ; \ k \geq n\}$$

est minoré par m, ce qui justifie la définition de v_n.

Soit n dans $\mathbb{N}$. L'inclusion

$$\{u_k \ ; \ k \geq n+1\} \subset \{u_k \ ; \ k \geq n\},$$

entraîne

$$v_n \leq v_{n+1}.$$

La suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante, à valeurs dans $[m, M]$, donc majorée. On en déduit que $(v_n)_{n\geq 1}$ converge.

15. Pour n dans $\mathbb{N}$ et x dans $\mathbb{R}^d$:

$$S_{n+1}(g)(x) - S_n(g)(x+\alpha) = \sum_{k=0}^{n} g(x+k\alpha) - \sum_{k=0}^{n-1} g(x+k\alpha+\alpha) = g(x).$$

Commençons par le cas où g est à valeurs réelles. Soient E une partie négligeable de $\mathbb{R}^d$ et C un élément de $\mathbb{R}^{+*}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus E, \qquad |S_n(g)(x)| \leq C.$$

Posons, pour x dans E :

$$f(x) = -\underline{\lim}\, (S_n(g)(x)).$$

On a aussi

$$f(x) = -\underline{\lim}\ (S_{n+1}(g)(x)).$$

Soit F l'ensemble

$$F = E \cup (E - \alpha).$$

Alors F est négligeable et, pour x dans F, x et $x + \alpha$ sont dans E. En « passant à la limite inférieure » la relation

$$S_{n+1}(g)(x) = S_n(g)(x + \alpha) + g(x),$$

il vient

$$f(x + \alpha) - f(x) = g(x).$$

D'autre part, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la fonction $S_n(g)$ est $\mathbb{Z}^d$-périodique. On peut donc supposer que E est stable par translation par $\mathbb{Z}^d$ et que

$$\forall (x, v) \in E \times \mathbb{Z}^d, \qquad f(x + v) = f(x).$$

On passe au cas où g est complexe en appliquant le résultat précédent à la partie réelle et à la partie imaginaire de f.

B. Mesure d'une partie à restes bornés modulo α

16. a) Par définition, A est à restes bornés modulo α si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que, pour presque tout x dans $\mathbb{R}^d$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |S_n(g_A)(x)| \leq C.$$

La question 15 montre que ceci équivaut à l'existence d'une fonction f mesurable et essentiellement bornée de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant (E_{g_A}). Il reste à considérer la partie réelle de cette fonction pour conclure.

b) La fonction $h = \exp(2i\pi f)$ est bornée par 1 et $\mathbb{Z}^d$-périodique ; elle appartient donc à L^2.

D'autre part, pour x dans $\mathbb{R}^d$:

$$h(x + \alpha) = \exp\left(2i\pi(f(x + \alpha)\right) = \exp\left(2i\pi(f(x) + g_A(x))\right).$$

Or, pour tout x dans $\mathbb{R}^d$,

$$g_A(x) \in \{-\mu(A), 1 - \mu(A)\}, \quad \text{donc} \quad \exp\left(2i\pi g_A(x)\right) = \exp\left(-2i\pi\mu(A)\right).$$

Il s'ensuit que h est vecteur propre de T_α associé à la valeur propre $\exp\left(-2i\pi\mu(A)\right)$.

D'après la question 11.b), il existe $v = (v_1, \ldots, v_d)$ dans $\mathbb{Z}^d$ tel que

$$\exp\left(2i\pi\mu(A)\right) = \exp\left(2i\pi \langle v, \alpha\rangle\right) = \exp\left(2i\pi \left(\sum_{j=1}^{d} v_j \alpha_j\right)\right).$$

C'est dire que $\mu(A)$ appartient au sous-groupe de $\mathbb{R}$ engendré par $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$.

C. Cas des intervalles : théorème de Kesten-Petersen

17. Posons, pour x dans $\mathbb{R}$:
$$\psi(x) = \varphi(x+\beta) - \varphi(x).$$
Comme φ est $\mathbb{Z}$-périodique, il en est de même de ψ. Pour x dans $[0, 1-\beta[$,
$$\psi(x) = (x+\beta) - x = \beta.$$
Pour x dans $[1-\beta, 1[$,
$$\psi(x) = (x+\beta-1) - x = \beta - 1.$$
Ceci établit la relation demandée.

Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}$:
$$S_n(\chi_{[1-\beta,1[})(x) - n\beta = \sum_{k=0}^{n-1} g_\beta(x+k\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\varphi(x+k\alpha) - \varphi(x+k\alpha+\beta)\right).$$
On écrit maintenant
$$\beta = \ell\alpha + m, \quad \text{avec} \quad (\ell, m) \in \mathbb{Z}^2.$$
Il vient
$$S_n(\chi_{[1,\beta,1[})(x) - n\beta = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\varphi(x+k\alpha) - \varphi(x+(k+\ell)\alpha)\right).$$
Supposons d'abord $\ell \geq 0$. Pour $n \geq \ell$, la somme précédente n'est autre que
$$\sum_{k=0}^{\ell-1} \left(\varphi(x+k\alpha) - \varphi(x+(k+n)\alpha)\right).$$
Comme φ est à valeurs dans $[0, 1[$, on a alors
$$|S_n(\chi_{[1,\beta,1[})(x) - n\beta| \leq \ell.$$
Cette inégalité vaut encore, trivialement, si $0 \leq n \leq \ell - 1$. Le cas $\ell \leq 0$ est analogue. En fin de compte, la propriété demandée est satisfaite avec $K = |\ell|$.

18. Calculons les coefficients de Fourier de la fonction 1-périodique g_β. Cette fonction est de moyenne nulle :
$$c_0(g_\beta) = 0.$$
Pour m dans $\mathbb{Z}^*$:
$$c_m(g_\beta) = \int_0^1 g_\beta(x)\exp(-2i\pi mx)\,\mathrm{d}x = -\beta\int_0^1 \exp(-2i\pi mx)\,\mathrm{d}x + \int_{1-\beta}^1 \exp(-2i\pi mx)\,\mathrm{d}x,$$
c'est-à-dire
$$c_m(g_\beta) = \int_{1-\beta}^1 \exp(-2i\pi mx)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\exp(-2i\pi mx)}{-2i\pi m}\right]_{1-\beta}^1 = \frac{\exp(i\pi\beta m)\ \sin(m\pi\beta)}{\pi m}.$$
Le résultat de la question 12 entraîne alors l'équivalence des deux premières conditions.

L'appartenance de g_β à l'image de $T - \mathrm{Id}$ montre (passage à la partie réelle) que l'hypothèse de la question 16.b) est satisfaite. Il s'ensuit que β appatient à $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha$. C'est la troisième condition.

La question 17 montre que la troisième condition implique la quatrième, qui est elle-même plus forte que la cinquième. Enfin, la cinquième condition implique la première grâce aux questions 15 et 16.a).