Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents, sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. Il est possible d'utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

L'épreuve comporte deux parties :

— Une première partie, composée d'**exercices**. Les candidats sont invités à consacrer au moins un tiers du temps de l'épreuve de cette partie en cherchant à traiter les cinq exercices numérotés I, II, III, IV et V.

— Un problème à traiter **au choix** parmi deux proposés : le Problème 1, plutôt orienté « Algèbre et Géométrie » ou bien le Problème 2, plutôt orienté « Analyse et Probabilités ». **Le candidat devra indiquer clairement sur sa copie le problème qu'il choisit. Seul ce choix sera pris en compte dans l'évaluation.** Au moins la moitié du temps de l'épreuve devrait être consacrée à l'un de ces problèmes.

Le barème tient compte de cette répartition indicative du temps à accorder à chaque partie.

Notations, vocabulaire et rappels

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.

Si $\mathbb{K}$ est un corps et m un entier naturel non nul, on note $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées d'ordre m sur $\mathbb{K}$. On note 0_m et I_m ses éléments neutres pour l'addition et la multiplication respectivement. On note $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ le groupe des éléments inversibles dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$.

Dans tout le sujet, le polynôme caractéristique χ_M d'une matrice M dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ est défini comme le déterminant de la matrice $X\mathrm{I}_m - M$ dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{K}[X])$, et sa trace est notée $\mathrm{Tr}(M)$

Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé et soit n un entier naturel. On dit que X admet un moment d'ordre n si $|X|^n$ admet une espérance finie. Si X admet un moment d'ordre 1, on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance, et si X admet un moment d'ordre 2, on note $\mathbb{V}(X)$ sa variance, à savoir $\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2)$.

Si E est un espace vectoriel réel et $x_1, \dots, x_n$ des points de E, on appelle combinaison convexe de $x_1, \dots, x_n$ toute combinaison linéaire de ces points dont les coefficients sont tous positifs et de somme égale à 1. Si A est une partie de E, on appelle enveloppe convexe de A l'ensemble des combinaisons convexes de points de A. C'est le plus petit ensemble convexe de E contenant A.

Si P est un polynôme, on note P' son polynôme dérivé.

Exercice I

Soit m un entier supérieur ou égal à 2. On note E la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ et G le groupe $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$.

1. Soit M dans E et n un entier naturel non nul tels que $M^n = \mathrm{I}_m$. Démontrer que M est diagonalisable.
2. Soit M dans E tel que, pour tout entier naturel non nul n, $\mathrm{Tr}(M^n) = 0$.
   (a) Démontrer que 0 est valeur propre de M. On pourra considérer χ_M.
   (b) Démontrer qu'il existe un polynôme P vérifiant $P(0) = 0$ et tel que, pour toute valeur propre non nulle λ de M, on ait $P(\lambda) = 1$.
   (c) Démontrer que $m - \mathrm{Tr}(P(M))$ est égal à la multiplicité de 0 dans χ_M.
   (d) En déduire que M est nilpotent.
3. Soit H un sous-groupe fini de G.

(a) Démontrer qu'il existe un entier naturel non nul N vérifiant : $\forall g \in H,\ g^N = \mathrm{I}_m$.

(b) En déduire que l'ensemble T, défini par $T = \{\mathrm{Tr}(g); g \in H\}$, est fini.

4. Soit H un sous-groupe **quelconque** de G. On suppose que tous les éléments de H sont diagonalisables et que l'ensemble T, défini par $T = \{\mathrm{Tr}(g); g \in H\}$, est fini.

(a) Démontrer qu'il existe r, entier naturel non nul, et $M_1, \ldots, M_r$ dans H tels que H soit inclus dans le sous-espace vectoriel F de E engendré par $(M_1, \ldots, M_r)$.

(b) L'inclusion $H \subset F$ est-elle nécessairement stricte ?

(c) Soit g et h dans H. On pose $x = h^{-1}g - \mathrm{I}_m$. Démontrer que x est diagonalisable et que, pour tout entier naturel n, $x^n \in F$.

(d) Soit g et h dans H vérifiant, pour tout entier i compris entre 1 et r, $\mathrm{Tr}(M_i g) = \mathrm{Tr}(M_i h)$. On pose $x = h^{-1}g - \mathrm{I}_m$. Démontrer que x est nilpotent et en déduire $g = h$.

(e) Conclure que H est fini.

Exercice II

1. Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et bornée sur $\mathbb{R}_+$, telle que $u'(0) = 0$.

(a) Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u'(t)}{t}\mathrm{d}t$ est convergente.

(b) En déduire que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\mathrm{d}t$ sont convergentes.

(c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^3)\mathrm{d}t$ est convergente. On pourra effectuer un changement de variable.

2. Pour x réel positif et n entier naturel, on pose

$$f(x) = \int_0^x \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t\,.$$

(a) Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ est équivalent à $\ln(N)$, lorsque N tend vers $+\infty$.

(b) Démontrer que u_n est équivalent à $\frac{2}{n\pi}$, lorsque n tend vers $+\infty$.

(c) En déduire un équivalent de $(f(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$ en $+\infty$.

(d) En déduire un équivalent de f au voisinage de $+\infty$ et que $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Pour x réel positif, on pose

$$g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad h(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^3}\mathrm{d}t\,.$$

(a) Démontrer que h est intégrable au voisinage de l'infini.

(b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ est convergente.

(c) La fonction g est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$?

Exercice III

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_k)_{k\geqslant 1}$ et T des variables aléatoires réelles discrètes sur cet espace, mutuellement indépendantes. On suppose les $(X_k)_{k\geqslant 1}$ identiquement distribuées et T à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ presque sûrement. On note $X = X_1$ et $S = X_1 + \cdots + X_T$. Pour une variable aléatoire X, on note ϕ_X sa fonction génératrice, i.e. la fonction définie par $\phi_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$.

1. Justifier que S est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
2. On suppose que X et T ont des moments d'ordre 2. De plus, pour cette question, on suppose que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (a) Démontrer $\phi_S = \phi_T \circ \phi_X$ sur $[0, 1]$.
   (b) En déduire $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X)$, puis $\mathbb{V}(S) = \mathbb{E}(T)\mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(T)\mathbb{E}(X)^2$.
3. On se donne deux entiers a et b vérifiant $a < 0 < b$ et x un entier dans $]a, b[$. On suppose dans cette question que X suit une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$ et on pose $S_{n,x} = x + X_1 + \cdots + X_n$, $T_x = \inf\{n \in \mathbb{N}^\star; S_{n,x} \notin]a, b[\}$. On note $S_n = S_{n,0}$.
   (a) Démontrer $\mathbb{P}(T_x > b - a) \leqslant 1 - 2^{-(b-a)}$.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel non nul n, $\mathbb{P}(T_0 > n(b - a)) \leqslant \left(1 - 2^{-(b-a)}\right)^n$.
   (c) En déduire que T_0 admet un moment d'ordre 2 et qu'il est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ presque sûrement.
   On admet que ceci permet d'appliquer les résultats de la question 2.b) même si X n'est pas à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (d) Démontrer que S est presque sûrement à valeurs dans $\{a, b\}$ et qu'on a
   $$\mathbb{P}(S = a) = \frac{b}{b - a} \text{ et } \mathbb{P}(S = b) = \frac{-a}{b - a}\ .$$
   (e) En déduire $\mathbb{E}(T)$.

Exercice IV

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et P est un polynôme à coefficients complexes de degré n. On note $z_1, \ldots, z_k$ les racines complexes distinctes de P et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ leurs multiplicités respectives.

1. Soit ζ une racine de P' qui n'est pas racine de P.
   (a) Écrire la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ de P'/P.
   (b) En déduire que ζ est combinaison convexe de $z_1, \ldots, z_k$.
2. Démontrer que si $z_1, \ldots, z_k$ sont imaginaires purs, alors toutes les racines de P' sont imaginaires pures.
3. On note $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{D}'$) l'enveloppe convexe des racines de P (resp. P'). Si H est un demi-plan de $\mathbb{C}$, on note P_H la restriction à H de la fonction polynomiale associée à P.
   (a) Démontrer $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$.
   (b) Soit H un demi-plan rencontrant $\mathcal{D}'$, i.e. $H \cap \mathcal{D}' \neq \emptyset$. Démontrer que H contient l'une des racines de P' et en déduire que P_H est surjectif.
4. Soit $\mathcal{C}$ un convexe du plan. On suppose que pour tout demi-plan H, soit $H \cap \mathcal{C} = \emptyset$, soit P_H est surjective. Démontrer $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$.

Exercice V

Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières à coefficients réels de rayon de convergence supérieur ou égal à 1. On note respectivement f et g leurs sommes sur l'intervalle $]-1,1[$. On note, pour n entier naturel, $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $m_n = \dfrac{s_0 + \cdots + s_n}{n+1}$.

1. On suppose que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs strictement positives et que $\sum b_n$ diverge.
   (a) Démontrer $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = +\infty$.
   (b) Soit A un réel. On suppose que $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs supérieures à A à partir d'un certain rang. Démontrer :
   $$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \eta \in]0,2[, \quad \forall x \in]1-\eta, 1[, \quad \frac{f(x)}{g(x)} > A - \varepsilon \,.$$
   (c) En déduire que si $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie ou infinie dans $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, alors on a
   $$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{a_n}{b_n} \,.$$
   (d) Démontrer, pour x dans $]-1,1[$, $f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} s_n x^n = (1-x)^2 \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)m_n x^n$, puis en déduire que si $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie ou infinie dans $\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, alors on a $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim m_n$.
2. On suppose $a_n = 1$ si n est une puissance de 2, i.e. $n \in \{1,2,4,8,\cdots\}$ et $a_n = 0$ sinon.
   (a) Justifier que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est 1.
   (b) Démontrer $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)f(x) = 0$.
   (c) On considère maintenant la série entière complexe $\sum a_n z^n$ et on note S sa somme sur le disque unité ouvert. Soit p un entier naturel et z une racine 2^p-ième de l'unité dans $\mathbb{C}$, i.e. $z^{2^p} = 1$. Démontrer que S n'admet pas de limite en ce point.
   (d) En déduire que S n'admet de limite en aucun point du cercle unité.
3. On suppose $a_n = 1$ si n est un carré, i.e. $n \in \{0,1,4,9,16,\cdots\}$ et $a_n = 0$ sinon. Démontrer $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Problème 1 : Algèbre et Géométrie

Pour i, j deux entiers naturels tels que $i \leqslant j$, on note $[\![i, j]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris au sens large entre i et j.

Pour un entier n strictement positif, on note $\mathcal{S}_n$ le *groupe symétrique* de l'ensemble $[\![1, n]\!]$. On rappelle qu'il s'agit de l'ensemble de toutes les bijections de $[\![1, n]\!]$ sur lui-même, muni de la composition des applications. La notation $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ désigne la permutation qui envoie i_j sur i_{j+1}, si j est compris entre 1 et $k-1$, i_k sur i_1, et laisse invariant les autres points. Lorsque $k = 2$, cette permutation est appelée une *transposition*.

Un *graphe* G est la donnée d'une paire (S, A) où S est un ensemble fini, dont les éléments sont appelés les *sommets* de G, et A une partie de $S \times S$ symétrique c'est-à-dire que, pour tous u, v dans S, (u, v) appartient à A si et seulement si (v, u) appartient à A. Deux éléments u, v de S sont dits *reliés* dans G s'il existe un entier naturel r et une suite de sommets $u_0, ..., u_r$ tels que $u_0 = u$, $u_r = v$ et (u_i, u_{i+1}) appartient à A, pour tout i entre 0 et $r-1$. Le graphe G est dit *connexe* si tous ses sommets sont reliés deux à deux.

Partie A

Soit n un entier naturel non nul.

1. Justifier que $\mathcal{S}_n$ est un groupe fini et calculer son ordre.
2. Justifier que $\mathcal{S}_n$ n'est pas abélien dès que $n \geqslant 3$. Que vaut S_2 ?
3. Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{S}_n$ composée de transpositions. On définit un graphe $G_{\mathcal{A}}$ de la manière suivante : ses sommets sont les entiers de 1 à n, et pour tous sommets i, j, (i, j) est dans A si et seulement si la transposition (i, j) est dans $\mathcal{A}$.
   (a) On note $\mathcal{A}_1$ l'ensemble des transpositions dans $\mathcal{S}_n$.
      i. Démontrer que $\mathcal{A}_1$ engendre le groupe $\mathcal{S}_n$.
      ii. Justifier que le graphe $G_{\mathcal{A}_1}$ est connexe.
   (b) On note $\mathcal{A}_2$ l'ensemble $\{(i, i+1) \mid 1 \leqslant i \leqslant n-1\}$ dans $\mathcal{S}_n$.
      i. Démontrer que $\mathcal{A}_2$ engendre le groupe $\mathcal{S}_n$.
      ii. Justifier que le graphe $G_{\mathcal{A}_2}$ est connexe.
   (c) Soit $\mathcal{A}$ une partie formée de transpositions de $\mathcal{S}_n$.
      i. On suppose que $\mathcal{A}$ engendre $\mathcal{S}_n$; justifier que le graphe $G_{\mathcal{A}}$ est connexe.
      ii. On suppose que le graphe $G_{\mathcal{A}}$ est connexe. Démontrer que $\mathcal{A}$ engendre $\mathcal{S}_n$.
      Indication : Étant donnés deux éléments u, v de $[\![1, n]\!]$ tels qu'il existe un entier naturel r et une suite de sommets $u_0, ..., u_r$ distincts deux à deux tels que $u_0 = u$, $u_r = v$ et (u_i, u_{i+1}) dans $\mathcal{A}$, pour tout i entre 0 et $r-1$, on pourra déterminer l'élément $\sigma(u_{r-1}, u_r)\sigma^{-1}$ où $\sigma = (u_0, u_1)(u_1, u_2) \cdots (u_{r-2}, u_{r-1})$.

Partie B

Soit n un entier naturel $\geqslant 3$.. Soit G un groupe dont on note 1 l'élément neutre. On suppose que G est engendré par $n-1$ éléments $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$ qui vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1, n-1]\!], \tau_i^2 = 1, \\ \forall i \in [\![1, n-2]\!], (\tau_i \tau_{i+1})^3 = (\tau_{i+1}\tau_i)^3 = 1, \\ \forall i \in [\![1, n-1]\!], \forall j \in [\![1, n-1]\!], \text{si } |i-j| > 1, (\tau_i \tau_j)^2 = 1. \end{cases}$$

On suppose de plus que G n'est pas engendré par un sous ensemble strict de $\{\tau_1, \dots, \tau_{n-1}\}$. Pour i dans $[\![1, n-1]\!]$, on pose $\sigma_i = \tau_i \dots \tau_{n-2}\tau_{n-1}$. On note H le sous-groupe engendré par $\tau_1, \dots, \tau_{n-2}$ et, pour i dans $[\![1, n-1]\!]$, $H_i = \sigma_i H$. On pose $H_n = H$.

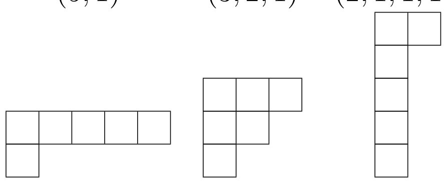
4. Soient i, j dans $[\![1, n-1]\!]$. Démontrer :
   (a) $\tau_i H_i = H_{i+1}$,
   (b) $\tau_i H_{i+1} = H_i$
   (c) $\tau_i H_j = H_j$ si $j \neq i$ et $j \neq i+1$.
   Indication : on pourra remarquer que $\tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}$, pour tout i dans $[\![1, n-2]\!]$.
5. Soient i, j dans $[\![1, n-1]\!]$. tels que $i < j$.
   (a) On suppose que $\sigma_i^{-1} \sigma_j$ appartient à H.
      i. Justifier que $\sigma_{j-1}^{-1} \sigma_j$ est dans H, puis que $\sigma_{j+1}^{-1} \sigma_j$ est dans H.
      ii. En déduire que $\sigma_{k+1}^{-1} \sigma_k$ appartient à H pour tout entier k dans $[\![j, n-2]\!]$.
      iii. En déduire une contradiction.
   (b) En déduire : $H_i \neq H_j$.
6. Justifier que l'ordre de G est inférieur ou égal à $n!$.
7. Justifier l'existence d'un isomorphisme de groupe de G sur le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$.
8. Soit (ABC) le triangle équilatéral dont les sommets sont donnés par $A = (1; 0)$, $B = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $C = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Soit G le sous-groupe du groupe orthogonal $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ formé des isométries g préservant le triangle (ABC), i.e. telles que $g(\{A, B, C\}) = \{A, B, C\}$.
   (a) Démontrer que l'on peut trouver τ_1 et τ_2 engendrant G et vérifiant : $\tau_1^2 = \tau_2^2 = 1$ et $(\tau_1 \tau_2)^3 = (\tau_2 \tau_1)^3 = 1$. Donner des interprétations géométriques de τ_1, τ_2 et $\tau_1 \tau_2$.
   (b) Que peut-on en déduire pour G ?

Partie C

Soit n un entier naturel strictement positif. Soient k dans $\mathbb{N}^*$ et $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ dans $(\mathbb{N}^*)^k$. On dit que λ est une *partition* de n si $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k$ et $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = n$. À une telle partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, on associe un diagramme, dit Γ-*diagramme* : il s'agit d'un ensemble de n carrés, répartis sur k lignes, alignés à gauche et en haut, tel que la i-ème ligne du diagramme contient λ_i carrés, pour tout i compris entre 1 et k. Ces carrés sont appelés les *cases* du Γ-diagramme.

Par exemple, on représente ci-dessous les Γ-diagrammes associés à trois partitions de l'entier 6 :

$(5, 1)$ $(3, 2, 1)$ $(2, 1, 1, 1, 1)$



Si n est dans $\mathbb{N}^*$ et $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ est une partition de n, on appelle Γ-*tableau* associé à la partition λ le Γ-diagramme associé à λ dont on a rempli chacune des cases par un entier naturel, ces entiers étant tous distincts et tels que les valeurs des cases sur chaque ligne (respectivement sur chaque colonne) sont strictement croissantes de la gauche vers la droite (respectivement de bas en haut). Lorsque de plus, le Γ-tableau est rempli avec les nombres de 1 à n, on dit qu'il est *standard.* Par exemple, les figures suivantes sont des Γ- tableaux standards pour la partition $(3, 1)$ de l'entier 4 :

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array}\ , \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\ , \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

On notera $\mathcal{T}_n$ l'ensemble des Γ-tableaux standards associés à toutes les partitions de l'entier n et $\mathcal{T}_\lambda$ l'ensemble des Γ-tableaux standards associés à une partition λ donnée. On introduit également

$$\mathcal{T}_n^{(2)} = \{(G, D) \in (\mathcal{T}_n)^2 \mid G \text{ et } D \text{ associés à une même partition}\}.$$

Etant donnés un Γ-tableau Y et un entier naturel x qui n'est pas dans une case de Y, on construit $Y^{\leftarrow x}$ en ajoutant une case et en insérant x de la façon suivante : soit k le nombre de lignes de Y ; on note $Y_1, ..., Y_k$ les lignes de Y, et $Y_i[j]$ la valeur contenue dans la j-ème case de Y_i.

Initialisation : $I = 1$, $X = x$.

Tant que Y_I contient un élément $> X$ et $I \leqslant k$:
- Soit y le plus petit élément $> X$ dans Y_I et soit ℓ tel que $Y_I[\ell] = y$.
- On remplace y par la valeur de X dans la case ℓ de Y_I : $Y_I[\ell] = X$.
- On affecte la valeur y à X : $X = y$.
- On passe à la ligne suivante : $I = I + 1$.

Si $I \leqslant k$, on crée une nouvelle case à droite de Y_I et on y met la valeur X.
Si $I = k + 1$, on crée une $k + 1$ ème ligne avec une unique case et on y met la valeur de X.

Pour illustrer ce processus d'insertion, on décrit les différentes étapes de l'insertion de la valeur 3 dans le Γ-tableau $Y = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 4 & 6 \\ \cline{1-2}\end{array}$:

$$Y = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 4 & 6 \\ \cline{1-2}\end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 6 \\ \cline{1-2}\end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1}\end{array} = Y^{\leftarrow 3}$$

On remarque que le processus d'insertion d'une valeur dans un Γ-tableau Y aboutit à la création d'une case dans le Γ-diagramme associé à Y : soit tout à droite d'une ligne de Y, soit par ajout d'une ligne supplémentaire.

9. Soit un Γ-tableau Y et un entier naturel x qui n'est pas dans une case de Y. Justifier que $Y^{\leftarrow x}$ est un Γ-tableau.

On utilise ce processus d'insertion pour associer à une permutation σ dans $\mathcal{S}_n$ deux Γ-tableaux G_σ et D_σ associés à une même partition ; ces deux Γ-tableaux sont obtenus comme la dernière étape du processus itératif ci-dessous qui construit à chaque étape deux Γ-tableaux associés à une même partition :

Initialement, le Γ-tableau G_1 possède une unique case qui contient $\sigma(1)$ et le tableau D_1 contient une unique case qui contient 1.

Pour un entier r dans $[\![2, n]\!]$, supposons construits G_{r-1}, D_{r-1} deux Γ-tableaux associés à une même partition, G_{r-1} contenant les entiers $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(r-1)$, et D_{r-1} contenant les entiers $1, \ldots, r-1$. On pose alors $G_r = G_{r-1}^{\leftarrow \sigma(r)}$, c'est-à-dire qu'on construit G_r en insérant dans G_{r-1} la valeur $\sigma(r)$. On a créé par cette insertion une case supplémentaire dans le Γ-diagramme associé à G_{r-1} et à D_{r-1}. On obtient D_r en ajoutant cette case à D_{r-1} remplie de la valeur r.. On pose alors $G_\sigma = G_n$ et $D_\sigma = D_n$.

On peut remarquer que la numérotation des cases de D_σ correspond à leur ordre de création dans la construction de G_σ.

Pour illustrer ce mode de construction, on explicite les étapes permettant de construire G_σ et D_σ lorsque $\sigma = (1, 2, 4)$:

$$\begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline\end{array} \to \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 4 \\ \hline\end{array} \to \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array} \to \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array} = G_\sigma$$

Et simultanément :

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline\end{array} \;\to\; \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline\end{array} \to \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \to \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array} \; = D_\sigma$$

Ainsi,

$$G_{(1,2,4)} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \text{et} \quad D_{(1,2,4)} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad ,$$

la case en haut à gauche a été construite en premier, puis a été créée celle immédiatement à sa droite, puis celle située en-dessous de la case en haut à gauche, etc.

10. Soit σ dans $\mathcal{S}_n$. Justifier que G_σ et D_σ sont des Γ-tableaux standards.

On se propose de démontrer que le couple (G_σ, D_σ) caractérise la permutation σ. Plus précisément, soit $\gamma : \mathcal{S}_n \to \mathcal{T}_n^{(2)}$ définie par $\gamma(\sigma) = (G_\sigma, D_\sigma)$ pour tout σ dans $\mathcal{S}_n$; on se propose de démontrer que γ est une bijection.

Soit $(G, D) \in \mathcal{T}_n^{(2)}$. Les Γ-tableaux (G, D) sont associés à un même Γ-diagramme ; on note ℓ le nombre de lignes de ce diagramme et on numérote les lignes de 1 à ℓ en commençant par le haut, on note m le nombre de cases de la première colonne et on numérote les colonnes de 1 à m en commençant par la gauche. Soient i le numéro de ligne et j le numéro de colonne où se trouve l'entier n dans D. On applique l'algorithme suivant pour déterminer un nombre qu'on notera $c(G, D)$:

> **Initialisation :** $I = i$, $X = G_i[j]$.
>
> **Tant que** $I > 1$: Soit y le plus grand élément $< X$ dans G_{I-1}.
> On affecte la valeur y à X : $X = y$.
> On passe à la ligne précédente : $I = I - 1$.

On note $c(G, D)$ la valeur de X en sortie.

11. Soit $(G, D) \in T_n^{(2)}$. Démontrer que, s'il existe σ dans $\mathcal{S}_n$ tel que $\gamma(\sigma) = (G, D)$, alors $\sigma(n) = c_{(G,D)}$.
12. Soit $(G, D) \in T_n^{(2)}$. Démontrer qu'il existe un et un seul σ dans $\mathcal{S}_n$ tel que $\gamma(\sigma) = (G, D)$.
13. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On désigne par $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des partitions de n. Démontrer

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{P}(n)} (\sharp \mathcal{T}_\lambda)^2 = n!$$

où, pour tout λ dans $\mathcal{P}(n)$, $\sharp \mathcal{T}_\lambda$ désigne le cardinal de $\mathcal{T}_\lambda$.

14. Soit $(G, D) \in \mathcal{T}_n^{(2)}$ et soit σ la permutation de $\mathcal{S}_n$ tellle que $\gamma(\sigma) = (G, D)$. Démontrer : $\gamma(\sigma^{-1}) = (D, G)$.
15. En déduire que le cardinal de $\mathcal{T}_n$ est

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{2^k\, k!\, (n-2k)!}$$

où $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ désigne la partie entière de $n/2$.

Problème 2 : Analyse et Probabilités

Partie A

Soit E l'espace vectoriel réel des fonctions bornées de classe C^∞ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Pour f dans E, on note $\mathcal{L}_f$ la fonction donnée, pour x réel, par $\mathcal{L}_f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$.

1. Pour x, A et a réels, on note $J_a^A(x) = \dfrac{1}{2A}\displaystyle\int_{-A}^{A} \mathrm{e}^{-iat}\mathrm{e}^{ixt}\mathrm{d}t$. Calculer $\lim_{A\to+\infty} J_a^A(x)$.
2. Soit f dans E.
   (a) Démontrer que la fonction $\mathcal{L}_f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Donner une condition simple pour que $\mathcal{L}_f$ soit définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (c) La fonction $\mathcal{L}_f$ est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$?
   (d) Donner une condition simple pour que $\mathcal{L}_f$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ou plus généralement qu'il y soit de classe $\mathcal{C}^n$, pour n dans $\mathbb{N}^*$.

   Dans la suite du problème, on note f la fonction telle que, pour t dans $\mathbb{R}_+^*$, $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ et $f(0) = 1$.
3. Démontrer que f appartient à E.
4. Calculer $\mathcal{L}_f$ sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $\mathcal{L}_f$ admet-elle une limite en 0 ?
5. On définit, pour t dans $\mathbb{R}_+^*$, $g(t) = \frac{1-\cos(t)}{t^2}$ et $g(0) = \frac{1}{2}$. On admet que g appartient à E.
   (a) Démontrer $\mathcal{L}_f(0) = \mathcal{L}_g(0)$.
   (b) Calculer $\mathcal{L}_g''$.
   (c) En déduire $\mathcal{L}_g'$.
   (d) À l'aide d'un développement asymptotique de $y\ln\left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right)$ au voisinage de $+\infty$, en déduire $\mathcal{L}_g$.
   (e) Conclure cette étude en donnant, pour α réel, la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\alpha t)}{t}\mathrm{d}t$.
6. Pour x, A, a et b réels, avec $a < b$, on note $K_{a,b}^A(x) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{e}^{-iat} - \mathrm{e}^{-ibt}}{t}\mathrm{e}^{ixt}\mathrm{d}t$.
   (a) Démontrer que la fonction $K_{a,b}^A$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est à valeurs réelles.
   (b) En utilisant la question précédente calculer, pour x réel, $\lim_{A\to+\infty} K_{a,b}^A(x)$.
   (c) Démontrer qu'il existe M dans $\mathbb{R}_+$ tel que, pour tous A et x réels, on ait $|K_{a,b}^A(x)| \leqslant M$. La constante M peut-elle être choisie indépendamment de a et b ?

Partie B

Soit a et b deux réels avec $a < b$. On reprend, pour A dans $\mathbb{R}_+$ les notations $K_{a,b}^A$ et J_a^A de la partie A. Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. On note, pour t réel

$$\phi_\mu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{ixt}\mathrm{d}\mu(x) \; .$$

On note L^1 l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ intégrables au sens de Lebesgue.

1. Démontrer $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2A}\int_{-A}^{A} \mathrm{e}^{-iat}\phi_\mu(t)\mathrm{d}t = \mu(\{a\})$.

2. Démontrer $\lim_{A\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} K_{a,b}^A(t)\mathrm{d}\mu(t) = \mu(]a,b[) + \frac{1}{2}\mu(\{a\}) + \frac{1}{2}\mu(\{b\})$.
3. On suppose dans cette question ϕ_μ dans L^1. Démontrer $\mu(\{a\}) = 0$.
4. On suppose dans cette question ϕ_μ dans L^1 et qu'on dispose d'une fonction f_μ dans L^1, à valeurs positives, telle que, pour tout segment réel I on ait

$$\mu(I) = \int_I f_\mu(x)\mathrm{d}x\ .$$

   (a) Démontrer $\mu([a,b]) = \int_a^b \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ixt}\phi_\mu(t)\mathrm{d}t)\right)\mathrm{d}x$.
   (b) En déduire une expression de f_μ en fonction de ϕ_μ.

Partie C

Soit m un entier supérieur à 2 et $\mathcal{A}$ l'algèbre $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. Pour M dans $\mathcal{A}$ on note $M^* = \overline{M}^T$, i.e. la matrice dont les coefficients sont les conjugués complexes de ceux de sa transposée. Un élément M de $\mathcal{A}$ est dit normal si $MM^* = M^*M$ et il est dit auto-adjoint si $M^* = M$.

Dans toute cette partie, on fixe une forme linéaire η sur $\mathcal{A}$ telle que $\eta(I_n) = 1$.

Pour M normal dans $\mathcal{A}$, on dit que M suit la loi μ si μ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{C}$ telle que, pour tous entiers naturels k, ℓ :

$$\eta(M^k(M^*)^\ell) = \int_{\mathbb{C}} z^k\overline{z}^\ell\mathrm{d}\mu(z)\ .$$

1. Soit M dans $\mathcal{A}$ auto-adjoint suivant la loi μ. Calculer $\int_{\mathbb{C}} |z-\overline{z}|^2\mathrm{d}\mu(z)$ et en déduire que μ est à support inclus dans $\mathbb{R}$.
2. Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{C}$ à support compact vérifiant $\mu(\mathbb{R}) > 0$. On pose, pour z complexe,

$$G_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\mu(t)}{z-t} \quad \text{et} \quad M_\mu(z) = \frac{1}{z}G_\mu(1/z)\ .$$

   (a) Démontrer que G_μ est bien défini pour tout z dans le complémentaire du support de μ.
   (b) Démontrer que M_μ est développable en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence non nul.
   (c) Démontrer qu'il existe une fonction C_μ, dont on précisera la régularité, vérifiant $C_\mu(zM_\mu(z)) = M_\mu(z)$ pour tout z dans un voisinage de l'origine.
   (d) On admet qu'il existe une et une seule fonction R_μ analytique au voisinage de zéro telle que $M_\mu\left(\frac{z}{zR_\mu(z)+1}\right) = C_\mu(z)$ au voisinage de l'origine. Donner une équation fonctionnelle vérifiée par R_μ qui ne dépende que de G_μ.
3. Si M est un élément normal dans $\mathcal{A}$ suivant une loi μ à support compact, on note $R_M = R_\mu$. Calculer alors, pour λ dans $\mathbb{C}$, $R_{\lambda M}$.
   Dans toute la suite, on note σ la mesure de probabilité à support dans le segment réel $[-2,2]$ dont la densité est donnée par $\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-t^2}$. On admettra que R_σ est l'identité dans un voisinage de l'origine.
4. Soit $(M_j)_{j\geqslant 1}$ une suite d'éléments normaux dans $\mathcal{A}$ suivant tous la même loi μ à support compact. On suppose les éléments libres au sens suivant : pour toute partie finie $\{j_1,\ldots,j_k\}$ de $\mathbb{N}^*$ on a $R_{M_{j_1}+\cdots+M_{k_k}} = R_{M_{j_1}} + \cdots + R_{M_{j_k}}$. On suppose enfin $\eta(M_1) = 0$ et $\eta(M_1^2) = 1$. On pose $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(M_1 + \ldots + M_n)$. Démontrer que R_{S_n} converge simplement vers R_σ partout où ces quantités sont définies.
5. Que se passe-t-il si on ne suppose plus $\eta(M_1) = 0$ et $\eta(M_1^2) = 1$ dans la question précédente, mais uniquement la condition $\eta(M_1^2) - \eta(M_1)^2$ non nul ?
6. À quel théorème classique de théorie des probabilités ce résultat peut-il être relié ?