Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents, sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. Il est possible d'utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

L'épreuve comporte deux parties :

— Une première partie, composée d'**exercices**. Les candidats sont invités à consacrer au moins un tiers du temps de l'épreuve de cette partie en cherchant à traiter les cinq exercices numérotés 1, 2, 3, 4 et 5.

— Un problème à traiter **au choix** parmi deux proposés : le Problème 1, plutôt orienté « Algèbre et Géométrie » ou bien le Problème 2, plutôt orienté « Analyse et Probabilités ». **Le candidat devra indiquer clairement sur sa copie le problème qu'il choisit. Seul ce choix sera pris en compte dans l'évaluation.** Au moins la moitié du temps de l'épreuve devrait être consacrée à l'un de ces problèmes.

Le barème tient compte de cette répartition indicative du temps à accorder à chaque partie.

Notations, vocabulaire et rappels

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réel et $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes.

Pour tout entier naturel n, on désigne par $[\![1;n]\!]$ l'ensemble des entiers compris au sens large entre 1 et n.

Si $\mathbb{K}$ est un corps et n un entier naturel non nul, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées d'ordre n sur $\mathbb{K}$. On note 0_n et I_n ses éléments neutres pour l'addition et la multiplication respectivement. On rappelle que le *spectre* d'une matrice est l'ensemble de ses valeurs propres.

Dans tout le sujet, le polynôme caractéristique d'une matrice M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est défini comme le déterminant de la matrice $XI_n - M$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}[X])$.

Pour tout réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

Soit d dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, a dans $\mathbb{R}^d$ et r un réel strictement positif. On désigne par $B(a,r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r pour la norme euclidienne $||\cdot||_2$ usuelle. $\overline{B(a,r)}$ désigne la boule fermée de centre a et de rayon r pour cette même norme. Ainsi,

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid ||x-a||_2 < r\} \quad \text{et} \quad \overline{B(a,r)} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid ||x-a||_2 \leq r\},$$

où pour tout $(x_1, \dots, x_d)$ dans $\mathbb{R}^d$,

$$||x||_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{d} x_k^2}.$$

Pour tout n dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, on appelle racine n-ième de l'unité tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$. Une racine n-ième de l'unité z est dite primitive si elle engendre le groupe $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité, c'est-à-dire si $\mathbb{U}_n$ est égal à l'ensemble $\{z^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ des puissances de z.

Exercices Préliminaires

Exercice 1

Pour tout n dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad u_n = H_n - \ln(n).$$

1. Démontrer que $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.
2. Justifier que la série de terme général $\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge.
3. Justifier que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et en déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$.
4. Donner un équivalent simple de la suite de terme général $\displaystyle\ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Pour tout n dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note A_n l'ensemble des entiers i dans $[\![1;n]\!]$ tels que le reste de la division euclidienne de n par i est supérieur ou égal à $i/2$.

5. Démontrer que pour tout n dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\displaystyle\mathrm{card}(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor 2\left(\frac{n}{i} - \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor\right) \right\rfloor$.
6. Démontrer que
$$\int_0^1 \left\lfloor 2\left(\frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor\right) \right\rfloor \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{k+1} \right).$$
7. Déterminer un équivalent simple de la suite de terme général $\mathrm{card}(A_n)$.

Exercice 2

Dans tout cet exercice, on fixe un entier n dans $\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Pour tout polynôme $Q = X^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ dans $\mathbb{C}[X]$, on définit la matrice $C(Q)$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ en posant :

$$C(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. Quel est le polynôme caractéristique de $C(Q)$?

2. Déterminer, pour tout k dans $[\![0; n-1]\!]$, la première colonne de $C(Q)^k$. En déduire le polynôme minimal de $C(Q)$.

Soit P dans $\mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire de degré n. On note $x_1, \dots, x_n$ ses racines complexes comptées avec ordre de multiplicité. On suppose que pour tout j dans $[\![1; n]\!]$, $0 < |x_j| \leq 1$. On pose, pour tout k dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$P_k = \prod_{j=1}^{n} \left(X - x_j^k\right).$$

3. Démontrer que pour tout j dans $[\![1; n]\!]$, $|x_j| = 1$.
4. On pose $A = C(P)$. Soit k dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. En considérant la matrice A^k, démontrer que P_k est à coefficients entiers.
5. Démontrer que l'ensemble $\{P_k \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ est fini.
6. Soit j dans $[\![1; n]\!]$. Démontrer que l'ensemble $\{x_j^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ est fini.
7. En déduire que $x_1, \dots, x_n$ sont des racines de l'unité.

Exercice 3

Soit d dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, f une fonction continue de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On suppose dans cette question que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence ℓ et que, de plus, cette valeur d'adhérence est unique. On suppose par l'absurde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers ℓ.
   Démontrer qu'il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que l'ensemble $f(\overline{B(\ell, \epsilon)}) \setminus B(\ell, \epsilon)$ contienne une infinité de termes de la suite, puis conclure.
2. On suppose maintenant que $d = 1$. Ainsi, f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs réelles. On suppose de plus que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence et que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   a) Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un intervalle I.

   b) Démontrer que pour tout x dans I, $f(x) = x$.

   c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 4

On rappelle que la loi d'une variable aléatoire réelle X est entièrement déterminée par la fonction caractérique de X définie pour tout t réel par : $\phi_X(t) = E(e^{itX})$.
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes. On note enfin $\phi = \phi_{X+Y}$.

1. Soit s et t deux réels. En calculant $\phi_{X+Y}(s)\phi_{X-Y}(t)$ de deux manières différentes, démontrer que
$$\phi_X(s+t)\phi_Y(s-t) = \phi_X(s)\phi_X(t)\phi_Y(s)\phi_Y(-t).$$
2. En déduire que pour tous réels s et t, $\phi(s+t)\phi(s-t) = \phi(s)^2 |\phi(t)|^2$.

3. Démontrer que ϕ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

On admet alors l'existence de deux fonctions r et θ continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout t dans $\mathbb{R}$, $\phi(t) = \exp(r(t) + i\theta(t))$, et $\theta(0) = 0$.

4. Démontrer que pour tout t dans $\mathbb{R}$ et pour tout n dans $\mathbb{Z}$, $r(nt) = n^2 r(t)$ et $\theta(nt) = n\theta(t)$.
5. En déduire qu'il existe m dans $\mathbb{R}$ et σ dans $\mathbb{R}_+$ tels que pour tout t dans $\mathbb{R}$,
$$\phi(t) = \exp\left(imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$
6. Démontrer enfin que, si X et Y ne sont pas constantes presque sûrement, alors elles suivent une loi normale.
Indication : On pourra utiliser sans démonstration le fait qu'une variable aléatoire Z suivant une loi normale d'espérance m et d'écart-type $\sigma > 0$ a une fonction caractéristique donnée par :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi_Z(t) = \exp\left(imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

Exercice 5

Soit n dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et λ dans $\mathbb{C}$ tels que A et λA sont semblables.

1. On suppose dans cette question que A est inversible. Démontrer que $\lambda^n = 1$.
2. On suppose dans cette question que λ est une racine primitive n-ième de l'unité. Démontrer que A est nilpotente ou diagonalisable.
3. Donner, pour chaque racine n-ième de l'unité λ qui n'est pas primitive, un exemple de matrice A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ inversible et non diagonalisable telle que A est semblable à λA.
L'entier n est fixé quelconque dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, on n'en prendra pas une valeur particulière.

Problème d'algèbre et géométrie

Notations, vocabulaire et rappels

Dans tout le problème, on fixe un entier naturel n non nul. On note $\mathbb{K}$ un corps, E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, $\mathscr{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F, $\mathrm{End}(E)$ celui des endomorphismes de E et $E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$.

Pour v dans F et φ dans E^*, on note $v \otimes \varphi$ l'application de E dans F qui à x associe $\varphi(x)v$.

Lorsque E est muni d'une structure préhilbertienne réelle, on a en particulier $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on note $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ son produit scalaire. Pour v dans E, on note alors v^* l'élément de E^* qui à x dans E associe $v^*(x) = \langle v \,|\, x \rangle$. On note de plus $\mathscr{S}(E)$ l'espace des endomorphismes symétriques de E.

Lorsqu'on a $E = \mathbb{R}^n$, on le munit du produit scalaire canonique et on note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. De plus, on désigne par $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ les parties de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ formées des matrices positives et définies positives respectivement. On dit qu'un vecteur dans $\mathbb{R}^n$ est unitaire s'il est de norme égale à 1.

Pour M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note M^T sa transposée, $\det(M)$ son déterminant, $\mathrm{Tr}(M)$ sa trace, $\mathrm{rg}(M)$ son rang, $\mathrm{Sp}(M)$ son spectre et χ_M son polynôme caractéristique. On rappelle que χ_M est unitaire. Si M est inversible on note M^{-1} son inverse et M^{-T} la transposée de son inverse.

Pour toute matrice $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\vec{d}(M)$ le vecteur colonne $(a_{1,1}, \ldots, a_{n,n})^T$ et $\Delta(M)$ le produit $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$, et pour I une partie de $[\![1;n]\!]$, on dit que la matrice $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times I}$ est une sous-matrice principale de M.

Enfin on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Partie I

1. a) Soit v dans F et φ dans E^*. Quel est le rang de l'application $v \otimes \varphi$?
   b) Démontrer que $(\varphi, v) \mapsto v \otimes \varphi$ est une application bilinéaire de $E^* \times F$ dans $\mathscr{L}(E,F)$ et en préciser l'image.
   c) Pour (φ, v) dans $E^* \times F$, quels sont les antécédents de $v \otimes \varphi$ par l'application précédente ?
2. On suppose dans cette question E muni d'une structure préhilbertienne réelle.
   a) Soit v dans E et φ dans E^*. À quelle condition nécessaire et suffisante l'application $v \otimes \varphi$ est-elle symétrique ?
   b) Soit v et w dans E. À quelle condition nécessaire et suffisante l'application $v \otimes w^*$ est-elle symétrique ?
3. a) Soit u dans $\mathscr{L}(E,F)$. Démontrer que u est de rang r si et seulement s'il existe deux familles libres $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ et $(v_1, \ldots, v_r)$ dans E^* et F respectivement, telles que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} v_i \otimes \varphi_i$.
   b) On suppose E muni d'une structure préhilbertienne réelle et u dans $\mathscr{S}(E)$. Démontrer que u est de rang r si et seulement s'il existe une famille libre orthogonale $(v_1, \ldots, v_r)$ et des scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ tels que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \otimes v_i^*$.

Partie II

Soit A dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. On dit que A est tridiagonale si ses coefficients d'indices (i,j) avec $|i-j| > 1$ sont nuls.

4. On appelle matrice de type $\mathcal{H}$ une matrice de la forme H_V, avec V un vecteur colonne unitaire dans $\mathbb{R}^n$ et $H_V = I_n - 2VV^T$.
   a) Interpréter géométriquement les matrices de type $\mathcal{H}$ et préciser à quelle condition on a l'égalité $H_V e_1 = e_1$.
   b) Expliciter V tel que $H_V e_1 = e_1$ et la première colonne de $H_V^T A H_V$ ne comporte que des zéros à partir de la troisième ligne.
   c) En déduire qu'il existe un entier naturel m et des matrices $H_1, \ldots, H_m$ de type $\mathcal{H}$ telles que la matrice $H_m^T \cdots H_1^T A H_1 \cdots H_m$ soit tridiagonale à coefficients positifs.

On suppose dorénavant A tridiagonale à coefficients positifs. On note, pour i dans $[\![1;n]\!]$, $a_{i,i} = b_i$ et pour i dans $[\![1;n-1]\!]$, $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = c_i$. Pour k dans $[\![1;n]\!]$, on note A_k la sous-matrice principale $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$ et $P_k = \chi_{A_k}$. On suppose de plus que pour tout i dans $[\![1;n-1]\!]$, $c_i \neq 0$.

5. a) Établir une relation de récurrence d'ordre 2 vérifiée par la suite $(P_k)_{1 \leq k \leq n}$. Quelle valeur donner à P_0 pour qu'elle soit vérifiée à partir du rang 0 ?
   b) Soit k dans $[\![1;n-1]\!]$. Démontrer que si x est une racine du polynôme P_k, alors $P_{k-1}(x)P_{k+1}(x) < 0$.
   c) Pour k dans $[\![1;n]\!]$, démontrer que P_k est simplement scindé sur $\mathbb{R}$ et que, si $k < n$, il y a exactement une racine de P_k entre deux racines de P_{k+1}.

On note $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ les valeurs propres de A. Pour x réel et k dans $[\![0;n]\!]$, on note $s_k(x)$ le signe de $P_k(x)$ si ce dernier est non nul et celui de $P_{k-1}(x)$ sinon. On note $N(x)$ le nombre de changements de signes dans la suite $(s_0(x), s_1(x), \cdots, s_n(x))$.

6. Démontrer que $s_k(x)$ et $N(x)$ sont bien définis, et que le nombre de valeurs propres de A dans un intervalle $]a;b]$ est égal à $N(a) - N(b)$.

Partie III

Pour A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, avec $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, et B dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$, on définit la matrice $A \otimes B$ dans $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{C})$ par l'écriture par blocs

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,j}B & \cdots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}B & \cdots & a_{i,j}B & \cdots & a_{i,n}B \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \cdots & a_{n,j}B & \cdots & a_{n,n}B \end{pmatrix}.$$

7. a) Soit (A,B) et (A',B') dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathscr{M}_p(\mathbb{C})$. À quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité $A \otimes B = A' \otimes B'$?
   b) Soit $f_{A,B} : \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'application définie par $f_{A,B}(M) = AMB^T$. Démontrer que $A \otimes B$ est la matrice représentative de $f_{A,B}$ dans une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ que l'on précisera. En déduire la trace et le déterminant de $A \otimes B$. Quel est son spectre ?

8. À quelle condition nécessaire et suffisante $A \otimes B$ est inversible ? Quel est alors son inverse ?
9. À quelle condition nécessaire et suffisante $A \otimes B$ est diagonalisable ?
10. Démontrer $\exp(A) \otimes \exp(B) = \exp(A \otimes I_p + I_n \otimes B)$.

On définit maintenant le produit $\circ$ de deux matrices A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, avec $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, par $A \circ B = (a_{i,j} b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathbf{1}$ l'élément neutre pour ce produit, i.e. la matrice n'ayant que des 1 comme coefficients. Si A n'a aucun coefficient nul, son inverse pour le produit $\circ$ est la matrice B telle $A \circ B = \mathbf{1}$.

11. Soit A, D et P des matrices dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ avec P inversible et D diagonale, telles que $A = PDP^{-1}$. Démontrer $\vec{d}(A) = (P \circ P^{-T})\vec{d}(D)$.
12. Soit A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer $\operatorname{rg}(A \circ B) \leq \operatorname{rg}(A) \operatorname{rg}(B)$.
13. Soit A dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ à coefficients non nuls et B son inverse pour le produit $\circ$. Démontrer que B appartient à $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si A est de rang 1. *On pourra utiliser l'inégalité de* CAUCHY-SCHWARZ.
14. a) Démontrer que $A \circ B$ est une sous-matrice principale de $A \otimes B$.
    b) Démontrer que si A et B appartiennent à $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il en va de même pour $A \circ B$.
    c) Démontrer que si A et B appartiennent à $\mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$, il en va de même pour $A \circ B$.
    d) Soit A dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ tel que, pour tout B dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, on ait $A \circ B \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Démontrer $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Partie IV

Soit $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ des réels strictement positifs.

15. En utilisant un produit scalaire, démontrer $\left(\dfrac{1}{\lambda_i + \lambda_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
16. En déduire $\left(e^{1/(\lambda_i + \lambda_j)}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Partie V

Pour A dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on note $\kappa(A)$ le rapport entre sa plus grande valeur propre et sa plus petite valeur propre : $\kappa(A) = \dfrac{\max \operatorname{Sp}(A)}{\min \operatorname{Sp}(A)}$. Et si B est dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on écrit $A \geq B$ si $A - B$ appartient à $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Enfin on note $\Phi(A) = A \circ A^{-T}$ et Φ^m l'itérée m-ième de Φ, par exemple $\Phi^2(A) = \Phi(\Phi(A))$.

17. Démontrer $I_n \leq \Phi(A) \leq \frac{1}{2}(\kappa(A) + \kappa(A)^{-1}) I_n$.
18. En déduire $\kappa(\Phi(A)) \leq \frac{1}{2}(\kappa(A) + \kappa(A)^{-1})$.
19. En déduire que $\Phi^m(A)$ a une limite quand m tend vers l'infini et la préciser.

Partie VI

On suppose dans cette partie que $n \geq 2$. Soit M dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On la décompose par blocs sous la forme $M = \begin{pmatrix} d & V^T \\ V & N \end{pmatrix}$, avec d réel, V un vecteur colonne dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et N dans $\mathscr{S}_{n-1}(\mathbb{R})$.

On note $d(M) = d$, $N(M) = N$ et $\widetilde{M} = N - d^{-1}VV^T$. On dit que $\widetilde{M}$ est le complément de d dans M. Dans la suite, on ne précisera plus d.

20. Démontrer que $\widetilde{M}$ est bien définie et appartient à $\mathscr{S}_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$.

21. On pose $M_1 = M$, $d_1 = d(M)$ et, pour $2 \leq k \leq n$, $M_k = \widetilde{M_{k-1}}$ et $d_k = d(M_k)$. Démontrer $\det(M) = \prod_{k=1}^{n} d_k$.

22. a) Soit A et B dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Démontrer $\det(A \circ B) \geq d(A)d(B)\det(N(A) \circ \widetilde{B})$.
    Indication : on pourra calculer $\widetilde{A \circ B} - N(A) \circ \widetilde{B}$.

    b) En déduire $\det(A \circ B) \geq \Delta(A)\det(B)$.

    c) Soit A et B dans $\mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Démontrer $\det(A \circ B) \geq \det(A)\det(B)$.

Problème d'analyse et probabilités

Notations, vocabulaire et rappels

Dans tout ce problème, on fixe n un entier naturel non nul.

On pose $J_n = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

On dit qu'une matrice M dans $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est *symplectique* si $M^T J_n M = J_n$, où M^T désigne la transposée de la matrice M.

Dans tout le problème, on notera $x_1, \ldots, x_n$ les composantes d'un vecteur x dans $\mathbb{R}^n$.

Soit f une application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans lui-même, admettant des dérivées partielles selon chacune de ses variables en un point $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. En notant

$$f : (x,\xi) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x,\xi) \\ \vdots \\ f_{2n}(x,\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\ldots,x_n,\xi_1,\ldots,\xi_n) \\ \vdots \\ f_{2n}(x_1,\ldots,x_n,\xi_1,\ldots,\xi_n) \end{pmatrix},$$

sa matrice jacobienne au point (x, ξ) est donnée par :

$$J_f(x,\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x,\xi) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x,\xi) & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}(x,\xi) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_n}(x,\xi) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_{2n}}{\partial x_1}(x,\xi) & \cdots & \frac{\partial f_{2n}}{\partial x_n}(x,\xi) & \frac{\partial f_{2n}}{\partial \xi_1}(x,\xi) & \cdots & \frac{\partial f_{2n}}{\partial \xi_n}(x,\xi) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

Soit f un difféomorphisme d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans un ouvert V de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire une bijection de U dans V, différentiable sur U et de réciproque différentiable sur V. On dit que f est un *symplectomorphisme* si pour tout $(x, \xi) \in U$, la matrice jacobienne $J_f(x, \xi)$ est une matrice symplectique.

Soit H dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On note ∇H le gradient de H défini par : $\nabla H = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial x_n} \\ \frac{\partial H}{\partial \xi_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial H}{\partial \xi_n} \end{pmatrix}$.

Soit H dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et (x, ξ) dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On désigne par $t \mapsto \Phi(t, x, \xi)$ la solution maximale de l'équation différentielle :

$$y'(t) = J_n \nabla H(y(t)) \quad \text{et} \quad y(0) = \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, en notant $I_{x,\xi}$ l'intervalle de définition de $t \mapsto \Phi(t, x, \xi)$, on a l'égalité suivante :

$$\forall t \in I_{x,\xi}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,x,\xi) = J_n \nabla H\left(\Phi(t,x,\xi)\right) \quad \text{et} \quad \Phi(0,x,\xi) = \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}.$$

On dit que $\Phi : (t,x,\xi) \mapsto \Phi(t,x,\xi)$ est le *flot engendré* par H. On admet que son domaine de définition $\displaystyle\bigcup_{(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} I_{x,\xi} \times \{x\} \times \{\xi\}$ est ouvert et que le flot Φ y est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Pour toutes fonctions F, G dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on définit le crochet de F et G par :

$$\{F, G\} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial G}{\partial \xi_k} - \frac{\partial G}{\partial x_k} \frac{\partial F}{\partial \xi_k} \right).$$

On peut remarquer que $\{F, G\} = (\nabla F)^T J_n \nabla G$.

On pose pour tout i dans $[\![1; n]\!]$ et pour tout (x,ξ) dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$p_i(x,\xi) = \frac{x_i^2 + \xi_i^2}{2} \quad \text{et} \quad p = (p_1, \ldots, p_n) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Pour tout $k = (k_1, \ldots, k_n)$ dans $\mathbb{N}^n$ et x dans $\mathbb{R}^n$, on note :

$$|k| = k_1 + \cdots + k_n \quad \text{et} \quad x^k = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}.$$

On note $||\cdot||$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire que pour tout (x,ξ) dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$||(x,\xi)|| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_i^2 + \xi_i^2)} = \sqrt{2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i(x,\xi)}.$$

On note également $||\cdot||$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Enfin, on admet le théorème suivant :

Théorème 1. *Pour toute famille $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^n}$ de réels, il existe une fonction h dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que pour tout $k = (k_1, \ldots, k_n)$ dans $\mathbb{N}^n$,*

$$\frac{\partial^{|k|} h}{\partial x^k}(0) = \frac{\partial^{k_1 + \cdots + k_n} h}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}(0, \ldots, 0) = a_k.$$

Partie I

Dans les questions qui suivent, on suppose que $n = 1$.

1. Soit V dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et x_0, y_0 deux réels. On considère la solution maximale x du problème de Cauchy dérivé du principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ x'(0) = y_0 \\ x''(t) = -V'(x(t)) \end{cases}.$$

   Démontrer que $t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$ est le flot engendré par une fonction H dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ que l'on précisera.

2. Dans cette question, on suppose que H est la fonction de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x,ξ) associe $\frac{x^2+\xi^2}{2}$. Démontrer que pour tout (x,ξ) dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $I_{x,\xi}=\mathbb{R}$ et déterminer le flot engendré par H.
3. On se place maintenant dans le cas particulier où il existe une fonction h dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que pour tout (x,ξ) dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $H(x,\xi)=h(x)$. Démontrer que pour tout (x,ξ) dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $I_{x,\xi}=\mathbb{R}$ et déterminer le flot engendré par H.
4. Soit x et a des applications dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :
$$\forall t\in\mathbb{R},\quad x'(t)\leq a(t)x(t).$$
Démontrer que pour tout t dans $\mathbb{R}_+$,
$$x(t)\leq x(0)\exp\left(\int_0^x a(t)\mathrm{d}t\right).$$

Soit C et y_0 des réels strictement positifs, et r un réel strictement supérieur à 1. Soit y la solution maximale de l'équation $y'=Cy^r$ vérifiant $y(0)=y_0$ et I son intervalle de définition.

5. Démontrer que y ne s'annule pas sur I.
6. Donner une expression de la fonction y et vérifier que
$$\sup I=\frac{1}{C(r-1)y_0^{r-1}}.$$
7. Soit M un réel strictement positif et inférieur ou égal à $\sup I$. Soit x une fonction positive définie sur $[0,M[$ telle que pour tout t dans $[0,M[$, $x'(t)\leq Cx^r(t)$. On suppose que $0\leq x(0)<y_0$.
   a) On considère $A=\{t\in[0,M[;\ x(t)>y(t)\}$. Si A est non vide, on note m sa borne inférieure. Démontrer que pour tout t dans $[0,m]$, $x(t)<y(t)$.
   b) En déduire que pour tout t dans $[0,M[$, $x(t)\leq y(t)$.

Partie II

8. Démontrer que la composée de deux symplectomorphismes est encore un symplectomorphisme.
9. Soit $f=(f_1,\dots,f_{2n})$ une application différentiable de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, et H dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Donner une expression des dérivées partielles de $H\circ f$ en fonction de celles de H et de $f_1,\dots,f_{2n}$. En déduire que :
$$\forall(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\quad \nabla(H\circ f)(x,\xi)=J_f(x,\xi)^T\nabla H(f(x,\xi)).$$
10. Soit M dans $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ une matrice symplectique. Démontrer que M est inversible et que $M^{-1}J_n=J_nM^T$.
11. Soit H dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ et Φ le flot engendré par H. Soit f un symplectomorphisme de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Soit $(x,\xi)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. On définit pour tout t dans $I_{f(x,\xi)}$,
$$\Psi(t,x,\xi)=f^{-1}\left(\Phi(t,f(x,\xi))\right).$$
Démontrer que Ψ est le flot engendré par $H\circ f$.

Ainsi, pour connaître le flot engendré par H, il suffit de connaître le flot engendré par $H \circ f$, où f est un symplectomorphisme bien choisi.

12. On suppose dans cette question que $n = 1$ et qu'il existe une fonction h dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout (x, ξ) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $H(x, \xi) = h \circ p(x, \xi) = h\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$.
    a) Soit (r_0, θ_0) dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Démontrer que $f : (r, \theta) \mapsto \left(\sqrt{2r}\cos\theta, \sqrt{2r}\sin\theta\right)$ est un symplectomorphisme d'un voisinage de (r_0, θ_0) dans un voisinage de $f(r_0, \theta_0)$.
    b) Calculer $H \circ f$. Qu'en déduire sur flot engendré par H au voisinage de $f(r_0, \theta_0)$?

Partie III

Soit V dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ une fonction admettant un minimum local E non-dégénéré en 0, c'est-à-dire que sa matrice hessienne en 0 est définie positive. Dans toute la suite, on suppose que pour tout (x, ξ) dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$H(x, \xi) = \frac{1}{2}||\xi||^2 + V(x) = \frac{1}{2}\left(\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2\right) + V(x_1, \ldots, x_n).$$

13. Démontrer qu'il existe une matrice orthogonale Q et des réels $\theta_1, \ldots, \theta_n$ strictement positifs tels qu'au voisinage de 0 :

$$V(Qx) = E + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \theta_k^2 x_k^2 + O(||x||^3).$$

On suppose dans toute la suite que V est paire par rapport à chacune de ses variables, c'est-à-dire que :

$$\forall(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{-1, 1\}^n, \quad V(\epsilon_1 x_1, \ldots, \epsilon_n x_n) = V(x_1, \ldots, x_n).$$

On pose enfin, pour tout p dans $\mathbb{R}^n$, $H_1(p) = E + \sum_{j=1}^{n} \theta_j p_j$.

14. Démontrer que pour toute matrice inversible M dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $(x, \xi) \mapsto (Mx, (M^T)^{-1}\xi)$ est un symplectomorphisme.
15. En déduire l'existence d'un symplectomorphisme ϕ_1 tel qu'au voisinage de $(0, 0)$:

$$H \circ \phi_1(x, \xi) = H_1 \circ p(x, \xi) + W(x),$$

où W est une fonction paire par rapport à chacune de ses coordonnées vérifiant de plus $W(x) = O(||x||^4)$ au voisinage de 0.

Partie IV

Dans cette partie, on considère $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ une fonction polynomiale homogène de degré $d \geq 3$. On note Φ le flot engendré par F.

16. Soit G dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Démontrer que tout (x, ξ) dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et pour tout t dans $I_{x,\xi}$,

$$\frac{\partial(G \circ \Phi)}{\partial t}(t, x, \xi) = \{G, F\} \circ \Phi(t, x, \xi).$$

17. Montrer que pour tout k dans $[\![1;n]\!]$, $\{p_k, F\}$ est une fonction polynomiale homogène de degré d.
18. Soit (x,ξ) dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Pour tout t dans $I_{x,\xi}$, on pose

$$f(t) = ||\Phi(t,x,\xi)||^2 = 2\sum_{k=1}^{n} p_k \circ \Phi(t,x,\xi).$$

   a) Démontrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que pour tout t dans $I_{x,\xi}$,

$$f'(t) \leq Cf(t)^{d/2}.$$

   b) En utilisant les résultats des questions 6 et 7, justifier l'existence d'un voisinage U de $(0,0)$ tel que pour tout (x,ξ) dans U, $t \mapsto \Phi(t,x,\xi)$ est définie sur $[0;1]$.
   c) Démontrer qu'au voisinage de $(0,0)$, $||\Phi(1,x,\xi)|| = O(||(x,\xi)||)$.
   d) Démontrer que pour tout t dans $[0;1]$, l'application $(x,\xi) \mapsto \Phi(t,x,\xi)$ est un symplectomorphisme de U dans son image.

Dans toute la suite, on note τ_F le symplectomorphisme $(x,\xi) \mapsto \Phi(1,x,\xi)$ défini sur un voisinage de $(0,0)$.

19. Soit G dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On définit $\mathrm{ad}_F = \{\cdot, F\}$. Démontrer que pour (x,ξ) au voisinage de $(0,0)$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$G \circ \tau_F(x,\xi) = \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!}\mathrm{ad}_F^j(G)(x,\xi) + \frac{1}{N!}\int_0^1 (1-t)^N \mathrm{ad}_F^{N+1}(G) \circ \Phi(t,x,\xi)\mathrm{d}t.$$

Partie V

— On pose pour tout j dans $[\![1;n]\!]$, $z_j(x,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j + i\xi_j)$.

— On note également $z = (z_1, \dots, z_n) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^n$ et $\overline{z} = (\overline{z_1}, \dots, \overline{z_n})$.

— Pour toute fonction F dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, on définit $2n$ nouvelles opérations : pour tout j dans $[\![1;n]\!]$,

$$\frac{\partial F}{\partial z_j} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial F}{\partial x_j} - \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{\partial F}{\partial \xi_j} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{i}{\sqrt{2}}\frac{\partial F}{\partial \xi_j}.$$

— On vérifie alors que :

$$\{F,G\} = -i\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial z_j}\frac{\partial G}{\partial \overline{z}_j} - \frac{\partial F}{\partial \overline{z}_j}\frac{\partial G}{\partial z_j}\right).$$

— Enfin, notons que toute fonction polynomiale F homogène de degré d en (x,ξ) peut également s'écrire :

$$F = \sum_{\substack{(k,\ell)\in\mathbb{N}^n\times\mathbb{N}^n \\ |k|+|\ell|=d}} a_{k,\ell} z^k \overline{z}^\ell,$$

où $(a_{k,\ell})_{\substack{(k,\ell)\in\mathbb{N}^n\times\mathbb{N}^n \\ |k|+|\ell|=d}}$ est une famille de nombres complexes. On appelle coefficients diagonaux de F les $a_{k,k}$, où $k \in \mathbb{N}^n$ et $2|k| = d$.

20. Soit m dans $\mathbb{N}^n$ et F la fonction de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui à (x,ξ) associe $x^{2m} = x_1^{2m_1} \dots x_n^{2m_n}$. Déterminer les coefficients diagonaux de F.
21. On reprend les notations de la partie III, où H_1 a été défini. Justifier l'égalité

$$\{H_1 \circ p, z^k \overline{z}^\ell\} = i \left(\sum_{j=1}^n \theta_j (k_j - \ell_j) \right) z^k \overline{z}^\ell.$$

On suppose dans toute la suite que $\theta_1, \dots, \theta_n$ sont rationnellement indépendants, c'est-à-dire que pour tout $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$,

$$\sum_{i=1}^n k_i \theta_i = 0 \Rightarrow k_1 = \dots = k_n = 0.$$

22. En déduire le lemme suivant :

Lemme 1. *Soit N dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $R_N \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ une fonction polynomiale de degré $2N+2$. Il existe un unique couple de fonctions (F_N, H_{N+1}) tels que :*

1. *$\{H_1 \circ p, F_N\} = H_{N+1} \circ p - R_N$.*
2. *F_N est polynomiale homogène en $2n$ variables de degré $2N+2$ sans termes diagonaux.*
3. *H_{N+1} est polynomiale homogène en n variables de degré $N+1$.*

Partie VI

On reprend les notations de la partie III, où ϕ_1, H_1 et W ont été définis.
On note, pour tout entier $N \geq 1$, W_N la somme des termes homogènes de degré $2N$ dans le développement de Taylor de W. On pose pour tout (x,ξ) dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $R_1(x,\xi) = W_2(x)$ et $S_1(x,\xi) = W(x) - W_2(x)$. Ainsi, on a :

$$H \circ \phi_1 = H_1 \circ p + R_1 + S_1.$$

23. Soit F une fonction polynomiale homogène en $2n$ variables de degré 4. Démontrer qu'au voisinage de $(0,0)$

$$H \circ \phi_1 \circ \tau_F(x,\xi) = \left(H_1 \circ p + R_1 + S_1 + \{H_1 \circ p, F\} + \{R_1, F\} + \frac{1}{2}\{\{H_1 \circ p, F\}, F\} \right)(x,\xi) + O(||(x,\xi)||^8).$$

24. En déduire l'existence de fonctions polynomiales en $2n$ variables F_1, R_2, d'une fonction polynomiale en n variables H_2 et d'une fonction S_2 dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telles que :

$$H \circ \phi_1 \circ \tau_{F_1} = H_1 \circ p + H_2 \circ p + R_2 + S_2,$$

où F_1, R_2, H_2 sont de degrés 4, 6 et 2 respectivement et $S_2(x,\xi) = O(||(x,\xi)||^8)$. Justifier que W_2 est entièrement déterminée par H_2.

25. Démontrer le théorème suivant :

Théorème 2. *Il existe h dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tel que pour tout entier k, il existe un symplectomorphisme τ d'un voisinage de $(0,0)$ dans un autre voisinage de $(0,0)$ tel que :*

$$H \circ \tau(x,\xi) = h \circ p(x,\xi) + O(||(x,\xi)||^k).$$

où, au voisinage de 0 : $h(p) = H_1(p) + O(||p||^2)$ De plus, le développement de Taylor de W au rang $2N$ est entièrement déterminé par celui de h au rang N.