Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents, sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. Il est possible d'utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

L'épreuve comporte deux parties :

— Une première partie, composée d'**exercices**. Les candidats sont invités à consacrer au moins un tiers du temps de l'épreuve à cette partie en cherchant à traiter les cinq exercices numérotés 1, 2, 3, 4 et 5.

— Un problème à traiter **au choix** parmi deux proposés : le Problème 1, plutôt orienté « Algèbre et Géométrie » ou bien le Problème 2, plutôt orienté « Analyse et Probabilités ». **Le candidat devra indiquer clairement sur sa copie le problème qu'il choisit. Seul ce choix sera pris en compte dans l'évaluation.** Au moins la moitié du temps de l'épreuve devrait être consacrée à l'un de ces problèmes.

Le barème tient compte de cette répartition indicative du temps à accorder à chaque partie.

Notations, rappels et définitions

On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels, $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels $\geqslant 0$ et $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels > 0.

Pour tout entier naturel n, on désigne par $[\![1, n]\!]$ l'ensemble des entiers compris au sens large entre 1 et n. Lorsque $n = 0$, $[\![1, n]\!]$ est donc l'ensemble vide.

On note $|E|$ le cardinal d'un ensemble fini E.

Si $\mathbb{K}$ est un corps et n un entier naturel, on note $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices (n, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$, et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ le groupe de ses éléments inversibles. On note I_n la matrice identité dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

Dans un espace vectoriel E, si $e_1, \ldots, e_p$ sont des vecteurs de E, on note $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $e_1, \ldots, e_p$.

On rappelle que le *spectre* d'un endomorphisme u est l'ensemble des valeurs propres de u.

Exercice 1

On fixe dans l'exercice un entier $n \geqslant 2$, et on note $\omega = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{n}\right)$. On considère dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices : Δ, la matrice diagonale dont la diagonale est le vecteur $(1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-2}, \omega^{n-1})$, et Σ, la matrice dont les seuls coefficients non nuls sont les coefficients sous la diagonale et le coefficient $(1, n)$, tous égaux à 1. Ainsi :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega^{n-1} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et u, v deux endomorphismes de E tels que $u^n = v^n = \mathrm{id}_E$ et $u \circ v = \omega\,(v \circ u)$.
   (a) Justifier que u et v sont diagonalisables et que leurs valeurs propres sont des racines n-ièmes de l'unité.
   (b) Soit λ une valeur propre de u. Montrer que $\omega\lambda$ est aussi une valeur propre de u.
   (c) Déduire de ce qui précède que le spectre de u est l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Quelles sont les dimensions des sous-espaces propres associés ?
   (d) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E sur laquelle la matrice de u est Δ et la matrice de v est Σ.
2. (a) Montrer que $\mathrm{Vect}(I_n, \Delta, \Delta^2, \ldots, \Delta^{n-1})$ est l'ensemble des matrices diagonales appartenant à $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
   (b) En déduire que la famille $\mathscr{F} = (\Sigma^j\,\Delta^k)_{(j,k)\in[\![0,n-1]\!]^2}$ est une base de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Soit $\varphi : \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ un morphisme d'algèbres.
   (a) En considérant les endomorphismes u et v associés respectivement à $\varphi(\Delta)$ et $\varphi(\Sigma)$ dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$, montrer qu'il existe P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que
   $$\varphi(\Delta) = P\Delta P^{-1} \qquad \text{et} \qquad \varphi(\Sigma) = P\Sigma P^{-1}.$$
   (b) Montrer que, pour toute matrice M dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on a : $\varphi(M) = PMP^{-1}$.

Exercice 2

1. On considère la fonction $\varphi : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$, définie sur $\mathbb{R}^2$, et
   $$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \varphi(x,t)\,\mathrm{d}t.$$
   (a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Admet-elle une limite en $+\infty$?
   (b) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, et qu'elle est solution de l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{x}$ sur cet intervalle.

2. On considère la fonction $\psi : (x,t) \mapsto \dfrac{1-\cos(t)}{(x+t)^2}$, définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, et

$$g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \psi(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

   (a) Montrer que g est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Admet-elle une limite en $+\infty$?

   (b) Montrer que g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$, et qu'elle est solution de l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{x}$ sur cet intervalle.

3. (a) Montrer que, pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie et vaut $g(x)$.

   (b) Déduire de ce qui précède la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.
   Justifier que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence ℓ, alors elle converge vers ℓ.
2. Soit $V \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non vide et borné vérifiant la propriété : $\forall x \in V, 3x+2 \in V$.
   Montrer que V est un singleton, que l'on précisera.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que la suite $(u_{n^2} - 3u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.

Exercice 4

Dans tout l'exercice, $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$. Toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Si une variable aléatoire U à valeurs dans $\mathbb{Z}$ admet une espérance finie, on note $\mathbb{E}(U)$ son espérance.

On considère deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telles que :

- la loi du couple (X,Y) est *symétrique*, c'est-à-dire que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2, P\big((X,Y)=(x,y)\big) = P\big((X,Y)=(-x,-y)\big) \ ;$$

- la variable aléatoire X^2+Y^2 possède une espérance finie. On note $\alpha = \mathbb{E}(X^2+Y^2)$.

1. (a) Montrer que les lois de X et Y sont symétriques, c'est-à-dire que

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ P(X=x) = P(X=-x) \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{Z},\ P(Y=y) = P(Y=-y).$$

   (b) Montrer que $|X|$ et $|Y|$, respectivement les valeurs absolues des variables aléatoires X et Y, possèdent une espérance finie. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

On considère $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((X_n, Y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$, toutes de même loi que le couple (X, Y).
On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}^2$ définie par

$$S_0 = (0,0) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i.$$

2. Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la loi de S_n est symétrique.
3. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que la variable aléatoire $\|S_n\|^2$ possède une espérance finie, et la déterminer.
   (b) En déduire : $P(\|S_n\|^2 \geqslant 2n\,\alpha) \leqslant \dfrac{1}{2}$.
4. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $B_n = \left\{x \in \mathbb{Z}^2 \,\middle|\, \|x\|^2 < 2n\,\alpha\right\}$.
   (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(S_{2n} = 0) = \displaystyle\sum_{x\in\mathbb{Z}^2} P(S_n = x)^2$.
   (b) En déduire, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(\|S_n\|^2 < 2n\,\alpha)^2 \leqslant |B_n|\ P(S_{2n} = 0).$$

5. (a) Montrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |B_n| \leqslant C\,n.$$

   (b) Déduire de ce qui précède la nature de la série $\displaystyle\sum_n P(S_n = 0)$.

Exercice 5

Pour tout ensemble E, on note E^E l'ensemble des applications de E dans E. On introduit :

$$I(E) = \left\{\sigma \in E^E \,\middle|\, \sigma\circ\sigma = \mathrm{id}_E\right\}.$$

Pour tout entier naturel n, on note t_n le cardinal $|I([\![1,n]\!])|$. En particulier, $t_0 = 1$.

Le but de cet exercice est de donner une majoration asymptotique de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_n \frac{t_n}{n!}z^n$, qui est un élément de $\mathbb{R}_+$ ou $+\infty$.

Soit Δ le disque ouvert de centre 0 et de rayon R dans $\mathbb{C}$. Si $R = +\infty$, on a $\Delta = \mathbb{C}$.

On considère la fonction $f : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n}{n!}z^n$, définie sur Δ.

1. Montrer : $R \geqslant 1$.
2. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ t_{n+2} = (n+1)\,t_n + t_{n+1}$.
3. Montrer : $\forall z \in \Delta,\ f'(z) = (1+z)\,f(z)$.
4. En déduire :

$$\forall z \in \Delta,\ f(z) = \exp\left(z + \frac{z^2}{2}\right),$$

   puis que $R = +\infty$.

5. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \rho \in \mathbb{R}_+^*,\ t_n = \frac{n!}{2\pi\,\rho^n} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\rho e^{i\theta} + \frac{\rho^2}{2} e^{i2\theta}\right) e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

6. Montrer qu'il existe une unique suite réelle $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes sont tous positifs et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \rho_n + \rho_n^2 = n.$$

Donner un développement asymptotique de la suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à la précision $o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

7. On définit, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, $M_n = \dfrac{n!}{\rho_n^n} \exp\left(\rho_n + \dfrac{\rho_n^2}{2}\right)$. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ t_n \leqslant M_n.$$

Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à la suite $\left(n^{n/2} \exp\left(-\dfrac{n}{2} + \sqrt{n} - \dfrac{1}{4}\right) \sqrt{2\pi n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Indication : *on pourra utiliser la formule de Stirling sans démonstration.*

Problème d'algèbre et géométrie

Notations, rappels et définitions

Dans tout le problème, n désigne un entier $\geqslant 1$ et $\mathbb{K}$ un corps.

On note $\mathbb{K}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on note $\mathscr{L}(E)$ la $\mathbb{K}$-algèbre des endomorphismes de E.

On identifie $\mathbb{K}^n$ avec l'espace $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ des matrices colonnes.

Une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *scalaire* si elle appartient à $\mathrm{Vect}(I_n)$.

Le polynôme caractéristique d'une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est noté χ_A et son polynôme minimal μ_A. Ce sont des polynômes unitaires, c'est-à-dire dont le coefficient dominant vaut 1.

Pour toute matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on note

$$\mathscr{O}(A) = \left\{ P^{-1}AP \,\middle|\, P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \right\}$$

la classe de similitude de A.

Pour tout $\beta \in \mathbb{K}^n$, on note

$$\mathrm{M}_n(\mathbb{K})[\beta] = \left\{ A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \,\middle|\, \chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - \beta_i) \right\}.$$

Étant donné une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et un couple d'entiers (i,j) dans $[\![1,n]\!]^2$, le coefficient de A à la croisée de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est noté $[A]_{i,j}$. On note

$$\begin{array}{rccl} \Delta : & \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K}^n \\ & A & \mapsto & ([A]_{1,1}, [A]_{2,2}, \dots, [A]_{n,n}) \end{array}$$

l'application linéaire envoyant une matrice sur le vecteur formé de ses coefficients diagonaux.

Dans le cas particulier $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est muni de son produit scalaire hermitien canonique $(v,w) \mapsto \langle v|w \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \overline{v}_i \, w_i$.

Pour toute matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, on note A^T sa transposée, $\overline{A}$ la matrice obtenue en conjuguant tous les coefficients de A, et $A^* = \overline{A}^T$.

On note Her_n (respectivement, Sym_n) le $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ constitué des matrices hermitiennes (respectivement, symétriques réelles), et

$$\mathrm{Her}_n[\beta] = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})[\beta] \cap \mathrm{Her}_n \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Sym}_n[\beta] = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})[\beta] \cap \mathrm{Sym}_n.$$

Le groupe symétrique $\mathfrak{S}(n)$ est défini comme le groupe des bijections de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ dans lui-même.

Étant donné un vecteur $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^n$, il existe un unique vecteur noté $\breve{\alpha} = \begin{pmatrix} \breve{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \breve{\alpha}_n \end{pmatrix}$ tel que

- $\breve{\alpha}$ est un réarrangement de α, c'est-à-dire
$$\exists \sigma \in \mathfrak{S}(n) \text{ tel que } \forall i \in [\![1, n]\!], \breve{\alpha}_i = \alpha_{\sigma(i)} \ ;$$
- $\breve{\alpha}$ est décroissant, c'est-à-dire $\breve{\alpha}_1 \geqslant \breve{\alpha}_2 \geqslant \cdots \geqslant \breve{\alpha}_n$.

Ce vecteur est appelé *réarrangement décroissant* de α.
Par exemple, le réarrangement décroissant du vecteur $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 7 & 1 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T$ est $\breve{\alpha} = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 & 7 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$.

Partie I

1. Soit $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ des éléments de $\mathbb{K}$. On définit l'élément suivant de $\mathbb{K}[X]$:
$$P = X^n - b_{n-1}X^{n-1} - \cdots - b_1 X - b_0.$$
On note E_P la $\mathbb{K}$-algèbre quotient $\mathbb{K}[X]/(P)$ et $\pi : \mathbb{K}[X] \to E_P$ la surjection canonique, qui est une application $\mathbb{K}$-linéaire.
   (a) Soit $R \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mul}_R : \mathbb{K}[X] & \to & E_P \\ Q & \mapsto & \pi(RQ) \end{array}$$
permet de définir par passage au quotient un endomorphisme de E_P, noté mul_R.
   (b) Montrer que $\mathscr{B} = \big(\pi(1), \pi(X), \ldots, \pi(X^{n-1})\big)$ est une $\mathbb{K}$-base de E_P, et donner la matrice $C(P)$ de mul_X dans cette base.
   (c) Montrer que $R \mapsto \mathrm{mul}_R$ définit un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres $\varphi : \mathbb{K}[X] \to \mathscr{L}(E_P)$ et déterminer le noyau de ce morphisme.
   (d) Déduire de ce qui précède que le polynôme minimal de $C(P)$ est P lui-même. En déduire le polynôme caractéristique de $C(P)$.
   (e) **Une application** : soit p un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p$ le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
   Montrer qu'il existe une matrice A dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{F}_p)$ non trigonalisable sur $\mathbb{F}_p$.
2. Soit A une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A est une matrice scalaire si et seulement si tout vecteur non nul de $\mathbb{K}^n$ est un vecteur propre de A.
3. (a) On suppose $n \geqslant 2$.
   Soit D une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et C une matrice non nulle de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une matrice L dans $\mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ telle que :
$$LC = 0 \text{ et } D + CL \notin \mathrm{Vect}(I_n).$$
   (b) Soit A une matrice non scalaire de $\mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ et a un élément de $\mathbb{K}$.
   Montrer qu'il existe des matrices B de $\mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, C de $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et D de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telles que A est semblable à la matrice par blocs
$$\left(\begin{array}{c|c} a & B \\ \hline C & D \end{array}\right).$$
   Si $n \geqslant 2$, montrer que l'on peut en outre supposer D non scalaire.
   Indication : *on pourra chercher à se ramener au cas particulier $a = 0$.*

4. (a) Soit A une matrice non scalaire de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer :

$$\left\{\Delta(M) \,\middle|\, M \in \mathscr{O}(A)\right\} = \{\alpha \in \mathbb{K}^n \,|\, \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \operatorname{tr} A\}.$$

(b) Soit β un vecteur de $\mathbb{K}^n$. Montrer :

$$\left\{\Delta(M) \,\middle|\, M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})[\beta]\right\} = \{\alpha \in \mathbb{K}^n \,|\, \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \beta_1 + \cdots + \beta_n\}.$$

Partie II

On définit la relation de *domination* $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}^n$ en posant :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \preccurlyeq \beta \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \forall k \in [\![1, n-1]\!], \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \breve{\alpha}_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} \breve{\beta}_i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \breve{\alpha}_i = \sum_{i=1}^{n} \breve{\beta}_i. \end{cases}$$

Pour tout vecteur β de $\mathbb{R}^n$, on définit l'ensemble

$$\mathscr{R}(\beta) = \{\alpha \in \mathbb{R}^n \,|\, \alpha \preccurlyeq \beta\}.$$

On définit l'ensemble

$$\Sigma_n = \left\{ A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, [A]_{i,j} \geqslant 0 \text{ et } \forall k \in [\![1,n]\!], \sum_{i=1}^{n} [A]_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} [A]_{k,j} = 1 \right\}.$$

5. La relation $\preccurlyeq$ est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$?
6. Soit A une matrice de Σ_n.
   (a) Montrer : $\forall k \in [\![1,n]\!], \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} [A]_{i,j} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=k+1}^{n} [A]_{i,j}$.
   (b) Montrer : $\forall \beta \in \mathbb{R}^n, A\beta \preccurlyeq \beta$.

   Indication : *on pourra commencer par traiter le cas où β et $A\beta$ sont décroissants.*
7. Soit β un vecteur de $\mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}^n$. Décrire $\mathrm{Her}_n[\beta]$.
8. Soit β un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et H une matrice de $\mathrm{Her}_n[\beta]$. Montrer : $\Delta(H) \preccurlyeq \beta$.
9. Dans cette question, on se limite au cas $n = 2$.
   Soit $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ tel que $\beta_1 \geqslant \beta_2$.
   (a) Montrer :

$$\mathscr{R}(\beta) = \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 - \delta \\ \beta_2 + \delta \end{pmatrix} \,\middle|\, \delta \in [0, \beta_1 - \beta_2] \right\}.$$

   Représenter graphiquement cet ensemble dans le cas $\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Montrer :

$$\{\Delta(S) \mid S \in \mathrm{Sym}_2[\beta]\} = \{\Delta(H) \mid H \in \mathrm{Her}_2[\beta]\} = \mathscr{R}(\beta).$$

10. Le but de cette question est de montrer que, pour tout vecteur β de $\mathbb{R}^n$:

$$\{\Delta(S) \mid S \in \mathrm{Sym}_n[\beta]\} = \{\Delta(H) \mid H \in \mathrm{Her}_n[\beta]\} = \mathscr{R}(\beta). \qquad (\mathscr{H}(n))$$

Le cas $n = 1$ étant trivial et le cas $n = 2$ ayant été traité à la question 9b, on procède par récurrence forte.
Soit n un entier $\geqslant 3$. On suppose $\mathscr{H}(1), \mathscr{H}(2), \ldots$ et $\mathscr{H}(n-1)$ et on veut montrer $\mathscr{H}(n)$.
Soit β un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Quitte à remplacer β par $\breve{\beta}$, on suppose β décroissant.
Soit α un vecteur de $\mathscr{R}(\beta)$. On définit

$$\delta = \min\left\{ \sum_{i=1}^{k} (\beta_i - \breve{\alpha}_i) \;\middle|\; k \in [\![1, n-1]\!] \right\} \quad \text{et} \quad \gamma = \begin{pmatrix} \breve{\alpha}_1 + \delta \\ \breve{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \breve{\alpha}_{n-1} \\ \breve{\alpha}_n - \delta \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer l'existence d'une matrice $\widetilde{S}$ de $\mathrm{Sym}_n[\beta]$ telle que $[\widetilde{S}]_{1,n} = 0$ et $\gamma = \Delta(\widetilde{S})$.

(b) Conclure la démonstration.

11. Soit β un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

(a) Montrer : $\mathscr{R}(\beta) = \{A\beta \mid A \in \Sigma_n\}$.

(b) Montrer que $\mathscr{R}(\beta)$ est un ensemble convexe et compact.

(c) i. Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer :

$$\forall \alpha, \beta \in I^n,\ \alpha \preccurlyeq \beta \ \Rightarrow\ \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\beta_i).$$

ii. Montrer :

$$\forall \alpha, \beta \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\ \alpha \preccurlyeq \beta \ \Rightarrow\ \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \geqslant \prod_{i=1}^{n} \beta_i.$$

Partie III

Étant donné une matrice H de Her_n, on note $\lambda_1(H), \lambda_2(H), \cdots, \lambda_n(H)$ les valeurs propres de H, répétées autant de fois que leur multiplicité, et rangées par ordre décroissant, c'est-à-dire telles que $\lambda_1(H) \geqslant \lambda_2(H) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(H)$.

12. En utilisant la question 8, montrer que pour tout entier k de $[\![1, n]\!]$:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i(H) = \max_{(v_1,\ldots,v_k)} \sum_{i=1}^{k} \langle v_i | H v_i \rangle = \max_{U^*U=I_k} \mathrm{tr}(U^* H U),$$

où le premier maximum porte sur les familles $(v_1, \ldots, v_k)$ orthonormées à k éléments de vecteurs de $\mathbb{C}^n$ et le deuxième porte sur l'ensemble $\{U \in \mathrm{M}_{n,k}(\mathbb{C}) \,|\, U^*U = I_k\}$.

13. Montrer :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \forall H_1, H_2 \in \mathrm{Her}_n,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(H_1 + H_2) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(H_1) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(H_2).$$

14. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \sigma : \mathrm{Her}_n & \to & \mathbb{R}^n \\ H & \mapsto & (\lambda_1(H), \ldots, \lambda_n(H)) \end{array}$$

est continue.

15. Dans cette question, soit $n_1, \ldots, n_r$ des entiers $\geqslant 1$ et $N = n_1 + \cdots + n_r$. Soit H une matrice dans Her_N décomposée en blocs :

$$H = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,r} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,r} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{r,1} & A_{r,2} & \cdots & A_{r,r} \end{array}\right),$$

où, pour tout (i, j) de $[\![1, r]\!]^2$, la matrice $A_{i,j}$ appartient à $\mathrm{M}_{n_i,n_j}(\mathbb{C})$.
On définit alors la matrice $H^\#$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, diagonale par blocs :

$$H^\# = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & A_{2,2} & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & A_{r,r} \end{array}\right).$$

   (a) Montrer : $\Delta(H) \preccurlyeq \sigma(H^\#) \preccurlyeq \sigma(H)$.

   (b) On suppose H définie positive. Montrer : $\text{dét}\, H \leqslant \text{dét}\, H^\# \leqslant \prod_{i=1}^{N} [H]_{i,i}$.

Partie IV

Dans cette partie, on considère le $\mathbb{R}$-espace de Hilbert

$$E = \ell^2(\mathbb{N}^*) = \left\{ (x(n))_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}^*} x(n)^2 \text{ converge} \right\},$$

muni du produit scalaire

$$\begin{array}{rccc} \langle\cdot|\cdot\rangle : & E^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x(n)\, y(n), \end{array}$$

et de la base hilbertienne $(e_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ définie par $e_i : n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n = i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

(On ne demande pas de vérifier ces faits.)

Étant donné un sous-espace vectoriel fermé V de E, on note p_V le projecteur orthogonal sur V.

Étant donné un endomorphisme p de E, on définit sa *diagonale*

$$\Delta(p) = (\langle e_i | p(e_i)\rangle)_{i\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}.$$

16. Soit V un sous-espace vectoriel fermé de E. Montrer que $\Delta(p_V)$ est une suite à valeurs dans $[0,1]$, et que la série $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}^*} \langle e_i|p_V(e_i)\rangle$ converge si et seulement si V est de dimension finie.
Calculer la somme $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}^*} \langle e_i|p_V(e_i)\rangle$ dans ce cas.

17. Soit s une suite à valeurs dans $[0,1]$, telle que la série $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}^*} s_i$ converge et dont la somme $d = \displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}^*} s_i$ est un entier $\geqslant 1$.
Le but de cette question est de montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel V de E de dimension finie tel que $\Delta(p_V) = s$.
    (a) Montrer le résultat dans le cas $d = 1$.
    (b) Montrer le résultat dans le cas où la suite s est à support fini.
    (c) Montrer le résultat dans le cas où la suite s est décroissante et s_1 appartient à $]0,1[$, puis dans le cas général.

Problème d'analyse et probabilités

Notations, rappels et définitions

- Pour tout entier $r \geqslant 1$, on note $\mathscr{D}^r$ le groupe des difféomorphismes de classe C^r de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même.
- On prolonge cette définition en notant $\mathscr{D}^0$ le groupe des homéomorphismes de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même.

Ainsi, pour tout entier naturel r, un élément de $\mathscr{D}^r$ est une application $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ de classe C^r, bijective, dont la réciproque est également de classe C^r.

Soit r un entier naturel et f un élément de $\mathscr{D}^r$.

- On note $\mathrm{Fix}(f) = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid f(x) = x\}$ l'ensemble des points fixes de f.
- Pour tout entier naturel s, on note $Z^s(f) = \{g \in \mathscr{D}^s \mid g \circ f = f \circ g\}$ son *centralisateur de classe C^s*.
- Pour tout entier relatif n, on note f^n son n-ième itéré, c'est-à-dire

$$f^n = \begin{cases} \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}} & \text{si } n > 0 \\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+} & \text{si } n = 0 \\ \underbrace{f^{-1} \circ f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1}}_{|n| \text{ fois}} & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

  On prendra garde à ne pas lire cette notation comme une puissance, et à ne pas la confondre avec la dérivée n-ième $f^{(n)}$.

Pour tout entier naturel r, un élément f de $\mathscr{D}^r$ est dit *faiblement contractant* si

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) < x.$$

Si S est un segment et $h : S \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, on définit

$$\|h\|_1^S = \int_S |h| \qquad \text{et} \qquad \|h\|_\infty^S = \max_S |h|\,.$$

Étant donné un segment S et une fonction continue $h : S \to \mathbb{R}$, si $S_0, S_1, \ldots, S_{k-1}$ sont des segments inclus dans S, et dont les intérieurs sont deux à deux disjoints, on a l'inégalité « de Chasles » :

$$\sum_{i=0}^{k-1} \|h\|_1^{S_i} \leqslant \|h\|_1^S.$$

On rappelle que si une somme porte sur l'ensemble vide (comme la somme précédente dans le cas $k = 0$), elle vaut 0.

Partie I.

1. Soit f un élément de $\mathscr{D}^0$.
   Montrer que f est une fonction strictement croissante et que 0 appartient à $\mathrm{Fix}(f)$.
2. Soit r un entier naturel et f un élément de $\mathscr{D}^r$. On suppose que 0 n'est pas un point isolé de $\mathrm{Fix}(f)$. Montrer :

$$\forall i \in [\![1, r]\!], f^{(i)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i > 1. \end{cases}$$

3. Pour tout réel $\lambda > 0$, on note

$$\begin{aligned} h_\lambda : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \lambda x, \end{aligned}$$

   qui est un élément de $\mathscr{D}^1$ (on ne demande pas de le montrer).
   Soit λ un élément de $]0, 1[$. Montrer $Z^1(h_\lambda) = \{h_\mu \mid \mu \in \mathbb{R}_+^*\}$.
4. (a) Soit f un élément de $\mathscr{D}^0$ tel que $\mathrm{Fix}(f) = \{0\}$.
   Montrer que soit f, soit f^{-1}, est faiblement contractant.
   (b) Soit f un élément de $\mathscr{D}^0$ faiblement contractant. Pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, montrer que la suite $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et que la suite $(f^{-n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
   En déduire que, quel que soit le réel $b > 0$, la famille $\big(]f^{n+1}(b), f^n(b)]\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une partition de $\mathbb{R}_+^*$.
5. Soit f un élément de $\mathscr{D}^0$ faiblement contractant.
   (a) Montrer que pour tout homéomorphisme croissant $h : [f(1), 1] \to [f(1), 1]$, il existe une unique application continue $h^\sharp : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ qui prolonge h (c'est-à-dire que pour tout x dans $[f(1), 1]$, $h^\sharp(x) = h(x)$) et telle que $h^\sharp \circ f = f \circ h^\sharp$.
   (b) On note Γ le groupe des homéomorphismes croissants du segment $[f(1), 1]$ dans lui-même (on ne demande pas de vérifier que $(\Gamma, \circ)$ est un groupe). Montrer que

$$\begin{aligned} \psi : \Gamma &\to Z^0(f) \\ h &\mapsto h^\sharp \end{aligned}$$

   est un morphisme de groupes injectif et non surjectif.

Partie II.

6. **Définition de l'opérateur $\mathscr{L}$.** Pour tout f élément de $\mathscr{D}^2$, on considère la fonction

$$\begin{aligned} \mathscr{L}f : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\ln f')'(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)}. \end{aligned}$$

   (a) Justifier que, pour tout f appartenant à $\mathscr{D}^2$, la fonction $\mathscr{L}f$ est bien définie.

On définit alors $\mathscr{L}$ en posant $\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}f$ pour tout f dans $\mathscr{D}^2$.

   (b) Soit u, v deux éléments de $\mathscr{D}^2$. Montrer :

$$\mathscr{L}(v \circ u) = (\mathscr{L}v \circ u) \times u' + \mathscr{L}u.$$

   (c) Soit f un élément de $\mathscr{D}^2$ et k un entier naturel. Montrer

$$\mathscr{L}(f^k) = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\mathscr{L}f \circ f^i\right) \times (f^i)'.$$

7. Dans cette question, on fixe f un élément de $\mathscr{D}^2$ faiblement contractant et on considère la fonction θ_f définie par :

$$\begin{aligned} \theta_f : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln\left(\frac{f^2(x)-f(x)}{f(x)-x}\right) - \ln\left(f'(x)\right). \end{aligned}$$

   (a) Montrer que θ_f se prolonge en une fonction continue $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ (que l'on continuera à noter θ_f) et qu'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \theta_f(x) = \ln\left(\int_0^1 f'\Big((1-s)x + sf(x)\Big)\, ds\right) - \ln\left(f'(x)\right).$$

   (b) Soit x un réel > 0 et S un segment contenant x et $f(x)$. Montrer, à l'aide du théorème des accroissements finis, l'inégalité :

$$|\theta_f(x)| \leqslant \|\mathscr{L}f\|_1^S.$$

   (c) Soit c un réel > 0 et k un entier naturel. Montrer :

$$\left\|\sum_{i=0}^{k-1} \theta_f \circ f^i\right\|_\infty^{[0,c]} \leqslant \|\mathscr{L}f\|_1^{[0,c]}.$$

Partie III.

Dans toute cette partie, on fixe un élément f de $\mathscr{D}^2$ faiblement contractant. L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant.

Théorème A. Soit g un élément de $Z^1(f)$ tel que $\mathrm{Fix}(g) \neq \{0\}$. Alors $g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}$.

Soit g un élément de $Z^1(f)$ tel que $\mathrm{Fix}(g) \neq \{0\}$. Soit b un point fixe de g tel que $b > 0$. On note $a = f(b)$.

8. Soit $h : [a,b] \to [a,b]$ un difféomorphisme croissant de classe C^1.
   On suppose qu'il existe un élément x_0 de $[a,b]$ tel que $h(x_0) \neq x_0$.

   (a) Soit c et d deux nombres réels tels que $a \leqslant c < d \leqslant b$. Pour toute application $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, on note $u_{|[c,d]}$ la restriction de u à l'intervalle $[c,d]$.
   Montrer qu'il existe deux nombres réels c et d tels que $a \leqslant c < d \leqslant b$, que le segment $[c,d]$ soit stable par h et que la suite des restrictions $\left(h^n_{|[c,d]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction discontinue $[c,d] \to \{c,d\}$ que l'on précisera.

   (b) En déduire que la suite de normes $\left(\|(h^n)'\|_\infty^{[a,b]}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

9. Montrer : $\forall x,y \in [a,b], \forall k \in \mathbb{N}$, $\left|\ln \dfrac{(f^k)'(y)}{(f^k)'(x)}\right| \leqslant \|\mathscr{L}f\|_1^{[0,b]}$, où $\mathscr{L}$ a été défini dans la partie II.

10. Soit γ un élément de $Z^1(f)$ tel que $\gamma(b) = b$. Montrer $\gamma'(0) = 1$, puis :

$$\forall x \in [a,b],\ |\gamma'(x)| \leqslant \|\mathscr{L}f\|_1^{[0,b]}.$$

   Indication : *on remarquera que tout élement γ de $Z^1(f)$ vérifie :* $\forall k \in \mathbb{N},\ \gamma = f^{-k} \circ \gamma \circ f^k$.

11. Conclure la démonstration du théorème A.

Partie IV.

Dans cette partie, on note $C^1(\mathbb{R}_+)$ l'ensemble des applications de classe C^1 de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On considère :

$$\mathscr{V} = \left\{X \in C^1(\mathbb{R}_+) \,\middle|\, X(0) = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+^*, X(x) < 0\right\}.$$

Un élément X de $\mathscr{V}$ sera dit *complet* si

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{X(u)} = -\infty.$$

On admettra le théorème suivant, variante du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème (admis). Soit X appartenant à $\mathscr{V}$, complet.
Alors il existe une unique famille $(f_t)_{t\in\mathbb{R}}$ d'éléments de $\mathscr{D}^1$ tels que :

- $f_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}$;
- pour tout réel $x \geqslant 0$, l'application $t \mapsto f_t(x)$ soit dérivable, de dérivée :

$$\frac{\partial f_t(x)}{\partial t} = X(f_t(x)).$$

La famille $(f_t)_{t\in\mathbb{R}}$ définie dans le théorème est appelée le *flot* de X.
Pour tout $\tau > 0$, on dira que le difféomorphisme f_τ et l'élément X de $\mathscr{V}$ sont *associés*.

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant, qui permettra de décrire entièrement le centralisateur $Z^1(f)$ d'un élément f de $\mathscr{D}^2$ faiblement contractant.

Théorème B. Soit f un élément de $\mathscr{D}^2$ faiblement contractant.
Alors il existe X appartenant à $\mathscr{V}$, complet et associé à f.

12. Soit X appartenant à $\mathscr{V}$, complet. On note $(f_t)_{t\in\mathbb{R}}$ le flot de X.
Montrer : $\forall t, s \in \mathbb{R}, f_{t+s} = f_t \circ f_s$.
13. **Définition de l'opérateur T_f.** Pour tout f appartenant à $\mathscr{D}^2$ et tout élément X de $\mathscr{V}$, on définit

$$\begin{array}{rccc} T_f(X) : & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{X(f(x))}{f'(x)}. \end{array}$$

   (a) Soit f un élément de $\mathscr{D}^2$. Montrer que T_f définit bien une application $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$.
   (b) Soit f, g appartenant à $\mathscr{D}^2$. Montrer que $T_g \circ T_f = T_{f\circ g}$.
   (c) Soit f un élément de $\mathscr{D}^2$ et X un élément de $\mathscr{V}$.
   Montrer que si X est complet, alors $T_f(X)$ l'est également.

14. Soit X un élément de $\mathscr{V}$. Pour tout f appartenant à $\mathscr{D}^2$, on considère la fonction

$$\tau_f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^{f(x)} \frac{\mathrm{d}u}{X(u)}. \end{array}$$

   (a) On suppose X complet, et on note $(f_t)_{t\in\mathbb{R}}$ son flot.
   Calculer, pour tout réel t, la fonction τ_{f_t}.

   (b) Soit f un élément de $\mathscr{D}^2$ faiblement contractant. On suppose que τ_f est une fonction constante. Montrer que X est complet et que f est associé à X.

   (c) Soit f un élément de $\mathscr{D}^2$ faiblement contractant et $X \in \mathscr{V}$. On suppose $T_f(X) = X$. Montrer que X est complet et associé à f.

15. Pour montrer le théorème B, on fixe une fois pour toutes un élément f de $\mathscr{D}^2$ faiblement contractant, et on cherche à construire un point fixe Y de l'opérateur T_f par un procédé itératif.
   On définit donc $X_0 = f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}$ (comme f est faiblement contractant, il s'agit bien d'un élément de $\mathscr{V}$, on ne demande pas de le vérifier) et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k = T_{f^k}(X)$.

   (a) Montrer que, pour tous entiers naturels k, ℓ tels que $k \leqslant \ell$, on a, sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\ln\left(\frac{X_\ell}{X_k}\right) = \sum_{i=k}^{\ell-1} \theta_f \circ f^i.$$

   (b) Soit $b > 0$ un réel. Montrer que la suite de fonctions

$$(\Theta_k)_{k\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{i=0}^{k-1} \theta_f \circ f^i\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

   converge uniformément sur $[0, b]$.

   (c) En déduire que la suite de fonctions $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tous les segments de $\mathbb{R}_+$ vers une certaine fonction Y, continue sur $\mathbb{R}_+$ et telle que :

$$Y(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, Y(x) < 0.$$

16. (a) Montrer que, pour tout entier naturel k, on a, sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$X_k' = X_0' \circ f^k - \sum_{i=0}^{k-1} \left(\mathscr{L}f \circ f^i\right) \times \left(f^{i+1} - f^i\right) \times \frac{X_k}{X_i},$$

   où $\mathscr{L}f$ a été défini dans la partie II.

   (b) Soit $b > 0$ un réel.
   Montrer que la suite de fonctions $(X_k')_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, b]$.

   (c) Conclure la démonstration du théorème B.

17. Soit f un élément de $\mathscr{D}^2$ faiblement contractant.
   Déduire de tout ce qui précède que $Z^1(f)$ est un groupe isomorphe à $\mathbb{R}$.