Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents, sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. Il est possible d'utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes, en veillant toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

L'épreuve comporte deux parties :

— Une première partie, composée d'**exercices**. Les candidats sont invités à consacrer au moins un tiers du temps de l'épreuve à cette partie en cherchant à traiter les quatre exercices numérotés 1, 2, 3, 4.

— Un problème à traiter **au choix** parmi deux proposés : le Problème 1, plutôt orienté « Analyse et Probabilités » ou bien le Problème 2, plutôt orienté « Mathématiques Générales ». **Le candidat devra indiquer clairement sur sa copie le problème qu'il choisit. Seul ce choix sera pris en compte dans l'évaluation.** Au moins la moitié du temps de l'épreuve devrait être consacré à l'un de ces problèmes.

Dans tout le sujet $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels strictement positifs.

Exercices

Exercice 1

Pour une suite de complexes $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on pose

$$A(a) = \left\{r \geqslant 0 \text{ tel que } (|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée}\right\},$$

$$B(a) = \left\{r \geqslant 0 \text{ tel que } \lim_{n\to+\infty} a_n r^n = 0\right\},$$

$$C(a) = \left\{r \geqslant 0 \text{ tel que } \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \text{ est convergente}\right\}.$$

1. Justifier les inclusions $C(a) \subset B(a) \subset A(a)$. Montrer que ces inclusions peuvent être strictes.
2. Montrer que, dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on a $\sup A(a) = \sup B(a) = \sup C(a)$.

   On rappelle que le *rayon de convergence* d'une série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ correspond à la borne supérieure de l'ensemble $A(a)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

3. Déterminer le rayon de convergence des séries entières

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+i}{n} z^{n^2} \text{ (avec } i^2 = -1\text{)}, \qquad \text{b) } \sum_{n=0}^{\infty} 2^{(-1)^n n} z^n, \qquad \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \cos(2^n) z^n.$$

4. On suppose que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a un rayon de convergence $R \in]0, +\infty[$. Montrer que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini.

5. Si la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de 2, que peut-on dire du rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$? Donner un tel exemple de série entière.

Exercice 2

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On désigne par $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à n ligne(s) et p colonne(s) à coefficients réels. On note $A^\intercal$ la transposée de la matrice A. Enfin, pour $M \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(M)$ désigne la trace de la matrice M.

1. Soit $(R,S) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{Tr}(RS) = \mathrm{Tr}(SR)$.

2. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ en posant

$$\forall (A,B) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2, \qquad \langle A \,|\, B \rangle = \mathrm{Tr}(A^\intercal B).$$

   On notera dans la suite $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire : $\|A\| = \sqrt{\langle A \,|\, A \rangle}$.

3. Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, montrer que $f_A : M \mapsto AM^\intercal A$ est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et qu'il est auto-adjoint.

   On pose

$$\mathcal{R}(f_A) = \{\langle f_A(M) \,|\, M \rangle,\ M \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ \|M\| = 1\}.$$

4. Justifier que $a = \inf \mathcal{R}(f_A)$ et $b = \sup \mathcal{R}(f_A)$ sont des éléments de $\mathbb{R}$. Montrer que a correspond à la plus petite valeur propre de f_A et que b correspond à la plus grande valeur propre de f_A.

5. Montrer que $\mathcal{R}(f_A) = [\inf \mathcal{R}(f_A), \sup \mathcal{R}(f_A)]$.

Exercice 3

Dans tout l'exercice X et Y désignent deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \times \mathbb{P}(Y = k)$.

   On suppose à partir de maintenant que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = k) = p \times (1-p)^k$. On considère la matrice aléatoire
   $$A = \begin{pmatrix} X & X+Y \\ 0 & Y \end{pmatrix}.$$

2. Calculer la probabilité que A ne soit pas inversible.
3. Préciser la loi de la variable aléatoire $\mathrm{rg}(A)$ (qui donne le rang de la matrice A) ainsi que son espérance.
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour qu'une matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.
5. Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

Exercice 4

On définit $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib\,;\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. On admet que c'est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

1. Montrer que $\mathcal{I} = \{(1 + 3i) \times z\,;\ z \in \mathbb{Z}[i]\}$ est un idéal de $\mathbb{Z}[i]$.

   On définit sur $\mathbb{Z}[i]$ la relation $\mathcal{R}$ par : $\forall (z, z') \in \mathbb{Z}[i]^2$, $z\mathcal{R}z'$ si $(z - z') \in \mathcal{I}$.

2. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}[i]$.

   Pour $z \in \mathbb{Z}[i]$ on va noter $C\ell(z)$ la classe de z pour la relation $\mathcal{R}$, et $\mathbb{Z}[i]/\mathcal{I}$ l'ensemble des classes d'équivalence de cette relation.

3. Montrer que l'on définit bien une addition sur $\mathbb{Z}[i]/\mathcal{I}$ en posant $C\ell(z + z') = C\ell(z) + C\ell(z')$, et une multiplication en posant $C\ell(z \times z') = C\ell(z) \times C\ell(z')$.

   On admet pour la suite que l'on a une structure d'anneau sur $\mathbb{Z}[i]/\mathcal{I}$.

4. Montrer que $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[i]/\mathcal{I}$. [*Indication : on pourra montrer que* $i\mathcal{R}3$.]
5. Résoudre l'équation $X^2 + 5 = 0$ d'inconnue X dans $\mathbb{Z}[i]/\mathcal{I}$.

Problème d'analyse et probabilités

Notations et motivation

Dans tout le problème, on utilisera les notations suivantes :

- $\mathbb{1}_B$ est la fonction caractéristique d'une partie B de $]0,+\infty[$,
- $L^1(]0,+\infty[)$ est l'ensemble des fonctions Lebesgue-intégrables sur $]0,+\infty[$,
- $L^1_{\text{loc}}(]0,+\infty[)$ est l'ensemble des fonctions localement Lebesgue-intégrables sur $]0,+\infty[$, c'est-à-dire intégrables sur tout compact de $]0,+\infty[$.

On s'intéresse au problème différentiel suivant

$$\varphi'(x) + a\varphi(x) = a\,b\,\varphi(bx), \qquad x > 0 \tag{1}$$

où a et b sont des constantes réelles, b étant strictement positif. On cherche des solutions satisfaisant à la condition suivante :

$$\varphi \in L^1(]0,+\infty[), \quad \int_{]0,+\infty[} \varphi = 1. \tag{2}$$

L'objectif de ce problème est de montrer le théorème suivant.

Théorème. *Si $a > 0$ et $b > 1$, il existe une et une seule solution φ au problème (1)-(2). Cette solution appartient à $C^\infty([0,+\infty[)$ et est à valeurs positives.*

Pour justifier à ce résultat, on étudiera au préalable la fonction Γ d'Euler, puis on définira et on analysera la transformée suivante, dite de Mellin : pour une fonction φ localement intégrable sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on pose

$$\check{\varphi} : z \in \mathbb{C} \mapsto \int_{]0,+\infty[} x^{z-1}\varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{M}$$

1 Premières propriétés de la solution

Dans cette section, on suppose qu'il existe φ solution du problème (1)-(2).

1. Justifier le fait que φ est une fonction continue sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que φ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que, nécessairement,

$$\lim_{x>0,x\to 0} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0. \tag{3}$$

4. En déduire que φ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$.

2 Études préliminaires

2.1 Prolongement de la fonction Γ d'Euler

Pour $x > 0$, on définit

$$\Gamma : x \longmapsto \int_{]0,+\infty[} t^{x-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t.$$

1. Vérifier que cette définition a bien un sens et que, pour tout $x > 0$, on a $\Gamma(x) \neq 0$.
2. Montrer que $\Gamma \in C^0(]0,+\infty[)$.
3. Démontrer que $\Gamma \in C^1(]0,+\infty[)$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\Gamma(n+1)$.
5. Justifier le fait que $z \mapsto \displaystyle\int_{[1,+\infty[} t^{z-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
6. Montrer que pour $0 < 2R < n$ et $|z| \leqslant R$, on a
$$\left| \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} \right| \leqslant \frac{1}{n!R}.$$
7. Montrer que $z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est une fonction méromorphe à pôles simples sur $\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$.
8. Soit $z \in \mathbb{C}$, tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$. Montrer que
$$\int_0^1 t^{z-1} e^{-t} \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}.$$
9. Montrer qu'il existe une fonction $\widetilde{\Gamma}$ holomorphe dans $\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$ qui coïncide avec Γ sur $]0,+\infty[$.

   Dans la suite, on persistera à noter Γ ce prolongement.

10. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$, $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$.
11. Soient $z \in \mathbb{C}$, tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$, et $s \in [0,+\infty[$. Montrer que
$$\frac{\Gamma(z)}{(1+s)^z} = \int_{]0,+\infty[} e^{-(1+s)u} u^{z-1} \,\mathrm{d}u.$$
12. Soient $z \in \mathbb{C}$, tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$, et $x \in]0, \mathrm{Re}(z)[$. Montrer que
$$\int_{]0,+\infty[} \frac{\Gamma(z)}{(1+s)^z} s^{x-1} \,\mathrm{d}s = \Gamma(x)\,\Gamma(z-x).$$
13. En déduire que Γ ne s'annule pas dans $\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$.

2.2 Propriétés de la transformée de Mellin

On s'intéresse ici à diverses propriétés remarquables de l'application définie par (**M**).

Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(]0,+\infty[)$*. On suppose qu'il existe* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tels que* $x \mapsto x^{\alpha-1}f(x) \in L^1(]0,1[)$ *et* $x \mapsto x^{\beta-1}f(x) \in L^1(]1,+\infty[)$*.*

1. Montrer que, pour tout $\alpha' > \alpha$, $x \mapsto x^{\alpha'-1}f(x) \in L^1(]0,1[)$.

   Dans la suite, on notera :

$$\alpha_* \stackrel{\text{def}}{=} \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \mapsto x^{\alpha-1}f(x) \in L^1(]0,1[)\right\},$$
$$\beta^* \stackrel{\text{def}}{=} \sup\left\{\beta \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \mapsto x^{\beta-1}f(x) \in L^1(]1,+\infty[)\right\}.$$

2. Que dire de

$$\lim_{\substack{\alpha \to \alpha_* \\ \alpha > \alpha_*}} (\widetilde{\mathbb{1}_{]0,1[}|f|})(\alpha) \ ?$$

   Donner un exemple de fonction pour lequel $\alpha_* = 1$ est atteint et un autre exemple pour lequel il ne l'est pas.

3. Montrer que si $\alpha_* < \beta^*$ alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(z) \in]\alpha_*, \beta^*[$, on a

$$x \mapsto |x^{z-1}f(x)| \in L^1(]0,+\infty[).$$

4. Quelles sont les bornes α_* et β^* de la fonction $\mathbb{1}_{]0,+\infty[}$?
5. Trouver une fonction strictement positive telle que $\alpha_* = -\infty$ et $\beta^* = +\infty$.
6. Montrer que $\breve{f}$ définit une fonction holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \text{Re}(z) \in]\alpha_*, \beta^*[\}$.
7. Soit $\mu \in]0,+\infty[$. On pose $f_\mu : x \mapsto f(\mu x)$. Montrer que

$$\forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \text{Re}(z) \in]\alpha_*, \beta^*[, \qquad \breve{f_\mu}(z) = \mu^{-z}\breve{f}(z). \tag{4}$$

   On suppose de plus que f *est dérivable sur* $]0,+\infty[$*, que* $g : x \mapsto xf'(x)$ *appartient à* $L^1(]0,+\infty[)$ *et qu'il existe* $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ *tels que pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *vérifiant* $\text{Re}(z) \in]\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}[$*, les fonctions* $x \mapsto x^{z-1}f(x)$ *et* $x \mapsto x^{z-1}g(x)$ *sont bornées et appartiennent à* $L^1(]0,+\infty[)$*.*

8. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(z) \in]\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}[$,

$$\breve{g}(z) = -z\breve{f}(z).$$

9. En déduire l'expression de $\breve{(f')}$ dans le cas où elle existe.
10. Soit $s > 1$. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite $Q_n(z) = \prod_{j=0}^{n}(1 - 1/s^{z+j})$ converge. On notera $Q(z)$ la limite.

11. Soient $x \in]0, +\infty[$ et $c \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} a^{-(c+it)} \Gamma(c+it) Q(c+it) x^{-(c+it)} \, \mathrm{d}t$$

existe et calculer sa valeur.

*Indication : On pourra utiliser, sans démonstration, la formule des partitions d'*EULER

$$\textit{pour tous } z \in \mathbb{C} \textit{ et } 0 \leqslant q < 1, \qquad \prod_{n=0}^{+\infty} (1 + zq^n) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{q^{n(n-1)/2}}{\prod_{j=1}^{n}(1-q^j)} z^n.$$

3 Résultat d'existence et d'unicité

Soit φ solution du problème (1)-(2), qui vérifie la condition (3).

1. Montrer que φ admet un maximum en un point $\bar{x} \in]0, +\infty[$, et que $\varphi(\bar{x}) > 0$.
2. En déduire qu'il ne peut pas exister de solution de (1)-(2)-(3) si $b < 1$.
3. Que se passe-t-il si $b = 1$?
4. En considérant la fonction
$$Z : x \mapsto \int_x^{+\infty} \varphi(y) \, \mathrm{d}y,$$
montrer que, nécessairement,
$$\varphi(x) > 0 \text{ si } x > 0. \tag{5}$$

   On suppose désormais que $b > 1$.

5. Montrer que, nécessairement, $a > 0$ pour qu'il existe une solution φ.

   On suppose désormais que $a > 0$.

6. Montrer que, sous les conditions (2)-(3)-(5), le problème (1) admet au plus une solution.

   On suppose qu'il existe φ, solution de (1)-(2)-(3)-(5), telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}(z) \in]\alpha_*, \beta^*[$*, avec $\alpha_* < \beta^* - 1$, les fonctions $x \mapsto x^{z-1}\varphi(x)$ et $x \mapsto x^{z-1}\varphi'(x)$ sont dans* $L^1(]0, +\infty[)$.

7. Montrer que
$$\begin{cases} \forall z \in \mathbb{C} \text{ tel que } \mathrm{Re}(z) \in]\alpha_*, \beta^*[, & -(z-1)\breve{\varphi}(z-1) + a\breve{\varphi}(z) = \dfrac{a}{b^{z-1}} \breve{\varphi}(z), \\ & \breve{\varphi}(1) = 1. \end{cases} \tag{6}$$

On va chercher une solution de (6) sous la forme $F = G\,F_h$ où F_h est solution du problème homogène :

$$-(z-1)F_h(z-1) + aF_h(z) = 0. \tag{7}$$

8. Montrer que F_h est proportionnelle à $\Upsilon : z \mapsto a^{-z}\Gamma(z)$.
9. Montrer que G est proportionnelle à
$$H : z \longmapsto \prod_{j=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{b^{z+j}}\right).$$
10. En déduire que F donnée par
$$F : z \longmapsto a^{-z}\,\Gamma(z) \prod_{j=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{b^{z+j}}\right)$$
est solution de (6).
11. Conclure.

Problème de mathématiques générales

Le but de ce problème est de montrer des propriétés fondamentales sur le spectre des matrices de Wigner, qui sont des matrices symétriques à coefficients aléatoires.

Pour A une matrice, on désignera par $A(i,j)$ le coefficient de A situé à la i-ième ligne et à la j-ième colonne.

1 Résultats préliminaires

1.1 Un résultat sur la trace

Soit A une matrice carrée réelle de taille $n \in \mathbb{N}^*$. Soit k un entier tel que $k \geqslant 2$.

1. Montrer que, pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}$,

$$(A^k)(i,j) = \sum_{1 \leqslant q_1,\dots,q_{k-1} \leqslant n} A(i,q_1)A(q_1,q_2)\dots A(q_{k-2},q_{k-1})A(q_{k-1},j).$$

2. En déduire que

$$\mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{1 \leqslant q_1,\dots,q_k \leqslant n} A(q_1,q_2)\dots A(q_{k-1},q_k)A(q_k,q_1).$$

1.2 Un résultat sur les matrices réelles symétriques

Soient A et B deux matrices réelles symétriques de taille $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables dans $\mathbb{R}$? Le cas échéant, on précisera comment exprimer les changements de base.
2. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a

$$\mathrm{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k.$$

On note $\lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_i \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres réelles ordonnées de A et $\nu_1 \leqslant \dots \leqslant \nu_i \leqslant \dots \leqslant \nu_n$ celles de B. On veut montrer l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \nu_i)^2 \leqslant \mathrm{Tr}\big((A-B)^2\big).$$

3. Montrer que l'on peut se ramener à deux matrices à valeurs propres positives. On fera désormais l'hypothèse que $\lambda_1 \geqslant 0$ et $\nu_1 \geqslant 0$.

4. Montrer que

$$\mathrm{Tr}(AB) \leqslant \max_{\mathcal{W}} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \nu_j w_{i,j} \right),$$

où $\mathcal{W}$ désigne l'ensemble des matrices $n \times n$ dont les coefficients $w_{i,j}$ vérifient

$$w_{i,j} \geqslant 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} w_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} w_{i,k} = 1 \qquad \text{pour tous } i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Indication : On diagonalisera A et B puis on calculera soigneusement la trace de AB.

5. On pose $\lambda_0 = \nu_0 = 0$ et $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nu_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \nu_j w_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} \sum_{j=l}^{n} (\delta_{i,j} - w_{i,j})(\lambda_k - \lambda_{k-1})(\nu_l - \nu_{l-1}).$$

En déduire que

$$\max_{\mathcal{W}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \nu_j w_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nu_i.$$

6. En conclure que

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \nu_i)^2 \leqslant \mathrm{Tr}\big((A-B)^2\big).$$

1.3 Etude de suites d'entiers

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on définit le n-ième nombre de Catalan *comme*

$$C_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Soit $q \in \mathbb{N}$. On dit qu'une suite d'entiers $(S_p)_{p\in\{0,\dots,q\}}$ est une marche de Bernoulli *si $S_0 = 0$ et $|S_{p+1} - S_p| = 1$ pour tout $p \in \{0, ..., q-1\}$. Ainsi, $(0, 1, 2, 1, 0, -1, 0, 1)$ est une marche de* Bernoulli.

Un chemin de Dyck *de taille $2q$ est une marche de* Bernoulli *à valeurs positives ou nulles se terminant par 0.*

1. Calculer le nombre de marches de Bernoulli de longueur $2q$ qui se terminent par 0.
2. La marche $(0, 1, 0, -1, 0)$ est-elle un chemin de Dyck ?

   On note β_q le nombre de chemins de Dyck *de longueur $2q$. On pose $\beta_0 = 1$.*

3. Calculer β_1 et β_2.
4. Montrer que le nombre de chemins qui ne sont pas de Dyck de longueur $2q$ qui partent et arrivent en 0 est égal au nombre de marches de Bernoulli de longueur $2q$ qui se terminent par 2.

5. En déduire que, pour tout $q \geqslant 0$, on a $\beta_q = C_q$.
6. Montrer que, pour tout $q \geqslant 1$, on a $\beta_q < 4^q$.
7. Montrer que, pour tout $x \in]-1/4, 1/4[$,

$$B(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{q=0}^{+\infty} \beta_q x^q = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}.$$

1.4 Mots

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, pour un entier $n \geqslant 1$, vu comme un alphabet. Une lettre *est simplement un élément de $\mathcal{E}$. On appelle* mot *toute suite finie $s_1 \ldots s_q$ de lettres pour un entier $q \geqslant 1$. Un mot est dit* fermé *si sa première et sa dernière lettres sont les mêmes. On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des mots sur $\mathcal{E}$. Deux mots m_1, m_2 sont dits* équivalents, *ce qui est noté $m_1 \sim m_2$, s'il existe une bijection de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ qui envoie l'un sur l'autre. Par exemple, les mots* 12321 *et* 42524 *sont équivalents alors que* 11456 *et* 12321 *ne le sont pas.*

Pour tout mot $m = s_1 \ldots s_q$, on définit

- *sa longueur $\ell(m) \stackrel{\text{def}}{=} q$,*
- *son support $\mathrm{supp}(m)$ comme le sous-ensemble constitué des éléments distincts de $\{s_1, \ldots, s_q\}$,*
- *et enfin son poids $p(m)$ comme le cardinal de $\mathrm{supp}(m)$.*

1. Montrer que $\sim$ définit bien une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}$.
2. Montrer que deux mots équivalents ont le même poids.

À un mot $m \in \mathcal{M}$, $m = s_1 \ldots s_q$, on associe le graphe G_m de sommets $S_m \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{supp}(m)$ et d'arêtes non orientées A_m. On appelle $A_m^b = \{(s,s); s \in S_m\} \cap A_m$ l'ensemble des boucles et $A_m^c = A_m \backslash A_m^b$ l'ensemble des arêtes non orientées de connexion, c'est-à-dire des arêtes reliant deux lettres distinctes. Pour $a \in A_m$, on note N_m^a le nombre de fois qu'une arête, quelle que soit sa direction, est présente dans le graphe. *On pourra consulter la figure 1 pour voir un exemple.*

3. Dessiner le graphe du mot 12134211521 sur l'alphabet $\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
4. Que dire des graphes de deux mots équivalents m et m' ? Des ensembles $\{N_m^a; a \in A_m\}$ et $\{N_{m'}^a; a \in A_{m'}\}$?
5. Soit m un mot fermé de longueur $q+1$ tel que, pour tout $a \in A_m$, $N_m^a = 2$. Montrer que $p(m) \leqslant q/2 + 1$.

Soit $\mathcal{M}_{q,p}$ un ensemble de représentants des classes d'équivalence des mots m de longueur $q+1$ et de poids p tels que $N_m^a \geqslant 2$ pour tout $a \in A_m$.

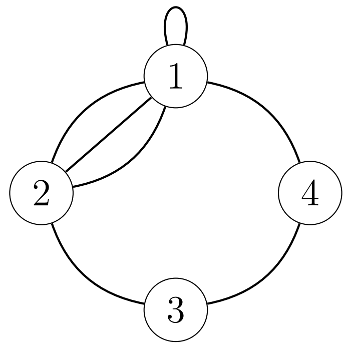

Figure 1 – Graphe du mot $m = 12114321$. $A_m = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,3),(3,4)\}$, $A_m^b = \{(1,1)\}$, $A_m^c = \{(1,2),(1,4),(2,3),(3,4)\}$, $N_m^{(1,2)} = 3$.

6. On suppose que n, le cardinal de $\mathcal{E}$, est inférieur à q. Montrer que le cardinal de $\mathcal{M}_{q,n}$ est borné par le nombre de mots fermés de longueur $q+1$ et en déduire une borne du cardinal de $\mathcal{M}_{q,n}$ ne dépendant que de q.

   Un mot fermé m de longueur $2q+1$ est dit de Wigner *si m est équivalent à un élément de $\mathcal{M}_{2q,q+1}$.*

7. Soit $m = s_1 \dots s_{2q+1}$ un élément de $\mathcal{M}_{2q,q+1}$. Montrer que le graphe G_m n'a pas de boucle, c'est-à-dire que A_m^b est vide.
8. Toujours avec $m = s_1 \dots s_{2q+1}$, élément de $\mathcal{M}_{2q,q+1}$, montrer qu'il existe un unique représentant de la classe de m de la forme $\tilde{m} = \tilde{s}_1 \dots \tilde{s}_{2q+1}$ avec $\tilde{s}_1 = 1$ et $|\tilde{s}_{k+1} - \tilde{s}_k| = 1$ pour tout $k \in \{1, \dots, 2q\}$.
9. En déduire que $\mathcal{M}_{2q,q+1}$ est en bijection avec l'ensemble des chemins de Dyck de taille $2q$ et que le cardinal de $\mathcal{M}_{2q,q+1}$ est égal à C_q, le q-ième nombre de Catalan.

2 Cadre probabiliste et étude des moments

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire réelle, de loi de probabilité μ. On rappelle que

$$\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = \int_\mathbb{R} x\mu(\mathrm{d}x)$$

où $\mathbb{E}(X)$ est l'espérance de X. Plus généralement, pour toute fonction f continue de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, on a

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_\mathbb{R} f(x)\mu(\mathrm{d}x)$$

quand $\int_\mathbb{R} |f(x)|\mu(\mathrm{d}x)$ est un réel.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit une famille de variables aléatoires $(Z_{i,j})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ réelles, indépendantes et identiquement distribuées, d'espérances nulles, et telles que $\mathbb{E}\left(Z_{1,1}^2\right) = 1$ et pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$r_k \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left(|Z_{1,1}|^k\right) \text{ est une valeur finie.} \tag{8}$$

On va s'intéresser à la matrice aléatoire symétrique

$$M_n(i,j) = M_n(j,i) = Z_{i,j}/\sqrt{n}$$

On note $\lambda_{n,1} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n,i} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n,n}$ les valeurs propres ordonnées de M_n. Ce sont des variables aléatoires également. On définit la distribution empirique aléatoire des valeurs propres comme étant la mesure de probabilité

$$L_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{\lambda_{n,i}}.$$

Soit f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$. On note

$$\langle L_n, f\rangle \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_{n,i})$$

et

$$\langle \sigma, f\rangle \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x)\sigma(x)\,\mathrm{d}x,$$

avec σ la densité

$$\sigma : x \mapsto \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\,\mathbb{1}_{|x|\leqslant 2}$$

où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de la partie A. Le théorème à démontrer est le suivant.

Théorème. *Pour toute fonction f continue bornée sur $\mathbb{R}$, et pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|\langle L_n, f\rangle - \langle \sigma, f\rangle| > \varepsilon\right) = 0.$$

On va utiliser le théorème de Weierstrass. *À cette fin, on va étudier les moments de L_n, c'est-à-dire*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \gamma_{n,k} \overset{\text{def}}{=} \langle L_n, P^k\rangle,$$

où $P^k : x \mapsto x^k$ est la fonction monomiale de degré k.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $\varepsilon, B > 0$. Montrer que

$$\varepsilon\, \mathbb{P}\left(\langle L_n, |P^k| \mathbb{1}_{|P^1|>B}\rangle > \varepsilon\right) \leqslant \mathbb{E}\left(\langle L_n, |P^k| \mathbb{1}_{|P^1|>B}\rangle\right),$$

puis que

$$B^k\, \mathbb{E}\left(\langle L_n, |P^k| \mathbb{1}_{|P^1|>B}\rangle\right) \leqslant \mathbb{E}\left(\langle L_n, P^{2k}\rangle\right).$$

L'idée est donc de faire intervenir Λ_n, l'espérance de L_n, définie par la relation suivante :

$$\textit{pour toute fonction } f \textit{ continue bornée sur } \mathbb{R},\ \langle \Lambda_n, f\rangle \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left(\langle L_n, f\rangle\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(f(\lambda_{n,i})\right),$$

et ses moments $\xi_{n,k} \overset{\text{def}}{=} \langle \Lambda_n, P^k\rangle$ où $k \in \mathbb{N}^*$. On va les comparer à ceux de σ, définis par $\xi_k \overset{\text{def}}{=} \langle \sigma, P^k\rangle$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\xi_{2k} = C_k$ et $\xi_{2k+1} = 0$.
3. Montrer que

$$\langle L_n, P^k\rangle = \frac{1}{n}\sum_{1 \leqslant q_1, \ldots, q_k \leqslant n} \pi_{(q_1,\ldots,q_k)}$$

où $\pi_{(q_1,\ldots,q_k)} \overset{\text{def}}{=} M_n(q_1,q_2)M_n(q_2,q_3)\ldots M_n(q_{k-1},q_k)M_n(q_k,q_1)$.

Pour tout $\boldsymbol{q} = (q_1, \ldots, q_k)$ k-uplet de $\{1, \ldots, n\}^k$, on définit $m_{\boldsymbol{q}} \overset{\text{def}}{=} q_1 \ldots q_k q_1$ le mot fermé de taille $k+1$ associé. On note $p_{\boldsymbol{q}} \overset{\text{def}}{=} p(m_{\boldsymbol{q}})$ le poids de $m_{\boldsymbol{q}}$.

4. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\pi_{\boldsymbol{q}}\right) = \frac{1}{n^{k/2}} \prod_{a \in A^c_{m_{\boldsymbol{q}}}} \mathbb{E}\left(Z_{1,2}^{N^a_{m_{\boldsymbol{q}}}}\right) \prod_{a' \in A^b_{m_{\boldsymbol{q}}}} \mathbb{E}\left(Z_{1,1}^{N^{a'}_{m_{\boldsymbol{q}}}}\right).$$

5. En déduire que $\mathbb{E}\left(\pi_{\boldsymbol{q}}\right) = 0$ s'il existe une arête parcourue une et une seule fois dans le graphe $G_{m_{\boldsymbol{q}}}$. On s'intéresse donc à tout k-uplet $\boldsymbol{q}$ de $\{1, \ldots, n\}^k$ tel que, pour tout $a \in A_{m_{\boldsymbol{q}}}$, $N^a_{m_{\boldsymbol{q}}} \geqslant 2$.
6. Montrer que $p_{\boldsymbol{q}} \leqslant 1 + k/2$.
7. Montrer que si $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{q'}$ éléments de $\{1, \ldots, n\}^k$ sont tels que $m_{\boldsymbol{q}} \sim m_{\boldsymbol{q'}}$ alors $\mathbb{E}\left(\pi_{\boldsymbol{q}}\right) = \mathbb{E}\left(\pi_{\boldsymbol{q'}}\right)$.
8. Justifier l'égalité suivante

$$\langle \Lambda_n, P^k\rangle = \sum_{p=1}^{1+\lfloor k/2\rfloor} \frac{1}{n^{1+k/2}} \frac{n!}{(n-p)!} \sum_{m \in \mathcal{M}_{k,p}} \prod_{a \in A^c_m} \mathbb{E}\left(Z_{1,2}^{N^a_m}\right) \prod_{a' \in A^b_m} \mathbb{E}\left(Z_{1,1}^{N^{a'}_m}\right).$$

9. Que vaut $\lim_{n\to\infty} \xi_{n,k}$ quand k est impair ?

   Indication : On pourra utiliser la formule de Stirling

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

   On s'intéresse désormais au cas $k = 2q$, pour $q \geqslant 1$.

10. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \xi_{n,2q} = \sum_{m\in\mathcal{M}_{2q,q+1}} \prod_{a\in A_m^c} \mathbb{E}\left(Z_{1,2}^{N_m^a}\right) \prod_{a'\in A_m^b} \mathbb{E}\left(Z_{1,1}^{N_m^{a'}}\right).$$

11. En conclure que $\lim_{n\to\infty} \xi_{n,2q} = C_q = \beta_q$, le nombre de chemins de Dyck de longueur $2q$.

   Il faut maintenant montrer que, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\mathbb{E}\left(\gamma_{n,k}^2\right) - \xi_{n,k}^2\right| = 0.$$

12. Soit un entier $k \geqslant 1$. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\gamma_{n,k}^2\right) - \xi_{n,k}^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{q'} k-\text{uplets de } \{1,\ldots,n\}} \Phi_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{q'}},$$

   où

$$\Phi_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{q'}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left(\pi_{\boldsymbol{q}}\pi_{\boldsymbol{q'}}\right) - \mathbb{E}\left(\pi_{\boldsymbol{q'}}\pi_{\boldsymbol{q}}\right).$$

13. Calculer

$$\mathbb{E}\left(\gamma_{n,k}^2\right) - \xi_{n,k}^2.$$

14. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|\gamma_{n,k} - \xi_{n,k}| > \varepsilon\right) = 0.$$

15. Conclure.

16. Montrer que, si on suppose seulement que r_2 est fini, alors la partie 1.2 permet de conclure également au théorème.