Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs et autres appareils électroniques, ainsi que les documents, sont interdits. La qualité de la rédaction sera un facteur important d'appréciation des copies. On invite donc le candidat à produire des raisonnements clairs, complets et concis. Le candidat peut utiliser les résultats énoncés dans les questions ou parties précédentes ; il veillera toutefois à préciser la référence du résultat utilisé.

L'épreuve comporte deux parties :

— Une première partie, composée d'**exercices**. Les candidats sont invités à consacrer au moins un tiers du temps à cette partie en cherchant à traiter les quatre exercices numérotés 1, 2, 3, 4 et, **au choix**, l'un des exercices 5 ou 6 (un seul de ces deux exercices sera corrigé).

— Un problème à traiter **au choix** parmi deux proposés : le Problème 1, plutôt orienté « Algèbre et Géométrie » ou bien le Problème 2, plutôt orienté « Analyse et Probabilités ». **Le candidat devra indiquer clairement sur sa copie le problème qu'il choisit. Seul ce choix sera pris en compte dans l'évaluation.** Au moins la moitié du temps devrait être consacré à l'un de ces problèmes.

Exercices

Exercice 1

On considère une matrice A de $E = M_n(\mathbf{R})$, et les applications de E dans E définies par $\phi_A(M) = AM$ et $\psi_A(M) = MA$. On note π_A le polynôme minimal de A.

1. Montrer que les applications ϕ_A et ψ_A sont des endomorphismes de E.
2. Soit P un élément de $\mathbf{R}[X]$, déterminer $P(\phi_A)$ et $P(\psi_A)$ en fonction de $P(A)$.
3. En déduire les polynômes minimaux de ϕ_A et ψ_A.
4. On suppose les matrices A et B diagonalisables, montrer que les applications ϕ_A, ψ_B et $\phi_A - \psi_B$ sont diagonalisables dans une base formée d'éléments de E de rang 1.

Exercice 2

1. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, et soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues de I dans $\mathbf{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f : I \to \mathbf{R}$. Montrer que f est continue sur I.
2. Donner un exemple d'intervalle I et de suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions continues sur I qui converge simplement vers une fonction f, avec f non-continue sur I.
3. Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, $g : I \to \mathbf{R}_+$ une fonction intégrable sur tout compact de I et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}^1(I, \mathbf{R})$ telle que $|f_n'(t)| \leq g(t)$ pour tout n et tout $t \in I$. On suppose de plus que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers une fonction f. Montrer que f est continue sur I.

Exercice 3

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes de loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, pour tout $a > 0$, on considère l'événement $A_{n,a} = \left\{\frac{X_n}{\ln n} \geq a\right\}$.

1. Pour $n \geq 2$, calculer $\mathbb{P}(A_{n,a})$ pour $a > 0$ quelconque.
2. Pour $a > 0$, on considère l'événement

$$A_a = \limsup_{n\to\infty} A_{n,a} = \bigcap_{n\geq 2} \bigcup_{k\geq n} A_{k,a}.$$

Montrer que $\mathbb{P}(A_a) = 0$ si $a > 1$ et que $\mathbb{P}(A_a) = 1$ si $0 < a \leq 1$.
3. Justifier que pour tout $a > 0$,

$$\left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} > a\right\} \subset A_a \subset \left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} \geq a\right\}.$$

4. En déduire que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} = 1 \quad \text{presque sûrement.}$$

Exercice 4

Soit (ABC) un triangle non aplati dont les longueurs des côtés BC, CA et AB sont notées respectivement a, b et c. À tout point M de l'espace affine engendré par A, B et C, correspond un unique triplet (α, β, γ) de réels vérifiant $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et tels que M soit le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients α, β et γ. Les coefficients α, β et γ sont appelés les coordonnées barycentriques normalisées de M dans le repère affine A, B, C.
On note I_A le point d'intersection de la bissectrice intérieure Δ_A de l'angle $\widehat{BAC}$ et de la droite (BC).

1. Montrer que la parallèle à (AC) passant par B coupe Δ_A en un point A_1.
2. On note I_AB la distance de I_A à B, exprimer $\frac{I_AB}{I_AC}$, et $\frac{A_1B}{AC}$ en fonction de a, b et c.
3. En déduire les coordonnées barycentriques normalisées de I_A.
4. En déduire une propriété remarquable du point I dont les coordonnées barycentriques normalisées dans le repère affine (A, B, C) sont $(\frac{a}{a+b+c}, \frac{b}{a+b+c}, \frac{c}{a+b+c})$.

Traiter AU CHOIX l'un des deux exercices suivants
(un seul de ces deux exercices sera corrigé ;
le candidat doit indiquer clairement son choix sur la copie)

Exercice 5

Soit G un groupe fini. On note ϕ l'application de G dans le groupe des permutations $\mathfrak{S}_G$ qui associe à g la permutation $\phi(g)(h) = gh$.

1. Calculer la signature de $\phi(g)$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $\phi(G)$ soit un sous-groupe du groupe alterné.
3. En déduire qu'un groupe G d'ordre pair strictement supérieur à 2, dont un 2-sous-groupe de Sylow est cyclique, n'est pas simple.

Exercice 6

Soit $n \geq 1$. Soit des nombres réels strictement positifs $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. On définit

$$f: \begin{array}{ccc} (\mathbf{R}_+)^n & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}. \end{array}$$

On note

$$C = \left\{ x = (x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n,\ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 1 \right\}.$$

1. Justifier qu'il existe $a \in C$ tel que $f(a) = \sup_{x \in C} f(x)$ et trouver le(s) point(s) $a \in C$ vérifiant cette propriété.
2. Montrer que pour tout $x \in (\mathbf{R}_+)^n$,

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

3. Dans quel(s) cas a-t-on égalité ?

Problème d'algèbre et géométrie

Dans la suite on note $Sl_2(\mathbf{R})$ le sous-groupe de $Gl_2(\mathbf{R})$ formé des matrices de déterminant égal à 1, et $Sl_2(\mathbf{Z})$ le sous-ensemble de $Sl_2(\mathbf{R})$ formé des matrices dont les coefficients sont dans $\mathbf{Z}$. On admet que $Sl_2(\mathbf{Z})$ est un sous-groupe de $Gl_2(\mathbf{R})$. Le but du problème est de donner une présentation du groupe $Sl_2(\mathbf{Z})$ par générateurs et relations.
Dans la première partie on fait opérer $Sl_2(\mathbf{R})$ sur le demi-plan de POINCARÉ H défini par $\{z \in \mathbf{C} | \operatorname{Im}(z) > 0\}$ et on décrit un domaine fondamental pour l'action du sous-groupe $Sl_2(\mathbf{Z})$.
Dans la deuxième partie, X désigne un ensemble appelé *alphabet* et $X^\star$ un ensemble en bijection avec X, tel que $X \cap X^\star = \emptyset$. On donne une construction du groupe libre engendré par X et on introduit la notion de présentation d'un groupe par générateurs et relations.
La troisième partie donne enfin différentes présentations de groupes par générateurs et relations en particulier pour $Sl_2(\mathbf{Z})$.

Partie A : $Sl_2(\mathbf{Z})$ et le demi-plan de POINCARÉ.

Soit H le demi-plan $\{z \in \mathbf{C} | \operatorname{Im}(z) > 0\}$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $Sl_2(\mathbf{R})$, pour tout z dans H on pose

$$A \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Pour tout couple de réels (a,b) vérifiant $a < b$, on note D_a et $C_{a,b}$ les parties de H définies par :

$$D_a = \{a + it,\ t \in]0, +\infty[\}, \quad C_{a,b} = \left\{ \frac{a+b}{2} + \frac{(b-a)e^{it}}{2},\ t \in]0, \pi[\right\}.$$

1. Soient z_1 et z_2 deux éléments distincts dans H. Montrer qu'il existe une unique partie Δ_{z_1,z_2} de la forme D_a ou $C_{a,b}$ contenant $\{z_1, z_2\}$.
2. Montrer qu'en posant $A \cdot z$ on fait opérer $Sl_2(\mathbf{R})$ sur H.
3. Pour tout couple de réels (a,b) vérifiant $a < b$ déterminer les images respectives des parties D_a par l'action de $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C_{a,b}$ par $\begin{pmatrix} \frac{1}{a-b} & \frac{-a}{a-b} \\ 1 & -b \end{pmatrix}$.
   Si z_1 et z_2 sont deux éléments de H, on appelle chemin joignant z_1 à z_2 dans H une application continue γ, C^1 par morceaux sur $[0,1]$ à valeurs dans H, vérifiant $\gamma(0) = z_1$ et $\gamma(1) = z_2$.
   En posant $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ (x et y fonctions à valeurs réelles), on définit la longueur de γ comme étant
   $$L(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y} dt,$$
   associée à la métrique $ds = \frac{|dz|}{\operatorname{Im} z}$ sur H. On note $d(z_1, z_2)$ la borne inférieure des $L(\gamma)$ lorsque γ parcourt les chemins joignant z_1 à z_2 dans H.
4. Calculer la longueur $L(\gamma_{a,b})$ du chemin $\gamma_{a,b}$ défini pour $0 < a < b$ par
   $$\forall t \in [0,1], \gamma_{a,b}(t) = i(ta + (1-t)b).$$

5. On suppose $0 < a < b$, montrer que, pour tout chemin γ joignant ia à ib dans H, on a
$$L(\gamma) \geq L(\gamma_{a,b}),$$
6. En déduire $d(z_1, z_2)$ pour deux points de H sur la verticale D_0.
7. Soient z_1 et z_2 deux éléments distincts dans H. Montrer qu'il existe un élément g de $Sl_2(\mathbf{R})$ tel que l'image $g \cdot \Delta_{z_1,z_2}$ de Δ_{z_1,z_2} par l'action de g soit D_0.
8. En déduire, pour deux points distincts z_1 et z_2 dans H, que la valeur $d(z_1, z_2)$ est atteinte pour un chemin dont l'image est contenue dans Δ_{z_1,z_2}. La partie Δ_{z_1,z_2} est appelée la géodésique contenant $\{z_1, z_2\}$.
9. Montrer que d est une distance sur H, appelée distance hyperbolique.
10. Déterminer le noyau de l'action du sous-groupe $Sl_2(\mathbf{Z})$ sur H. En déduire que le groupe $G = Sl_2(\mathbf{Z})/\{\pm Id\}$ agit fidèlement sur H.

On considère maintenant l'action de G sur H, et on note $\mathbb{1}$ son élément unité. Soient $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on note s et t leurs images dans G, et le sous-groupe qu'elles engendrent, $G' = \langle s, t \rangle$. On désigne par D le sous-ensemble de H défini par
$$D = \left\{ z \in H, |z| \geq 1, |Re(z)| \leq \frac{1}{2} \right\},$$
et on note $\mathring{D}$ son intérieur.

11. Montrer que pour z dans D, si $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ appartient à $Sl_2(\mathbf{Z})$ alors
$$|cz + d|^2 = c^2|z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z)cd + d^2 \geq (|c| - |d|)^2 + |cd| \geq 1.$$
12. Montrer que l'orbite $G \cdot z$ d'un élément z de H contient un élément de partie imaginaire maximale. En déduire que $G \cdot z$ est une partie discrète de H.
13. Montrer que pour tout g dans $G \backslash \{\mathbb{1}\}$, on a
$$g \cdot \mathring{D} \cap \mathring{D} = \emptyset.$$
14. Montrer que $H = \bigcup_{g \in G'} g \cdot D$. En déduire que $G' = G$ et $Sl_2(\mathbf{Z}) = \langle S, T \rangle$.

Partie B : Groupe libre sur un alphabet

Soit $\mathcal{I}$ une bijection entre X et $X^\star$, alors pour tout (x, y) dans $X \times X^\star$ on note $x^\star = \mathcal{I}(x)$ et $y^\star = \mathcal{I}^{-1}(y)$. On obtient ainsi une involution sur $X \cup X^\star$.
On appelle mot *sur X un n-uplet $x = (x_1, \ldots, x_n)$ que l'on note $x = x_1 \ldots x_n$ formé à partir des éléments x_k de $X \cup X^\star$. L'entier n est alors appelé la* longueur du mot *et se note $\ell(x)$.*
Le mot vide $()$ est noté 1, et $M(X)$ désigne l'ensemble des mots définis sur $X \cup X^\star$.
On identifie l'alphabet X avec l'ensemble des mots de longueur 1 formés à partir des éléments de X.

15. Montrer que l'application de $M(X) \times M(X)$ dans $M(X)$ définie par $(x, y) \to xy$, est un produit associatif d'élément neutre 1, vérifiant $\ell(xy) = \ell(x) + \ell(y)$.

16. Montrer que
$$\forall x, y, z \in M(X), \begin{cases} xy = xz \Rightarrow y = z, \\ xz = yz \Rightarrow x = y. \end{cases}$$

On définit la relation d'adjacence $\mathcal{A}$ sur $M(X)$ de la façon suivante. Soient x et y deux éléments de $M(X)$ alors $x\mathcal{A}y$ s'il existe un élément a de X et deux mots u et v de $M(X)$ tels que l'ensemble $\{x, y\}$ soit contenu dans l'ensemble $\{uv, uaa^\star v, ua^\star av\}$. Ainsi si y appartient à X, pour tout mot x de $M(X)$, en posant $u = x$, $v = 1$ et $a = y$ on obtient $xyy^\star\mathcal{A}x$ et $xy^\star y\mathcal{A}x$.

17. Montrer que si $x\mathcal{A}y$ alors pour tout z dans $M(X)$, $xz\mathcal{A}yz$.
On considère alors la relation $\mathcal{R}$ sur $M(X)$ définie par $x\mathcal{R}y$ s'il existe un entier $k > 1$ et des mots $x_1, \ldots, x_k$ tels que, pour tout $1 \leq m < k$, x_m soit adjacent à x_{m+1} avec $x_1 = x$ et $x_k = y$.
   (a) Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $M(X)$. On note $s(x)$ la classe d'équivalence de x.
   (b) Montrer que l'on peut définir sur l'ensemble $M(X)/\mathcal{R}$ des classes d'équivalences pour cette relation, une loi de composition interne en posant $s(x).s(y) = s(xy)$.
   (c) Montrer que l'ensemble $M(X)/\mathcal{R}$ muni de la loi de composition ainsi définie est un groupe engendré par $s(X)$.

Mots réduits et groupe libre

On dit qu'un mot x de $M(X)$ est réduit*, s'il est de longueur minimale parmi ses adjacents et on note $F(X)$ l'ensemble des éléments réduits de $M(X)$. En particulier si x est réduit alors*
$$\forall y \in M(X), x\mathcal{A}y \Rightarrow \ell(x) \leq \ell(y).$$
Pour tout entier n, on désigne par $M_n(X)$ l'ensemble des mots de longueur n et on note pour tout u dans $M_n(X)$, et pour tout a dans $X \cup X^\star$

$$\begin{cases} r(u) = u & \textit{si } 0 \leq n \leq 1, \\ r(ua) = a & \textit{si } \ell(r(u)) = 0, \\ r(ua) = r(u)a & \textit{si } \ell(ru)) = k \geq 1 \textit{ avec } r(u) = t_1 \ldots t_k, \textit{ et } t_k \neq a^\star, \\ r(ua) = 1 & \textit{si } \ell(r(u)) = 1 \textit{ et } r(u) = a^\star, \\ r(ua) = t_1 \ldots t_{k-1} & \textit{si } \ell(r(u)) = k \geq 2 \textit{ avec } r(u) = t_1 \ldots t_{k-1}a^\star. \end{cases}$$

18. Montrer que l'on définit ainsi une application r de $M(X)$ dans $F(X)$ vérifiant $s(r(x)) = s(x)$.
19. Montrer que si u et v sont adjacents, $r(u) = r(v)$. En déduire que $r(u)$ est l'unique élément réduit de la classe $s(u)$. On notera $\overline{r}$ l'application de $M(X)/\mathcal{R}$ dans $F(X)$ définie par $\overline{r}(s(u)) = r(u)$.
20. En déduire que la loi de composition interne sur $F(X)$ définie par $r(x).r(y) = r(xy)$ est une loi de groupe, et que la restriction $s_{|F(X)}$ de s à $F(X)$ est un isomorphisme de groupe entre $F(X)$ et $M(X)/\mathcal{R}$.
21. Montrer que pour toute application f de X dans un groupe G, il existe un unique homomorphisme $\widetilde{f}$ de $F(X)$ dans G, prolongeant f.
22. Soit G un groupe et X une partie génératrice de G. Montrer qu'il existe un homomorphisme surjectif π de $F(X)$ dans G, vérifiant
$$\forall x \in X, \pi(x) = x.$$

23. Montrer que le groupe $F(X)$ est non commutatif dès que l'alphabet contient au moins deux éléments.

Partie C : Présentation d'un groupe par générateurs et relations

Dans la suite, le groupe $F(X)$ est appelé le *groupe libre engendré par* X.
Soient G un groupe, X une partie génératrice de G, R une partie de $F(X)$. On note $H(R)$ le sous-groupe de $F(X)$ engendré par $\bigcup_{g\in F(X)} gRg^{-1}$, où g^{-1} désigne l'inverse de g dans $F(X)$.

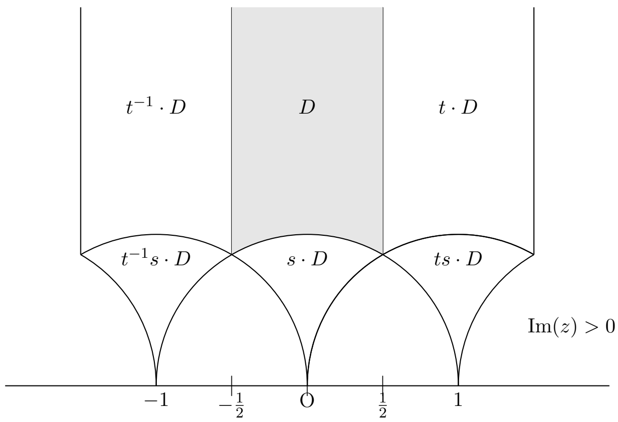
24. Montrer que $H(R)$ est l'intersection des sous-groupes distingués de $F(X)$ contenant R.

On dit que $\langle X|R\rangle$ est une présentation *de G si l'homomorphisme canonique φ de $F(X)$ dans G admet pour noyau $H(R)$. La présentation $\langle X|R\rangle$ est dite* finie *si R est une partie finie de $F(X)$.*

25. Donner une présentation finie du groupe cyclique d'ordre n.
26. Montrer que $\langle\{a,b\}|\{a^n,b^2,abab\}\rangle$ est une présentation du groupe diédral $\mathcal{D}_n$ d'ordre $2n$.

Relations dans $Sl_2(\mathbf{Z})$

Dans la suite, le groupe G est celui introduit dans la partie A. On considère l'alphabet $\{\sigma,\tau\}$, et le morphisme ϕ de $F(\{\sigma,\tau\})$ sur G défini par $\phi(\sigma)=s$ et $\phi(\tau)=t$.
On pourra utiliser le dessin suivant décrivant l'action de certains éléments de G sur le domaine D.



27. Calculer $\phi(\sigma^\star)$, $\phi(\sigma^2)$ et $\phi((\sigma\tau)^3)$.

On note $R=\{\sigma^2,(\sigma\tau)^3\}$, le but de la suite est de montrer que $\langle\{\sigma,\tau\}|\{\sigma^2,(\sigma\tau)^3\}\rangle$ est une présentation de G. On condidère le sous-groupe normal $H(R)$ engendré par σ et τ. Soit $x=x_1\dots x_n$ un élément de $\ker\phi$ de longueur n. On pose $z_0=2i$ et on définit pour $1\le i\le n$, $z_i=\phi(x_1\dots x_i)\cdot z_0$. On a donc $z_n=z_0$. On veut montrer que x est dans le sous-groupe normal engendré par $\langle\sigma^2,(\sigma\tau)^3\rangle$.

28. Identifier les x_i et les z_i lorsque $n\le 2$.

29. Montrer que l'on peut supposer les z_i, $1 \leq i \leq n$, deux à deux distincts.
30. Montrer que pour tout $0 \leq i \leq n-1$, si $z_i \neq z_{i+1}$, le segment $[z_i, z_{i+1}]$ de la géodésique Δ_{z_1,z_2} joignant z_1 à z_2 ne rencontre que deux orbites du domaine fondamental D. On admettra dans la suite que les orbites de D partageant un segment de frontière avec D sont $s \cdot D$, $t \cdot D$ et $t^{-1} \cdot D$.
31. On suppose $n > 2$ et les z_i, $1 \leq i \leq n$, deux à deux distincts. Montrer que l'on peut supposer $x_i \in \{\sigma, \tau, \tau^\star\}$ puis $x_1 x_2 = \sigma\tau$ ou $x_1 x_2 = \tau\sigma$.
32. On suppose $x_1 x_2 = \sigma\tau$ (l'autre cas se traite de manière analogue et n'est pas demandé). Déterminer les orbites de D contenant respectivement z_0, z_1, z_2, et montrer que pour tout $n > i \geq 2$, les z_i ont une partie réelle strictement négative.
33. En déduire que l'orbite de D contenant z_{n-1} est $t^{-1} \cdot D$ et $x_n = \tau$.
34. En déduire qu'il existe un entier $2 < i < n-1$ tel que $z_i \in t^{-1}s \cdot D$.
35. Calculer $\phi(x_1 \ldots x_i \sigma\tau)$ et $\phi(\tau^\star \sigma x_{i+1} \ldots x_n)$.
36. En déduire que $\ker \phi = H(R)$.
37. Montrer que le groupe $Sl_2(\mathbf{Z})$ admet la présentation par générateurs et relations suivantes :

$$\langle \{\sigma, \tau\} | \{\sigma^{-2}(\sigma\tau)^3, \sigma^4\} \rangle$$

Problème d'analyse et probabilités

On note $\mathbf{C}_+$ *le demi-plan complexe* $\{z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$. *Si* $f \in L^1(\mathbf{R})$, *l'ensemble des (classes de) fonctions intégrables sur* $\mathbf{R}$, *on note indifféremment* $\widehat{f}$ *ou* $\mathcal{F}(f)$ *la transformée de* FOURIER *de* f, *définie avec la convention*

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, dx \quad \forall \xi \in \mathbf{R}.$$

On étend classiquement cette définition à l'ensemble des (classes de) fonctions de carré intégrable, noté $L^2(\mathbf{R})$.
Dans toute la suite, on appelle espace de HARDY, *qu'on note* $\mathcal{H}$, *l'ensemble des fonctions* F *holomorphes dans* $\mathbf{C}_+$ *et telles que*

$$\sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} |F(x+iy)|^2 dx < \infty.$$

Si $F \in \mathcal{H}$, *on pose*

$$\|F\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} |F(x+iy)|^2 dx}.$$

Si E *est un espace vectoriel normé, on note* $\mathcal{L}(E)$ *l'ensemble des applications linéaires continues de* E *dans* E. *Si* $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E)$, *on notera* $T_1 \circ T_2$ *la composée de* T_1 *et* T_2.

Partie A : représentation de l'espace de HARDY

1. Montrer que $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ est un $\mathbf{C}$-espace vectoriel normé.
2. Soit $f_0 \in L^2([0,\infty[)$. Pour $z \in \mathbf{C}_+$, on pose

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f_0(\xi) e^{i\xi z}\, d\xi. \tag{1}$$

   (a) Montrer que l'intégrale $F(z)$ est bien définie pour tout $z \in \mathbf{C}_+$.

   (b) Montrer que F est continue sur $\mathbf{C}_+$.
   [Indication : on pourra par exemple montrer que F *est continue sur l'ensemble* $\{z \in \mathbf{C},\ \mathrm{Im}(z) \geq \delta\}$ *pour tout* $\delta > 0$*.]*

   (c) Soit $z_0 \in \mathbf{C}_+$ fixé, et soit $h \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ tel que $|h| \leq \mathrm{Im}(z_0)/2$. Montrer que, pour tout $\xi \geq 0$,

$$\left| \frac{e^{i\xi h} - 1}{h} \right| \leq \frac{2}{\mathrm{Im}(z_0)} \exp\left(\frac{\mathrm{Im}(z_0)\xi}{2} \right).$$

   (d) En déduire que F est holomorphe dans $\mathbf{C}_+$.

   (e) Pour tout $y > 0$, montrer que l'application $x \in \mathbf{R} \mapsto F(x+iy)$ est de carré intégrable et que

$$\int_{\mathbf{R}} |F(x+iy)|^2\, dx = \int_0^\infty |f_0(\xi)|^2 e^{-2\xi y}\, d\xi.$$

   (f) Montrer que $F \in \mathcal{H}$ et que

$$\|F\|_{\mathcal{H}} = \|f_0\|_{L^2(\mathbf{R}_+)}.$$

3. *On se propose à présent de montrer que, réciproquement, pour toute fonction* F *de* $\mathcal{H}$, *il existe une fonction* $f_0 \in L^2([0,\infty[)$ *telle que* F *vérifie la formule* (1). *Justifier cette assertion est l'objet des questions suivantes.*

(a) Soient $F \in \mathcal{H}$ et $\delta > 0$. Montrer que, pour tout $\zeta \in \mathbf{C}_+$ tel que $\mathrm{Im}(\zeta) > \delta$ et pour tout $r \in]0, \delta]$, on a

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\zeta + re^{i\theta})\, d\theta.$$

En déduire que

$$F(\zeta) = \frac{1}{\pi\delta^2} \iint_{|x+iy|\leq\delta} F(\zeta + x + iy)\, dx\, dy.$$

(b) Avec les hypothèses et notations de la question précédente, montrer que

$$|F(\zeta)|^2 \leq \frac{1}{\pi\delta^2} \iint_{|x+iy|\leq\delta} |F(\zeta+x+iy)|^2 dxdy \leq \frac{2}{\pi\delta} \sup_{0<\eta\leq \mathrm{Im}(\zeta)+\delta} \int_{\mathbf{R}} |F(\xi+i\eta)|^2 d\xi.$$

En déduire que F est bornée sur l'ensemble $\{\zeta \in \mathbf{C}_+,\ \mathrm{Im}(\zeta) > \delta\}$.

(c) Soit $F \in \mathcal{H}$. On suppose dans cette question que l'hypothèse suivante est vérifiée :

$$\textbf{(H)} \left\{ \begin{array}{l} \textit{pour tout } \delta > 0, \textit{ il existe une constante } C_\delta > 0 \textit{ telle que} \\ \textit{pour tout } x \in \mathbf{R} \textit{ et tout } y \in]\delta, +\infty[, \textit{ on a } |F(x+iy)| \leq \frac{C_\delta}{1+x^2}. \end{array} \right.$$

Soit $\delta > 0$ et soit $y_1, y_2 \in]\delta, +\infty[$. Pour $j = 1, 2$, soit L_j la ligne horizontale $\{x + iy_j,\ x \in \mathbf{R}\}$. Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbf{R}$,

$$\int_{L_1} F(z)e^{-iz\xi}\, dz = \int_{L_2} F(z)e^{-iz\xi}\, dz.$$

En définissant les fonctions $F_y : x \in \mathbf{R} \mapsto F(x + iy)$ pour $y > 0$, en déduire que, pour tout $\xi \in \mathbf{R}$,

$$\widehat{F_{y_1}}(\xi)e^{y_1\xi} = \widehat{F_{y_2}}(\xi)e^{y_2\xi}. \tag{2}$$

(d) Soit $F \in \mathcal{H}$ quelconque (on ne suppose plus que **(H)** est vérifiée). Pour $\epsilon > 0$, on définit la fonction

$$F^\epsilon : z \in \mathbf{C}_+ \mapsto \frac{F(z)}{(1 - i\epsilon z)^2}.$$

Montrer que F^ϵ vérifie l'hypothèse **(H)** et que, pour tout $y > 0$,

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbf{R}} |F^\epsilon(x + iy) - F(x + iy)|^2\, dx = 0.$$

En déduire que, pour tout $(y_1, y_2) \in]0, \infty[\times]0, \infty[$, il existe un ensemble $A_{y_1,y_2} \subset \mathbf{R}$ de mesure de LEBESGUE nulle, tel que, pour tout $\xi \in \mathbf{R} \setminus A_{y_1,y_2}$, F vérifie la propriété (2).

(e) En déduire qu'il existe une fonction $f_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, de carré intégrable sur tout compact de $\mathbf{R}$, telle que pour tout $y \in]0, +\infty[$, pour tout $\xi \in \mathbf{R} \setminus A_{1,y}$,

$$\widehat{F_y}(\xi) = f_0(\xi)e^{-\xi y}.$$

(f) Montrer que

$$\|F\|^2_{\mathcal{H}} = \sup_{y>0} \int_{\mathbf{R}} |f_0(\xi)|^2 e^{-2\xi y}\, d\xi. \tag{3}$$

(g) Pour $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, on définit l'ensemble

$$E_n = \left\{ \xi \in \left]-\infty, \frac{-1}{n}\right], \ |f_0(\xi)| \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Montrer que, pour tout $y > 0$, on a

$$\mathrm{mes}(E_n) \leq \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \ n^2 \ e^{-2\frac{y}{n}}$$

(où, $A \subset \mathbf{R}$ étant un ensemble mesurable, $\mathrm{mes}(A)$ désigne la mesure de LEBESGUE de cet ensemble). En déduire que $\mathrm{mes}(E_n) = 0$, puis que $f_0(\xi) = 0$ pour presque tout $\xi < 0$.

(h) En utilisant l'égalité (3), montrer que $f_0 \in L^2([0, +\infty[)$, puis que F est reliée à f_0 par la formule (1).

Partie B : comportement des fonctions de l'espace de HARDY lorsque $y \to 0$

Soit $F \in \mathcal{H}$ et soit $f_0 \in L^2([0, +\infty[)$ telle que la formule (1) soit vérifiée.

4. Montrer qu'il existe une fonction $g_0 \in L^2(\mathbf{R})$ telle que

$$\lim_{y \to 0} \int_{\mathbf{R}} |F(x + iy) - g_0(x)|^2 \, dx = 0,$$

et caractériser cette fonction g_0 en fonction de f_0.
En déduire que la fonction f_0 telle que la formule (1) soit vérifiée est unique, au sens des (classes de) fonctions de $L^2(\mathbf{R})$.

On se propose à présent de montrer que la convergence évoquée dans cette dernière question a également lieu presque partout, autrement dit que pour presque tout $x \in \mathbf{R}$ on a

$$\lim_{y \to 0} F(x + iy) = g_0(x).$$

À cette fin, on va établir la formule suivante : pour tout $z \in \mathbf{C}_+$ avec $z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$,

$$F(x + iy) = \int_{\mathbf{R}} g_0(x - t) P_y(t) \, dt \tag{4}$$

où P_y est défini par

$$P_y : t \in \mathbf{R} \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + t^2}. \tag{5}$$

5. Montrer que pour tous $x \in \mathbf{R}$ et $y \in]0, +\infty[$, on a

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-|\xi| y + i \xi x} \, d\xi = \frac{2y}{y^2 + x^2}.$$

6. Montrer que pour tous $y > 0$ et $t \in \mathbf{R}$, on a

$$P_y(t) = \frac{1}{y} P\left(\frac{t}{y}\right),$$

pour une certaine fonction P que l'on identifiera. Vérifier que

$$\int_{\mathbf{R}} P(s) \, ds = 1.$$

7. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, l'espace de SCHWARTZ des fonctions définies sur $\mathbf{R}$ à décroissance rapide. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, pour tout $y > 0$, on a
$$\int_{\mathbf{R}} \widehat{f}(\xi) e^{-|\xi| y + i\xi x}\, d\xi = \sqrt{2\pi} \int_{\mathbf{R}} f(t) P_y(x-t)\, dt = \sqrt{2\pi} \int_{\mathbf{R}} f(x-t) P_y(t)\, dt. \qquad (6)$$
En déduire la formule (4) pour $g_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.
8. Montrer que si $g_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, alors pour tout $x \in \mathbf{R}$ on a
$$\lim_{y \to 0} F(x+iy) = g_0(x).$$
On admettra que ce résultat reste vrai pour presque tout $x \in \mathbf{R}$ si $g_0 \in L^2(\mathbf{R})$.

Partie C : transformée de HARDY

Soit
$$E = \left\{ g \in L^2(\mathbf{R}),\ \widehat{g}(\xi) = 0 \text{ pour presque tout } \xi \leq 0 \right\}.$$

9. Justifier que E est un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\mathbf{R})$ (pour la topologie induite par la norme L^2 usuelle).
On note à présent Π la projection orthogonale dans $L^2(\mathbf{R})$ sur E.
10. Montrer que pour tout $g \in L^2(\mathbf{R})$, on a
$$\widehat{\Pi(g)} = \mathbf{1}_{\xi > 0}\, \widehat{g}.$$
11. En utilisant les résultats des parties A et B, montrer que pour tout $g \in E$ il existe une unique fonction $F \in \mathcal{H}$ telle que, pour presque tout $x \in \mathbf{R}$, on a
$$\lim_{y \to 0} F(x+iy) = g(x).$$
12. On pose $\Pi = \frac{\mathrm{Id} + iH}{2}$. L'opérateur H est appelé *transformée de* HARDY.
Soit $f \in L^2(\mathbf{R})$ à valeurs réelles. Montrer que Hf est de carré intégrable et à valeurs réelles.
[Indication : on pourra montrer que $\widehat{Hf}(\xi) = -i\ \mathrm{sgn}(\xi) \widehat{f}(\xi)$ pour presque tout $\xi \in \mathbf{R}$.]
13. Soit $f \in L^2(\mathbf{R})$ à valeurs réelles. Montrer qu'il existe $F \in \mathcal{H}$ telle que, pour presque tout $x \in \mathbf{R}$, on a
$$\lim_{y \to 0} \mathrm{Re}(F(x+iy)) = f(x), \quad \lim_{y \to 0} \mathrm{Im}(F(x+iy)) = (Hf)(x).$$
14. Soit $f \in L^2(\mathbf{R})$ à valeurs réelles. Pour $y > 0$, on définit
$$u(x,y) = (f * P_y)(x), \quad v(x,y) = (Hf * P_y)(x)$$
où la fonction P_y est déterminée par (5). Montrer que u et v sont des fonctions harmoniques conjuguées dans le demi-plan $\mathbf{R} \times]0, +\infty[$, c'est-à-dire qu'elles vérifient
$$\Delta u = \Delta v = 0 \quad \text{dans } \mathbf{R} \times]0,+\infty[,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{dans } \mathbf{R} \times]0,+\infty[,$$
où on rappelle que Δ désigne l'opérateur différentiel $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.
[Indication : on pourra considérer la fonction $F : z = x+iy \in \mathbf{C}_+ \mapsto u(x,y) + iv(x,y)$.]
15. On note H^* l'adjoint de H. Montrer que $H^* = -H, H^2 = -I$. En déduire que H est un opérateur unitaire.

Partie D : transformée de Hardy et multiplicateurs de Fourier

Dans toute cette partie, si $T \in \mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}))$, on définit $\widehat{T} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}))$ par

$$\widehat{T} = \mathcal{F} \circ T \circ \mathcal{F}^{-1}.$$

Autrement dit, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbf{R})$, on a

$$\widehat{T(f)} = \widehat{T}(\widehat{f}).$$

16. Montrer que pour tous $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}))$, on a

$$\widehat{T_1 \circ T_2} = \widehat{T_1} \circ \widehat{T_2}.$$

17. Pour tout $h \in \mathbf{R}$, on note $\tau_h : L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ l'opérateur défini par

$$\tau_h(f)(x) = f(x-h) \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Montrer que τ_h est une application linéaire continue sur $L^2(\mathbf{R})$ et que

$$\tau_h \circ H = H \circ \tau_h \quad \forall h \in \mathbf{R}.$$

18. Pour tout $a > 0$, on note $\delta_a : L^2(\mathbf{R}) \to L^2(\mathbf{R})$ l'opérateur défini par

$$\delta_a(f)(x) = f(ax) \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Montrer que

$$\delta_a \circ H = H \circ \delta_a \quad \forall a \in]0, +\infty[.$$

Remarque : Réciproquement, on peut montrer (mais cela n'est pas demandé aux candidats) que si $T \in \mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}))$ est tel que

$$\begin{aligned} T \circ \tau_h = \tau_h \circ T \quad \forall h \in \mathbf{R}, \\ T \circ \delta_a = \delta_a \circ T \quad \forall a > 0, \\ T^2 = -\mathrm{Id}, \end{aligned}$$

alors $T \in \{i\mathrm{Id}, -i\mathrm{Id}, H, -H\}$.