



**MINISTÈRES  
ÉDUCATION  
JEUNESSE  
SPORTS  
ENSEIGNEMENT  
SUPÉRIEUR  
RECHERCHE**

*Liberté  
Égalité  
Fraternité*

## **RAPPORT DU JURY**

**SESSION 2025**

**Concours : Agrégation externe spéciale**

**Section : Mathématiques**

Rapport de jury présenté par : Johan Yebbou, président du jury

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Déroulement du concours et statistiques</b>	<b>5</b>
1.1	Déroulement du concours 2025 . . . . .	5
1.2	Commentaires généraux et statistiques sur la session 2025 . . . . .	6
1.2.1	Commentaires généraux . . . . .	6
1.2.2	Données statistiques diverses . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Épreuve écrite de mathématiques</b>	<b>10</b>
2.1	Énoncé . . . . .	10
2.2	Commentaires sur l'épreuve écrite d'admissibilité . . . . .	10
2.3	Proposition de corrigé . . . . .	11
2.4	Exercice 5 : . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Épreuves orales</b>	<b>44</b>
3.1	Épreuve orale de mathématiques (Analyse-Probabilités & Algèbre-Géométrie) . . . . .	44
3.2	Épreuve orale de modélisation (options A, B et C) . . . . .	45
3.3	Épreuve orale de mise en perspective didactique d'un dossier recherche . . . . .	45
<b>4</b>	<b>La bibliothèque de l'agrégation</b>	<b>49</b>
<b>5</b>	<b>Liste des leçons de mathématiques pour le concours spécial 2026</b>	<b>50</b>

# Introduction

La session 2025 est la neuvième édition de ce concours spécial réservé aux titulaires d'un doctorat.

Les exigences scientifiques de ce concours spécial sont les mêmes que celles qui régissent le concours externe standard, sans aucune concession quant aux connaissances mathématiques et leur maîtrise. Cependant, son format original et son public réservé donnent l'occasion de mettre en valeur la maturité liée à une expérience professionnelle et les qualités spécifiques résultant d'une pratique des mathématiques par la recherche. Ce concours permet ainsi de recruter des professeures et professeurs agrégés ayant un parcours professionnel déjà établi, une expérience de recherche, des compétences pluridisciplinaires, éventuellement marqués par la confrontation à un environnement international. Ce vécu est appelé à s'exprimer au concours et ne peut que rejaillir positivement sur la pratique enseignante. L'expérience montre que cette voie de recrutement est très ouverte et permet de valoriser — moyennant un indispensable effort de préparation — des candidates et candidats aux parcours et profils variés, incluant des titulaires d'une thèse dans une autre discipline que les mathématiques.

Ce rapport a un double objectif. D'une part il établit un bilan de la session 2025, notamment en présentant les données statistiques du concours et en discutant les éléments saillants des productions des candidats.

D'autre part il se veut un document *utile* pour les futurs candidates et candidats afin de les aider à se préparer au mieux pour les épreuves qui les attendent. Ainsi, il fournit :

- un corrigé commenté de l'épreuve écrite d'admissibilité ;
- des recommandations pour les épreuves orales d'admission.

Pour l'épreuve de leçon et de modélisation, on se reportera utilement au rapport du concours standard qui détaille les attentes de ces épreuves.

On trouve sur le site de l'agrégation externe de mathématiques [agreg.org](http://agreg.org) nombre d'informations utiles : des archives (sujets d'écrit, textes de modélisation, rapports) et des renseignements pratiques concernant les sessions à venir. En particulier, les futurs candidates et candidats peuvent trouver sur ce site la **ClefAgreg** qui leur permettra de se familiariser avec l'environnement informatique qu'ils rencontreront pour l'épreuve de modélisation. Se préparer suffisamment tôt à cette épreuve permet d'en bien comprendre les attendus, mais aussi peut aider à renforcer les capacités de synthèse sur l'ensemble du programme. Enfin, le jury rappelle qu'une réunion publique, ouverte aux préparateurs, est traditionnellement organisée en début d'année universitaire sous l'égide des sociétés savantes de mathématiques pour évoquer le bilan et les perspectives du concours.

Le jury recommande aux candidates et candidats de se préoccuper suffisamment tôt des questions liées à la gestion de leur carrière auxquelles ils seront confrontés en cas de succès au concours. Les lauréates et lauréats de ce concours spécial sont considérés comme devant être immédiatement opérationnels et ne devraient donc pas être concernés par les procédures de report de stage. Notamment, les possibilités d'être nommé stagiaire en qualité d'ATER ou affecté dans l'enseignement supérieur sur un emploi de professeur du second degré (PRAG) ne sont pas offertes aux lauréates et lauréats du concours spécial (note de service n°. 2019-064 du 25 avril 2019,

[https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin\\_officiel.html?cid\\_bo=141354](https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=141354)). Il est à noter que les reçus bénéficient d'une bonification d'ancienneté de deux ans au titre de la période de préparation du doctorat ; lorsque la période de préparation du doctorat a été accomplie sous contrat de travail, les services accomplis dans ce cadre sont pris en compte pour la part de leur durée excédant deux ans (article 6 du décret n°. 72-580 du 4 juillet 1972 relatif au statut particulier des professeurs agrégés de l'enseignement du second degré, modifié par le décret n°. 2016-656 du 20 mai 2016).

# Chapitre 1

## Déroulement du concours et statistiques

### 1.1 Déroulement du concours 2025

Le concours spécial docteur, création de la campagne de recrutement 2017, est un concours « jeune », instauré par le décret n<sup>o</sup>. 2016-656 du 20 mai 2016. En 2019, six disciplines étaient concernées par l'ouverture de postes à ce concours spécial : mathématiques, langues vivantes étrangères : anglais, lettres modernes, physique-chimie option chimie, physique-chimie option physique et sciences de la vie-sciences de la Terre et de l'Univers.

Les modalités des épreuves sont décrites par l'arrêté du 28 juin 2016, accessible sur le site

<https://www.legifrance.gouv.fr/>.

Le concours comprend une seule épreuve écrite d'admissibilité et trois épreuves orales d'admission : une épreuve de leçon de mathématiques qui couvre l'intégralité du programme (sans distinction des thèmes d'algèbre-géométrie et ceux d'analyse-probabilités), une épreuve de modélisation et une épreuve de mise en perspective didactique d'un dossier de recherche qui est spécifique à ce concours. Les candidates et les candidats ont le choix parmi trois options :

- probabilités et statistiques,
- calcul scientifique,
- algèbre et calcul formel,

qui ne diffèrent que par l'épreuve de modélisation.

Ce concours spécial est réservé aux titulaires d'un doctorat, le diplôme devant être acquis à la date de publication de la liste des admissibles. Les mères ou pères d'au moins trois enfants ainsi que les sportives et sportifs de haut niveau sont dispensés de cette condition de diplôme, mais ils seront bien sûr confrontés aux mêmes épreuves. En particulier candidater à ce concours n'a de sens que pour une personne qui, sans être forcément titulaire d'un doctorat, peut justifier d'un parcours et d'une expérience pouvant être mis en valeur dans l'épreuve sur dossier. Tout en rappelant que le référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat de l'éducation (arrêté du 1er Juillet 2013) indique que la maîtrise de la langue française est un attendu premier, il est important de souligner que ce concours est ouvert à tout ressortissant d'un État membre de l'Union européenne, d'un État faisant partie de l'accord sur l'Espace économique européen, de la principauté d'Andorre, de la Confédération suisse ou de la Principauté de Monaco. Ainsi, ce concours peut être une opportunité pour des docteurs ressortissants de ces pays, intéressés pour exercer en France, mais dont le parcours académique initial, par exemple effectué à l'étranger, ne donnait pas d'inclination particulière pour passer le concours de l'agrégation externe standard dans la lignée de leur cursus. Enfin, cette session le prouve encore, le format de l'épreuve permet d'attirer des candidates et candidats qui seraient titulaires d'une thèse dans une autre discipline : ils ont l'occasion d'expliquer comment des outils mathématiques sont intervenus au cours de leur expérience de recherche ou professionnelle, comment ils ont été exploités au service

d'applications concrètes et comment cette expérience pourra enrichir leur pratique d'enseignant en mathématiques.

L'épreuve écrite d'admissibilité s'est déroulée le mercredi 19 février 2025. Les candidates et candidats sont libres de s'inscrire à la fois au concours standard et au concours spécial ; toutefois, les épreuves écrites ayant lieu au même moment, il leur faut déterminer finalement à quel concours ils souhaitent se présenter. Le jury conseille aux candidates et candidats d'effectuer ce choix en évaluant quelles épreuves leur permettent de mieux se mettre en valeur, en fonction de leur parcours et de leur préparation, toute autre considération, par exemple liée à la gestion des carrières, paraissant particulièrement hypothétique.

La liste des candidates et candidats admissibles a été publiée le 25 avril 2025. Les épreuves orales du concours spécial étaient organisées en parallèle de celles du concours standard de l'agrégation externe, du mardi 24 au jeudi 26 juin, à Strasbourg, au lycée Kléber. Le jury et les candidats y ont trouvé d'excellentes conditions de travail, et ont profité d'un accueil chaleureux et dévoué. Les jurys, les délibérations et les classements du concours spécial et du concours standard sont distincts. La liste d'admission a été publiée le jeudi 3 juillet 2025.

## 1.2 Commentaires généraux et statistiques sur la session 2025

### 1.2.1 Commentaires généraux

Le nombre d'inscrits au concours spécial s'élève à 149 et 62 candidates et candidats se sont présentés à l'épreuve écrite. À l'issue de la délibération d'écrit, 19 candidates et candidats ont été déclarés admissibles ; le premier admissible a une note de 20/20 et le dernier une note de 5,5/20. Avec toutes les précautions d'usage sur la comparaison entre deux concours différents, le jury estime que toutes ces candidates et tous ces candidats auraient probablement eu leur place parmi les admissibles du concours standard et que les meilleures copies du concours spécial s'y seraient placées à un très bon, voire excellent, rang. À l'issue des épreuves orales, les délibérations du jury ont conduit à retenir les 8 candidate et candidats ayant franchi la note moyenne de 8,6/20 ; le premier du concours présente une moyenne de 16,8/20..

Le jury renouvelle sa principale recommandation qui consiste à s'assurer de bases solides et à faire preuve de la maîtrise de ces bases, que ce soit par une rédaction efficace et convaincante à l'écrit, par des leçons calibrées et soignées ou une présentation à l'épreuve de modélisation qui inspirent toute confiance quant à la solidité de ces bases. La consultation du rapport du concours standard confortera ces priorités.

**Admissibilité.** L'épreuve écrite, unique, se présente sous un format différent de celui du concours standard. Le site [agreg.org](https://www.devenirenseignant.gouv.fr) présente les archives du concours afin que les futurs candidates et candidats puissent se familiariser avec ce format. Le sujet était constitué

- d'une série d'exercices, qui balaient plutôt le niveau L1-L3,
- de deux problèmes **au choix**, l'un plutôt orienté sur la partie algèbre-géométrie du programme, l'autre orienté sur la partie analyse-probabilités.

Cette formulation permet d'une part de tester les candidats sur les bases du programme, et d'autre part de leur donner l'occasion de s'exprimer au mieux sur ce qui pourrait être leur terrain de prédilection. L'en-tête du sujet invitait très clairement les candidats à répartir leur temps, dont au moins la moitié devait être dévolue au problème et au moins un tiers à la partie exercices. Le barème correspondait à une telle répartition de l'effort. Les candidats doivent convaincre d'une compétence suffisante sur l'ensemble du programme : si le problème invite les candidats à s'exprimer sur leurs thèmes de prédilection, les exercices préliminaires ont précisément la vocation de vérifier les connaissances de base sur un éventail

large. Les candidats ne doivent pas se focaliser sur les seuls exercices relevant du même thème que le problème choisi. Une telle stratégie est pénalisée.

Un tel format « exercices (imposés) + problème au choix » sera reconduit en 2026.

**Admission.** Bien que le concours comporte une épreuve sur dossier, impliquant ainsi une connaissance du parcours et du profil du candidat, le jury travaille de manière étanche : les commissions des épreuves de leçons et de modélisation ne reçoivent aucune indication sur les candidates et candidats (sujet de thèse, provenance, situation professionnelle...). Les commissions n'ont par ailleurs aucune information quant aux résultats à l'écrit ou aux autres épreuves orales avant la phase de délibération. Ces épreuves obéissent donc au même fonctionnement et aux mêmes critères d'évaluation que pour le concours standard.

**Le programme** Le concours externe de l'agrégation a pour vocation de recruter des professeurs et professeurs agrégés destinés à exercer dans l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collèges) ou dans l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, grandes écoles, classes préparatoires aux grandes écoles, sections de techniciens supérieurs). Le jury estime donc que le niveau visé devrait permettre à la professeure ou au professeur agrégé d'intervenir sereinement et efficacement sur le créneau « bac-3/bac+3 » ; cet objectif calibre la conception du programme et les critères d'évaluation.

Le programme et la nature des épreuves, écrites et orales, font l'objet de publications sur le site officiel de ministère de l'Éducation nationale <http://www.devenirenseignant.gouv.fr>. Le [programme 2026](#) est identique au programme 2025.

Le jury s'engage, bien sûr, à respecter le programme. Ce programme n'est pas exhaustif, il résulte d'un compromis et des résultats mathématiques « importants » manquent au programme. Il est tout à fait possible que des candidates et candidats aient connaissance de ces notions avancées, souhaitent en faire mention et proposer des excursions hors des limites du programme. Le jury saura s'adapter et apprécier de telles propositions. Toutefois, elles ne sont absolument pas nécessaires pour prétendre aux notes maximales.

### 1.2.2 Données statistiques diverses

Ce paragraphe regroupe quelques indications sur la répartition des candidates et candidats suivant l'académie, l'âge, le genre et la profession.

**Répartition selon le genre** Le tableau suivant croise le genre et le parcours dans le concours.

Sexe	Inscrits	Présents écrit	Admissibles	Présents oral	Admis
Femmes	30	10	2	1	1
Hommes	119	52	17	12	7
Total	149	62	19	13	8
%F	20.1 %	16.1 %	10.5 %	7.7 %	12.5 %

Le jury ne peut que regretter les faibles pourcentages associés à la participation féminine à tous les niveaux du concours.

**Répartition selon l'âge** La majeure partie des admissibles et des admis a moins de 40 ans.

Âge	Inscrits	Présents écrit	Admissibles	Présents oral	Admis
Moins de 30 ans	19	10	6	6	6
De 30 à 39 ans	46	18	9	4	1
De 40 à 49 ans	36	11	1	1	1
Au moins 50 ans	48	23	3	2	0

*Répartition des candidats suivant l'âge aux différentes étapes du concours*

**Répartition selon l'académie aux différentes étapes du concours**

Académie	Inscrits	Présents écrit	Admissibles	Présents oral	Admis
Aix-Marseille	6	2	1	0	0
Amiens	3	0	0	0	0
Bordeaux	4	3	1	1	1
Clermont-Ferrand	2	2	0	0	0
Dijon	1	0	0	0	0
Grenoble	7	4	2	1	0
Guadeloupe	1	1	0	0	0
Guyane	1	0	0	0	0
La Réunion	3	0	0	0	0
Lille	8	4	2	1	1
Lyon	3	1	1	1	0
Mayotte	2	1	0	0	0
Montpellier	7	2	2	1	1
Nancy-Metz	7	3	0	0	0
Nantes	5	1	1	1	1
Nice	8	3	1	0	0
Normandie	2	1	0	0	0
Orléans-Tours	2	1	1	1	0
Paris Créteil Versailles	54	22	6	5	3
Poitiers	6	3	0	0	0
Rennes	3	1	0	0	0
Strasbourg	7	5	1	1	1
Toulouse	7	2	0	0	0

**Répartition selon la profession aux différentes étapes du concours** Ces données sont issues des déclarations faites par les candidats lors de l'inscription et sont peu précises.

Libellé Profession	Inscrits	Présents à l'écrit	Admissibles	Présents à l'oral	Admis
Etudiant en inspe en 2eme année	1	0	0	0	0
Etud.hors inspe (sans prépa)	3	0	0	0	0
Professions libérales	4	1	0	0	0
Cadres secteur privé convention collective	8	3	0	0	0
Salariés secteur tertiaire	3	1	0	0	0
Salariés secteur industriel	3	1	0	0	0
Sans emploi	26	17	11	9	5
Formateurs dans secteur privé	2	0	0	0	0
Agent admi.membre UE (hors France)	1	1	1	1	1
Personnel de direction	1	0	0	0	0
Personnel administratif et technique MEN	1	0	0	0	0
Enseignant du supérieur	5	2	1	0	0
Agent non titulaire fonction publique	1	0	0	0	0
Personnel enseignant titulaire fonction publique	2	1	1	1	0
Personnel enseignant non titulaire fonction publique	5	2	0	0	0
Personnel de la fonction publique	2	2	0	0	0
Maître contr.et agréé rem tit	4	2	0	0	0
Agrégé	1	1	1	0	0
Certifié	39	15	1	0	0
Ens.stagiaire 2e deg. col/lyc	4	2	0	0	0
PLP	4	0	0	0	0
Vacataire enseignant du sup.	4	3	1	0	0
Professeur associé 2nd degré	5	2	0	0	0
Contractuel 2nd degré	12	2	0	0	0
Contractuel enseignant supérieur	8	4	2	2	2

# Chapitre 2

## Épreuve écrite de mathématiques

### 2.1 Énoncé

Le sujet de l'épreuve écrite est disponible à l'URL

<https://www.devenirenseignant.gouv.fr/sujets-et-rapports-des-jurys-agregation-2025-1435>

ou sur le site

<https://agreg.org>.

### 2.2 Commentaires sur l'épreuve écrite d'admissibilité

- L'exercice 1, portant sur l'algèbre des anneaux principaux, a été traité par 85% des candidats.
- L'exercice 2, consacré à l'analyse des suites et des fonctions (niveau L1), a été traité par l'ensemble des candidats. Il s'agit de l'exercice le plus réussi, sans doute en raison de son caractère élémentaire.
- L'exercice 3, relatif à l'algèbre des groupes et aux actions de groupe, a été traité par 39% des candidats.
- L'exercice 4, portant sur les séries et la transformée de Fourier ainsi que sur l'analyse complexe, a été traité par 74% des candidats.
- L'exercice 5, consacré aux probabilités discrètes et comportant également un volet d'algèbre polynomiale, a été traité par 39% des candidats.
- Seuls deux candidats n'ont abordé aucun des deux problèmes.
- Les deux problèmes, d'analyse et d'algèbre, ont été traités en proportions comparables.
- Le problème d'algèbre porte sur les sous-espaces vectoriels maximaux (au sens de l'inclusion) de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ne comportant aucune matrice inversible. Il s'agit d'établir que de tels espaces vectoriels sont de dimension au plus  $n(n-1)$ , puis d'analyser le cas limite où la dimension atteint exactement  $n(n-1)$ . L'étude de ce cas conduit à la détermination des automorphismes de l'espace vectoriel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui stabilisent  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ .
- Le problème d'analyse porte sur la transformée de Legendre des fonctions convexes (définies sur un intervalle, puis sur une partie convexe d'un espace de Hilbert) et sur ses applications à la résolution d'équations, notamment en vue de leur reformulation sous une forme variationnelle (c'est-à-dire en les ramenant à l'étude de points critiques) lorsqu'elles ne le sont *a priori* pas. Le sujet s'appuie sur la théorie de la *self-duality* développée par Nassif Ghoussoub, professeur à l'Université de la Colombie-Britannique à Vancouver (Canada).

## 2.3 Proposition de corrigé

### Exercice 1

1. (a)  $A$  contient l'élément neutre pour la multiplication puisque  $1 = 1 + 0 \times i$ .  
Il est stable par différence :

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbf{Z}^4, (a + b\sqrt{2}i) - (c + d\sqrt{2}i) = (a - c) + (b - d)\sqrt{2}i \in A$$

Il est stable par produit :

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbf{Z}^4, (a + b\sqrt{2}i) \times (c + d\sqrt{2}i) = (ac - 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}i \in A$$

Finalement,  $A$  est un sous-anneau de  $(\mathbb{C}, +, \times)$ .

- (b) Soit  $z \in A$  et  $(a, b, c, d) \in \mathbf{Z}^4$  tel que  $z = a + bi\sqrt{2} = c + di\sqrt{2}$ . Alors

$$a - c = (d - b)\sqrt{2}i \in \mathbf{R} \cap i\mathbf{R} = \{0\}$$

donc  $a = c$  et  $b = d$ . L'écriture est donc unique.

- (c) On considère le rapport  $z = \frac{z_1}{z_2} = \alpha + i\beta \in \mathbf{C}$ .

Puisque  $\alpha \in \mathbf{R}$ , il existe un entier  $a$  tel que  $|\alpha - a| \leq \frac{1}{2}$ . Il suffit de prendre  $\lfloor \alpha + \frac{1}{2} \rfloor$ .

Puisque  $\beta \in \mathbf{R}$ , il existe un entier  $b$  tel que  $|\frac{\beta}{\sqrt{2}} - b| \leq \frac{1}{2}$ . Il suffit de prendre  $\lfloor \frac{\beta}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \rfloor$ . Ainsi

$$\left| z - (a + ib\sqrt{2}) \right|^2 = (\alpha - a)^2 + 2(\beta - b)^2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} < 1$$

On pose alors  $q = a + ib\sqrt{2}$  et  $r = z_1 - z_2 \times q$  qui satisfont les conditions demandées. (nb : il n'y a, en général, pas unicité de ce couple  $(q, r)$ )

- (d)  $(A, +, \times)$  est déjà un anneau commutatif intègre, en tant que sous-anneau de  $\mathbf{C}$ . Soit  $I$  un idéal non nul de  $A$ . L'ensemble  $E = \{|z|^2, z \in I \setminus \{0\}\}$  est une partie non vide de  $\mathbf{N}$ , donc admet un minimum. Soit  $z_0 \in I$  tel que  $|z_0|^2 = \min(E)$ .

Soit  $z \in I$ , d'après la question précédente, il existe  $(q, r) \in A^2$  tel que  $z = qz_0 + r$  avec  $|r| < |z_0|$ . Or,  $r = \underbrace{z}_{\in I} - \underbrace{q}_{\in A} \underbrace{z_0}_{\in I} \in I$ . Par minimalité du module de  $z_0$ , on en déduit

que  $r = 0$  et donc que  $z$  est un multiple de  $z_0$ . Réciproquement, tous les multiples de  $z_0$  sont dans  $I$  par définition d'un idéal, donc  $I = z_0A$  et est donc principal.  $A$  est donc un anneau principal.

(nb : On a redémontré que tout anneau euclidien, c'est-à-dire qui possède une division euclidienne, est principal)

2. (a) Si  $z \in A^\times$ , alors il existe  $z' \in A$  tel que  $zz' = 1$ , donc en passant au module au carré :

$$|z|^2 \times |z'|^2 = 1$$

puisque les deux facteurs sont des entiers naturels, on en déduit que  $|z|^2 = |z'|^2 = 1$ , donc  $|z| = 1$ .

- (b) De façon évidente :  $\{-1, 1\} \subset A^\times$ . Réciproquement, d'après la question précédente, tout inversible  $z$  de  $A$  vérifie  $|z|^2 = 1$ . Si on écrit  $z = a + bi\sqrt{2}$  avec  $a$  et  $b$  des entiers, alors  $a^2 + 2b^2 = 1$  donc  $a^2 = 1$  et  $b = 0$ . En effet, par l'absurde, si  $b \neq 0$ , alors  $2b^2 \geq 2$ , donc  $a^2 + 2b^2 \geq 2$ . Contradiction. Finalement  $b = 0$  et  $a = \pm 1$ . Ainsi

$$A^\times = \{-1, 1\}$$

3. (a) Soit  $z = a + bi\sqrt{2}$  un diviseur commun de  $x + i\sqrt{2}$  et  $x - i\sqrt{2}$ . C'est donc un diviseur de la différence :  $2i\sqrt{2}$ . Donc il existe  $z' = c + di\sqrt{2}$  tel que  $zz' = 2i\sqrt{2}$ . En passant au module au carré, on obtient  $|z|^2|z'|^2 = 8$ . Donc  $|z|^2 \in \{1, 2, 4, 8\}$
- $|z|^2 = 1$  correspond à  $z = \pm 1$ , qui est inversible, donc forcément diviseur commune de  $x + i\sqrt{2}$  et  $x - i\sqrt{2}$ .
  - $|z|^2 = 2$  correspond à  $z = \pm i\sqrt{2}$ . Alors  $x + i\sqrt{2} = i\sqrt{2} \times (a + bi\sqrt{2})$ , donc  $x + i\sqrt{2} = -2b + ai\sqrt{2}$ . Donc  $x$  est pair, et par l'équation (1), on obtient que  $x$  et  $y$  sont pairs, donc  $y^3 - x^2 = 2$  est un multiple de 4. Contradiction.
  - $|z|^2 = 4$  correspond à  $z = \pm 2$ . Alors  $x$  est pair, et on obtient la même contradiction qu'au cas précédent.
  - $|z|^2 = 8$  correspond à  $z = \pm 2i\sqrt{2}$ . Là encore, on obtient que  $x$  est pair et on obtient la même contradiction.

Finalement, les seuls diviseurs communs de  $x + i\sqrt{2}$  et  $x - i\sqrt{2}$  sont 1 et  $-1$ .

- (b) Soit  $z$  un PGCD de  $y$  et  $x + i\sqrt{2}$ , c'est-à-dire un générateur de l'idéal  $yA \cap (x + i\sqrt{2})A$ . Alors  $z^3$  est un PGCD de  $y^3$  et  $(x + i\sqrt{2})^3$  (par unicité, à l'ordre près et à multiplication par un inversible près, de la décomposition en produit d'irréductibles, car un anneau principal est factoriel). Or

$$y^3 = (x + i\sqrt{2})(x - i\sqrt{2})$$

avec  $(x + i\sqrt{2})$  et  $(x - i\sqrt{2})$  premiers entre eux. Ainsi, par le théorème de Gauss, tout diviseur commun de  $y^3$  et  $(x + i\sqrt{2})^3$  est un diviseur de  $x + i\sqrt{2}$ . La réciproque étant évidente,  $z^3$  est égal à  $\pm(x + i\sqrt{2})$ . Donc, quitte à changer  $z$  en  $-z$  :

$$z^3 = x + i\sqrt{2}$$

4. On pose  $z = a + ib\sqrt{2}$ , donc  $z^3 = a^3 + 3a^2bi\sqrt{2} - 6ab^2 - 2ib^3\sqrt{2}$  et on résout :

$$z^3 = x + i\sqrt{2} \Leftrightarrow (a^3 - 6a^2b) + (3a^2b - 2b^3)i\sqrt{2} = x + i\sqrt{2}$$

Par unicité de l'écriture :

$$\begin{cases} a^3 - 6ab^2 & = & x \\ b(3a^2 - 2b) & = & 1 \end{cases}$$

$b$  est donc inversible, donc vaut  $\pm 1$ . Si  $b = -1$ , la deuxième équation donne  $a^2 = -1$  qui n'a aucune solution entière. Si  $b = 1$ , on a :

$$\begin{cases} a^3 - 6a & = & x \\ 3a^2 & = & 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5a & = & x \\ a^2 & = & 1 \end{cases}$$

On a donc deux couples  $(x, z)$  solutions de  $z^3 = x + i\sqrt{2}$  :

$$(-5, 1 + i\sqrt{2}) \quad \text{et} \quad (5, -1 + i\sqrt{2})$$

5. Finalement  $x^2 = 25$ , donc  $y^3 = 25 + 2 = 27$ , donc  $y = 3$ . L'ensemble des couples  $(x, y)$  solutions dans  $\mathbf{Z}^2$  de (1) est donc

$$\{(5, 3), (-5, 3)\}$$

## Exercice 2

1. (a)  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ . Ainsi  $f'(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$ . On a donc le tableau de variations suivant sur  $]0, +\infty[$  :

$x$	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$
		↘	↗
		2	

On constate que  $]0, +\infty[$  est stable par  $f$ , donc pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n > 0$ . Puisque  $f$  est minorée par 2, on en déduit même que :

$$\forall n \geq 1, u_n \geq 2$$

(b) Par définition de  $u_n$ , on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$$

Donc la suite  $(u_n)$  est croissante. Par le théorème de la limite monotone, soit elle converge (vers une limite  $\ell \geq 2$ ), soit elle tend vers  $+\infty$ .

Si par l'absurde  $(u_n)$  converge vers  $\ell$ , par passage à la limite et par continuité de  $f$  sur  $[2, +\infty[$ , on a

$$\ell = \ell + \frac{1}{\ell} \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{\ell} = 0,$$

ce qui est absurde. Finalement  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

(c) On calcule :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{u_n^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

Donc  $u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$ .

(d) On calcule :

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = (u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n) = \frac{1}{u_n}(u_{n+1} + u_n) = 1 + \frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2$$

(e) Par le théorème de sommation des relations de comparaison dans le cas d'une série divergente à termes positifs, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n \quad \text{i.e.} \quad u_n^2 - u_0^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n \quad \text{i.e.} \quad u_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n$$

car  $u_0^2 = \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(n)$ , donc

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2n}$$

2. (a) Par hypothèse (rappelons que  $\beta \neq 0$ ) :

$$f(x) - x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \beta x^\alpha$$

Or, deux fonctions équivalentes ont localement le même signe. Donc, au voisinage de  $+\infty$ ,  $\beta x^\alpha > 0$ . Donc  $\beta > 0$ .

(b) Puisque  $f(x) > x$  pour tout  $x > 0$  et que  $v_0 > 0$ , la suite  $(v_n)$  est à valeurs dans  $\mathbf{R}_+^*$  et croît. Ainsi, d'après le théorème de la limite monotone, soit elle converge vers un élément de  $[v_0, +\infty[$ , soit elle tend vers  $+\infty$ . Si elle converge, par continuité de  $f$ , elle converge vers un point fixe strictement positif de  $f$ . Or  $f$  n'a aucun point fixe strictement positif puisque  $\forall x > 0, f(x) > x$ . Donc  $(v_n)$  tend vers  $+\infty$ .

(c) Soit  $\gamma \in \mathbf{R}^*$  ( $\gamma$  ne peut pas être nul, sinon la quantité calculée est nulle, donc converge vers 0). On calcule :

$$\begin{aligned} v_{n+1}^\gamma - v_n^\gamma &= (v_n + \beta v_n^\alpha + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n^\alpha))^\gamma - v_n^\gamma \\ &= v_n^\gamma \left( (1 + \beta v_n^{\alpha-1} + \underset{n \rightarrow +\infty}{o}(v_n^{\alpha-1}))^\gamma - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Or  $\alpha - 1 < 0$ , donc  $v_n^{\alpha-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . Ainsi :

$$v_{n+1}^\gamma - v_n^\gamma = v_n^\gamma(\beta\gamma v_n^{\alpha-1} + o_{n \rightarrow +\infty}(v_n^{\alpha-1})) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \beta\gamma v_n^{\alpha+\gamma-1}$$

Ainsi, on a une limite finie non nulle si et seulement si  $\gamma = 1 - \alpha$ , auquel cas :

$$v_{n+1}^{1-\alpha} - v_n^{1-\alpha} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \beta(1 - \alpha)$$

- (d) Puisque  $(v_n)$  diverge vers  $+\infty$  et que  $1 - \alpha > 0$ , la série à termes positifs  $\sum (v_{n+1}^{1-\alpha} - v_n^{1-\alpha})$  est divergente, et par le théorème de sommation des relations de comparaison pour les séries positives divergentes, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1}^{1-\alpha} - v_k^{1-\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \beta(1 - \alpha)n \quad \text{i.e.} \quad v_n^{1-\alpha} - v_0^{1-\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \beta(1 - \alpha)n$$

Enfin, comme  $v_0^{1-\alpha} = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n^{1-\alpha})$  (car constant), on en déduit :

$$v_n^{1-\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \beta(1 - \alpha)n \quad \text{i.e.} \quad v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} (\beta(1 - \alpha)n)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

### Exercice 3 :

1. (a)  $E$  est en bijection avec  $G^{p-1}$ . En effet :

$$\begin{aligned} \varphi : G^{p-1} &\longrightarrow e & (2.2) \\ (x_0, \dots, x_{p-2}) &\longmapsto (x_0, x_1, \dots, x_{p-2}, (x_0 x_1 \dots x_{p-2})^{-1}) \end{aligned}$$

est clairement une bijection, donc

$$\text{Card}(E) = \text{Card}(G^{p-1}) = \text{Card}(G)^{p-1} = n^{p-1}$$

Puisque  $p - 1 \geq 1$  et que  $p$  divise  $n$ , alors  $p$  divise  $\text{Card}(E) = n^{p-1}$ .

- (b) On montre tout d'abord que  $\bar{a} \cdot (x_0, \dots, x_{p-1})$  ne dépend pas du choix du représentant. Si  $\bar{a} = \bar{b}$ , alors  $a \equiv b [p]$  donc  $\phi(a) = \phi(b)$ . Cela ne dépend donc pas du choix du représentant de  $\bar{a}$ . On vérifie maintenant qu'il s'agit bien d'une action de groupe. Soit  $(x_0, \dots, x_{p-1}) \in E$ .

- $\bar{0} \cdot (x_0, \dots, x_{p-1}) = (x_{\phi(0)}, x_{\phi(1)}, \dots, x_{\phi(p-1)}) = (x_0, \dots, x_{p-1})$ .
- Si  $(\bar{a}, \bar{b}) \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}^2$ , alors

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot (x_0, \dots, x_{p-1})) = \bar{a} \cdot (x_{\phi(b)}, x_{\phi(1+b)}, \dots, x_{\phi(b+p-1)}) = (x_{\phi(a+\phi(b))}, x_{\phi(a+\phi(1+b))}, \dots, x_{\phi(a+\phi(b+p-1))})$$

et par compatibilité de l'addition avec la congruence, on a, si  $n$  et  $m$  sont des entiers :

$$\phi(n + \phi(m)) = \phi(n + m)$$

donc

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \cdot (x_0, \dots, x_{p-1})) = (x_{\phi(a+b)}, x_{\phi(a+b+1)}, \dots, x_{\phi(a+b+p-1)}) = \overline{a+b} \cdot (x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$$

C'est donc bien une action du groupe  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  sur l'ensemble  $E$ .

- (c) On applique l'équation aux classes, qui dit que les orbites des éléments de  $E$  sous cette action forment une partition de  $E$ , en mettant à part les orbites réduites à un singleton. On a donc, on notant  $Fix$  l'ensemble des orbites réduites à un élément de  $E$  :

$$\text{Card}(E) = \text{Card}(Fix) + \sum_{O(x) \text{ orbite, } x \notin Fix} \text{Card}(O) = \text{Card}(Fix) + \sum_{O(x) \text{ orbite, } x \notin Fix} \frac{\text{Card}(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})}{\text{Card}(Stab(x))}$$

avec  $Stab(x)$  le stabilisateur de  $x$ , c'est-à-dire le sous-groupe (différent de  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  puisque  $x \notin Fix$ ) de  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  qui laisse  $x$  invariant. Puisque le seul sous-groupe strict de  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$  est  $\{\bar{0}\}$  (par le théorème de Lagrange, puisque  $p$  est premier), on en déduit que

$$n^{p-1} = \text{Card}(Fix) + p \times \text{nombre d'orbites non triviales}$$

Ainsi,  $p$  divise  $\text{Card}(Fix)$ .

Enfin, si  $(x_0, \dots, x_{p-1}) \in Fix$ , alors sous l'action de  $\bar{1}$ , on a :

$$(x_0, x_1, \dots, x_{p-1}) = (x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_0)$$

donc

$$x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_{p-1} = x_0 \quad \text{et} \quad x_0^p = e$$

La réciproque est claire : si  $x_0^p = e$ , alors  $(x_0, x_0, \dots, x_0) \in Fix$ .

Ainsi  $(x_0, \dots, x_{p-1}) \in Fix$  si et seulement si  $(x_0, \dots, x_{p-1}) = (x_0, x_0, \dots, x_0)$  avec  $x_0^p = e$ .

Donc  $Fix$  est en bijection avec l'ensemble des éléments de  $G$  d'ordre 1 ou  $p$ .

Puisqu'il existe un unique élément d'ordre 1, on en déduit que le nombre d'éléments d'ordre  $p$  est congru à  $-1$  modulo  $p$ . En particulier il est non nul. Donc :

$$\exists x \in G \setminus \{e\}, \quad x^p = e.$$

2. (a) D'après la question précédente (théorème de Cauchy), puisque 2 et 13 sont des diviseurs premiers de 26,  $G$  possède au moins un élément d'ordre 2 et au moins un élément d'ordre 13. Il possède bien sûr un élément d'ordre 1 (le neutre). L'existence d'un élément d'ordre 26 n'est pas garantie : il y en a un si et seulement si  $G$  est cyclique.
- (b) Par construction,  $H$  est un sous-groupe d'ordre 13, qui est premier, donc tous ses éléments en dehors de l'élément neutre (qui est d'ordre 1) sont d'ordre 13.
- (c) Si  $a$  et  $b$  commutent, montrons que  $ab$  est d'ordre 26, donc qu'il engendre  $G$ . Soit  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $(ab)^n = e$ . Puisque  $a$  et  $b$  commutent, on a :

$$a^n = b^{-n}$$

Or  $a^n$  est d'ordre 1 ou 2, et  $b^{-n}$  d'ordre 1 ou 13. La seule façon d'avoir égalité est donc que les deux soient d'ordre 1, autrement dit que  $a^n = b^n = e$ . Or,  $a^n = e$  si et seulement si 2 divise  $n$  et  $b^n = e$  si et seulement si 13 divise  $n$ . Donc  $ab$  est d'ordre 26, et engendre donc  $G$ , qui est ainsi cyclique.

- (d) i. On calcule pour  $(x, y) \in G^2$  :

$$\varphi(xy) = bxyb^{-1} = bxb^{-1}byb^{-1} = \varphi(x)\varphi(y)$$

Donc  $\varphi$  est un endomorphisme du groupe  $G$ . Si on note  $\psi : x \mapsto b^{-1}xb$ , on constate que  $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = Id_G$ , donc  $\varphi$  est bijective. C'est donc un automorphisme du groupe  $G$ . On en déduit que pour tout  $x \in G$  et  $n \in \mathbf{Z}$ , on a :

$$x^n = e \Leftrightarrow \varphi(x^n) = \varphi(e) \Leftrightarrow \varphi(x)^n = e$$

donc  $x$  et  $\varphi(x)$  ont le même ordre.

ii. Par l'absurde, s'il existe  $c \in G \setminus H$  d'ordre 13, alors  $\langle c \rangle$  est un sous-groupe de  $G$ , d'ordre 13, engendré par n'importe lequel de ses éléments, en dehors du neutre  $e$ . De même,  $H = \langle b \rangle$  est engendré par tout ses éléments sauf  $e$ .

Ainsi  $H \cap \langle c \rangle = \{e\}$ , car si un élément  $d \neq e$  appartient à  $H \cap \langle c \rangle$ , il va engendrer tout  $H$  et tout  $\langle c \rangle$  et donc  $H = \langle c \rangle$ , ce qui est faux par hypothèse.

Donc  $\text{Card}(H \cup \langle c \rangle) = \text{Card}(H) + \text{Card}(\langle c \rangle) - \text{Card}(H \cap \langle c \rangle) = 13 + 13 - 1 = 25$ . Le dernier élément (celui qui n'appartient ni à  $H$ , ni à  $\langle c \rangle$ ) est donc  $a$  puisque  $a$  est d'ordre 2. Ainsi  $a$  est l'unique élément d'ordre 2 de  $G$ .

Par la question précédente,  $\varphi(a)$  est d'ordre 2, donc  $\varphi(a) = a$  puisque c'est l'unique élément d'ordre 2. Donc  $a$  et  $b$  commutent. Contradiction.

Donc tous les éléments d'ordre 13 sont dans  $H$ .

iii. D'après la question précédente,  $G \setminus H$  ne contient aucun élément d'ordre 13, et ne contient pas le neutre, donc pas non plus d'élément d'ordre 1. Par le théorème de Lagrange, on en déduit que tous les éléments de  $G \setminus H$  sont d'ordre 2.

$\text{Card}(cH) = \text{Card}(H) = 13$ . On suppose par l'absurde que  $H \cap cH \neq \emptyset$ . Soit  $x \in cH \cap H$ . Alors il existe  $(x, y) \in H^2$  tel que  $y = cx$ . Alors  $c = yx^{-1} \in H$ . Contradiction car  $c \notin H$ . Donc  $H \cap cH = \emptyset$ .

Pour des raisons de cardinalité, on en déduit que  $cH = G \setminus H$ .

(e) D'après la question précédente, s'il existe un groupe non abélien d'ordre 26, on connaît tous ses éléments :

$$G = H \cup aH \{b^k, k \in \llbracket 0, 12 \rrbracket\} \cup \{ab^k, k \in \llbracket 0, 12 \rrbracket\}$$

et on sait que tous les éléments de la forme  $ab^k$  sont d'ordre 2, ainsi :

$$\forall k \in \llbracket 0, 12 \rrbracket (ab^k)^2 = e \Leftrightarrow ab^k ab^k = e \Leftrightarrow ab^k = b^{-k}a$$

Soit  $(x, y) \in G^2$ , il y a 3 cas de figure selon que  $x$  et  $y$  appartiennent à  $H$  ou à  $G \setminus H$ .

- si  $(x, y) \in H^2$ , alors  $x = b^k$  et  $y = b^l$  pour  $(k, l) \in \llbracket 0, 12 \rrbracket^2$ , donc

$$xy = b^k b^l = b^{k+l}$$

- si  $x \in H$  et  $y \in G \setminus H$ , alors  $x = b^k$  et  $y = ab^l$  pour  $(k, l) \in \llbracket 0, 12 \rrbracket^2$ , et on a

$$xy = b^k ab^l = ab^{-k} b^l = ab^{l-k}$$

- si  $x \in G \setminus H$  et  $y \in H$ , alors  $x = ab^k$  et  $y = b^l$  pour  $(k, l) \in \llbracket 0, 12 \rrbracket^2$ , et on a

$$xy = ab^k b^l = ab^{k+l}$$

- si  $(x, y) \in (G \setminus H)^2$ , alors  $x = ab^k$  et  $y = ab^l$  pour  $(k, l) \in \llbracket 0, 12 \rrbracket^2$ , et on a

$$xy = ab^k ab^l = a^2 b^{k+l} = b^{k+l}$$

Dans tous les cas, il n'y a qu'une seule possibilité pour la composée  $xy$ , donc si un tel groupe existe, il est unique.

(f) Le groupe diédral  $D_{13}$  est un groupe non abélien d'ordre 26.

3. Si  $G$  est d'ordre  $2p$  avec  $p$  premier, tous les raisonnements déjà faits pour un groupe d'ordre 26 restent valides pour un groupe d'ordre  $2p$ . Il n'y a donc, à isomorphisme près, que 2 groupe d'ordre  $2p$  : le groupe cyclique et le groupe diédral :

$$\mathbf{Z}/2p\mathbf{Z} \quad \text{et} \quad D_p$$

## Exercice 4

1.  $g$  est une fonction continue / mesurable. De plus,  $g(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$  quand  $|x| \rightarrow +\infty$ , donc  $g$  est intégrable, et comme

$$|g(x)e^{-ix\xi}| = |g(x)|$$

on en déduit que  $x \mapsto g(x)e^{-ix\xi}$  est intégrable, donc  $\tilde{g}$  est bien définie.

2. (a) On écrit :

$$g(x)e^{-ix\xi} = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} \cos(x\xi) - i \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} \sin(x\xi)$$

Le deuxième terme de la somme étant impair et intégrable, son intégrale sur  $\mathbf{R}$  vaut 0. Le premier étant pair, son intégrale sur  $\mathbf{R}$  est le double de son intégrale sur  $\mathbf{R}^+$ . Donc

$$\hat{g}(\xi) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x\xi)}{\operatorname{ch}(x)} dx$$

- (b) Puisque  $\forall x > 0, 0 < e^{-2x} < 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x\xi)}{\operatorname{ch}(x)} dx = 4 \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x\xi)}{e^x + e^{-x}} dx = 4 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} \cos(x\xi)}{1 + e^{-2x}} dx \\ &= 4 \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(x\xi) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-2nx} dx = 4 \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-(2n+1)x} \cos(x\xi) dx \end{aligned}$$

- (c) Ici, le théorème d'interversion terme à terme ne va pas fonctionner car  $\int_0^{+\infty} \left| (-1)^n e^{-(2n+1)x} \cos(x\xi) \right| dx =$

$\Theta\left(\frac{1}{n}\right)$  qui n'est donc pas le terme général d'une série convergente. On va donc utiliser le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles de la série. On a, à  $\xi$  fixé :

$$\bullet h_n(x) := \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-(2k+1)x} \cos(x\xi) = \cos(x\xi) e^{-x} \frac{1 - (-1)^{n+1} e^{-(2n+2)x}}{1 + e^{-2x}}, \text{ donc}$$

$$\forall x > 0, |h_n(x)| \leq 2e^{-x}$$

qui est une fonction intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

$$\bullet h_n \text{ converge simplement sur } ]0, +\infty[ \text{ vers } x \mapsto \frac{\cos(x\xi)}{2 \operatorname{ch}(x)}.$$

On applique donc le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-(2n+1)x} \cos(x\xi) dx = \int_0^{+\infty} \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^p (-1)^n e^{-(2n+1)x} \cos(x\xi) dx \quad (2.3)$$

$$= \int_0^{+\infty} \lim_{p \rightarrow +\infty} h_p(x) dx \quad (2.4)$$

$$\stackrel{\text{CVD}}{=} \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} h_p(x) dx \quad (2.5)$$

$$= \lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^p (-1)^n e^{-(2n+1)x} \cos(x\xi) dx \quad (2.6)$$

$$= \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^p \int_0^{+\infty} (-1)^n e^{-(2n+1)x} \cos(x\xi) dx \quad (2.7)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)x} \cos(x\xi) dx \quad (2.8)$$

On calcule enfin :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)x} \cos(x\xi) dx &= \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left( e^{-(i\xi+2n+1)x} \right) dx = \operatorname{Re} \left( \int_0^{+\infty} e^{-(i\xi+2n+1)x} dx \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \left[ \frac{e^{-(i\xi+2n+1)x}}{-i\xi - (2n+1)} \right]_0^{+\infty} \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2n+1+i\xi} \right) = \frac{(2n+1)}{(2n+1)^2 + \xi^2} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \hat{g}(\xi) = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n+1)^2 + \xi^2}$$

- (d)  $f$  est  $2\pi$ -périodique est impaire, donc sa décomposition en série de Fourier réelle ne comporte que des sinus. On calcule donc pour  $n \in \mathbf{N}^*$  les coefficients en effectuant deux intégrations par parties

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sh}(xt) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sh}(xt) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{\operatorname{sh}(xt) \cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{2x}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{ch}(xt) \cos(nt)}{n} dt \\ &= -\frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n \operatorname{sh}(\pi x)}{n} + \frac{2x}{\pi} \left[ \frac{\operatorname{ch}(xt) \sin(nt)}{n^2} \right]_0^{\pi} - \frac{2x^2}{\pi} \frac{1}{n^2} \int_0^{\pi} \operatorname{sh}(xt) \sin(nt) dt \end{aligned}$$

Donc

$$b_n = -2 \frac{(-1)^n \operatorname{sh}(\pi x)}{n\pi} - \frac{x^2 b_n}{n^2}$$

donc

$$b_n \times \frac{x^2 + n^2}{n^2} = -2 \frac{(-1)^n \operatorname{sh}(\pi x)}{n\pi} \quad \text{i.e.} \quad b_n = 2(-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sh}(\pi x)}{\pi} \frac{n}{x^2 + n^2}$$

$f$  étant  $2\pi$ -périodique et  $\mathcal{C}^1$  par morceaux, par le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier converge simplement sur l'ensemble des points de continuité de  $f$ . Ainsi en  $\frac{\pi}{2}$  on obtient :

$$\operatorname{sh} \left( \frac{\pi x}{2} \right) = f \left( \frac{\pi}{2} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \sin \left( n \frac{\pi}{2} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_{2n+1} \sin \left( (2n+1) \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2 \operatorname{sh}(\pi x)}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{x^2 + (2n+1)^2}$$

En comparant avec l'expression de  $\hat{g}(\xi)$  obtenue à la question précédente, on obtient (à l'aide de la formule  $\text{sh}(2t) = 2\text{sh}(t)\text{ch}(t)$ ) :

$$\forall \xi \in \mathbf{R}^*, \hat{g}(\xi) = 2\pi \frac{\text{sh}\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)}{\text{sh}(\pi\xi)} = 2\pi \frac{\text{sh}\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)}{2\text{sh}\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)\text{ch}\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)} = \frac{\pi}{\text{ch}\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)}$$

et, en remarquant par exemple que  $\hat{g}$  est continue en 0 (ce qui se montre aisément via le théorème de convergence dominée), on en déduit que  $\hat{g}(0) = \pi$ . Finalement, pour tout  $\xi \in \mathbf{R}$ ,  $\hat{g}(\xi) = \frac{\pi}{\text{ch}\left(\frac{\pi\xi}{2}\right)}$

3. (a) Les singularités de  $j_\xi$  sont les zéros de la fonction  $\text{ch}$ . On résout donc :

$$\text{ch}(z) = 0 \Leftrightarrow e^z = -e^{-z}$$

L'égalité des modules donne  $\text{Re}(z) = \text{Re}(-z)$ , donc  $\text{Re}(z) = 0$ , donc si on note  $\theta = \text{Im}(z)$ , on obtient

$$e^{i\theta} = -e^{-i\theta} \Leftrightarrow \theta \equiv -\theta + \pi [2\pi] \Leftrightarrow 2\theta \equiv \pi [2\pi] \Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$$

Ce sont des singularités méromorphes puisque  $j_\xi$  est le rapport de 2 fonctions holomorphes. De plus, les zéros du dénominateur ne sont pas des zéros du numérateur, ce qui indique que ce ne sont pas des singularités « effaçables ». Donc l'ensemble des singularités de  $j_\xi$  est  $i\frac{\pi}{2} + i\pi\mathbf{Z}$ .

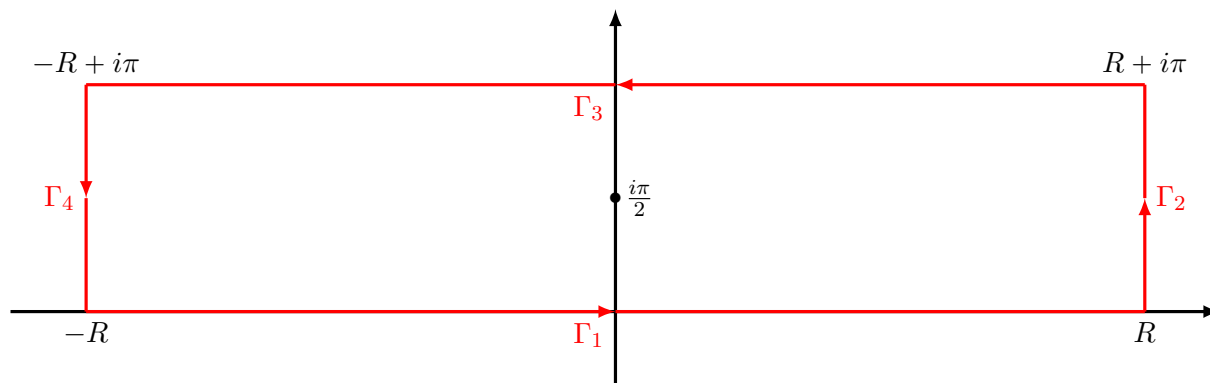
- (b) On peut obtenir la valeur du résidu en  $i\frac{\pi}{2}$  en calculant :

$$\lim_{z \rightarrow i\frac{\pi}{2}} \left( z - i\frac{\pi}{2} \right) j_\xi(z) = \lim_{z \rightarrow i\frac{\pi}{2}} e^{-iz\xi} \frac{z - i\frac{\pi}{2}}{\text{ch}(z) - \text{ch}\left(i\frac{\pi}{2}\right)}$$

On reconnaît l'inverse d'un taux d'accroissement, donc

$$\text{Res}\left(j_\xi, i\frac{\pi}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}\xi} \frac{1}{\text{ch}'\left(i\frac{\pi}{2}\right)} = e^{\frac{\pi}{2}\xi} \frac{1}{\text{sh}\left(i\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}\xi}}{i}$$

- (c) Soit  $R > 0$ . On intègre  $j_\xi$  sur le contour rectangulaire qui va de  $-R$  à  $R$ , puis de  $R$  à  $R + i\pi$ , puis de  $R + i\pi$  à  $-R + i\pi$  puis de  $-R + i\pi$  à  $-R$ , comme sur le dessin ci-dessous :



L'application du théorème des résidus donne :

$$\int_{\Gamma_1} j_\xi(z) dz + \int_{\Gamma_2} j_\xi(z) dz + \int_{\Gamma_3} j_\xi(z) dz + \int_{\Gamma_4} j_\xi(z) dz = 2i\pi \text{Res}\left(j_\xi, i\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi e^{\frac{\pi\xi}{2}}$$

Or

- $\int_{\Gamma_1} j_\xi(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{-ix\xi}}{\operatorname{ch}(x)} dx \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \hat{g}(\xi)$
- $\int_{\Gamma_2} j_\xi(z) dz = \int_0^\pi \frac{e^{-i(R+it)\xi}}{\operatorname{ch}(R+it)} idt$  et
 
$$\left| \int_0^\pi \frac{e^{-i(R+it)\xi}}{\operatorname{ch}(R+it)} idt \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{e^{-i(R+it)\xi}}{\operatorname{ch}(R+it)} i \right| dt = 2 \int_0^\pi \frac{e^{t\xi}}{|e^{R+it} + e^{-R-it}|} dt \leq 2 \int_0^\pi \frac{e^{\pi|\xi|}}{e^R - e^{-R}} dt = \frac{2\pi e^{\pi|\xi|}}{e^R - e^{-R}}$$

Donc par le théorème d'encadrement, on obtient

$$\int_{\Gamma_2} j_\xi(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

- $\int_{\Gamma_3} j_\xi(z) dz = - \int_{-R}^R \frac{e^{-i(x+i\pi)\xi}}{\operatorname{ch}(x+i\pi)} dx = -e^{\pi\xi} \int_{-R}^R \frac{e^{-ix\xi}}{-\operatorname{ch}(x)} dx \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} e^{\pi\xi} \hat{g}(\xi)$
- $\int_{\Gamma_4} j_\xi(z) dz = - \int_0^\pi \frac{e^{-i(-R+it)\xi}}{\operatorname{ch}(-R+it)} idt$  et, en menant les mêmes calculs que précédemment :

$$\left| \int_0^\pi - \frac{e^{-i(-R+it)\xi}}{\operatorname{ch}(-R+it)} idt \right| \leq \frac{2\pi e^{\pi|\xi|}}{e^R - e^{-R}}$$

Donc par le théorème d'encadrement, on obtient

$$\int_{\Gamma_4} j_\xi(z) dz \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

Finalement, en prenant la limite  $R \rightarrow +\infty$ , on obtient

$$(1 + e^{\pi\xi})\hat{g}(\xi) = 2\pi e^{\frac{\pi\xi}{2}} \quad \text{i.e.} \quad \hat{g}(\xi) = \frac{2\pi e^{\frac{\pi\xi}{2}}}{1 + e^{\pi\xi}} = \frac{\pi}{\operatorname{ch}(\frac{\pi\xi}{2})}$$

## 2.4 Exercice 5 :

1. (a) Par définition :

$$\forall t \in \mathbf{R}, g_X(t) = \sum_{k=1}^6 a_k t^k \quad \text{et} \quad g_Y(t) = \sum_{k=1}^{20} b_k t^k$$

(b)  $X$  et  $Y$  étant indépendante, on a :

$$\forall t \in \mathbf{R}, g_{X+Y}(t) = g_X(t) \times g_Y(t)$$

(c) Si  $X + Y$  suit une loi uniforme sur  $[[2, 26]]$ , alors

$$\forall t \in \mathbf{R}, g_{X+Y}(t) = \frac{1}{26} \sum_{k=2}^{26} t^k$$

(d) Par l'absurde, si  $X + Y$  suit une loi uniforme sur  $[[2, 26]]$ , alors

$$\forall t \in \mathbf{R}, \frac{1}{26} \sum_{k=2}^{26} t^k = \sum_{k=1}^6 a_k t^k \times \sum_{k=1}^{20} b_k t^k$$

On divise par  $t^2$ , donc :

$$\forall t \in \mathbf{R}^*, \frac{1}{26} \sum_{k=0}^{24} t^k = \sum_{k=0}^5 a_{k+1} t^k \times \sum_{k=0}^{19} b_{k+1} t^k$$

En posant

$$P = \frac{1}{26} \sum_{k=0}^{24} X^k, \quad Q = \sum_{k=0}^5 a_{k+1} X^k \quad \text{et} \quad R = \sum_{k=0}^{19} b_{k+1} X^k$$

les polynômes  $P$  et  $QR$  coïncident donc sur l'ensemble infini  $\mathbf{R}^*$  donc sont égaux. Remarquons que  $P$  est un polynôme de degré 24 dont les racines complexes sont les racines 25-ièmes de l'unité différentes de 1 donc il ne possède aucune racine réelle.  $Q$  est un polynôme réel de degré 5 donc possède une racine réelle, qui est aussi racine de  $P$ . D'où la contradiction. Finalement,  $X + Y$  ne peut pas suivre une loi uniforme sur  $\llbracket 2, 26 \rrbracket$ .

2. (a)  $g_X$  et  $g_Y$  sont polynomiales car  $X$  et  $Y$  prennent un nombre fini de valeurs entières. De plus :

$$\forall t \in \mathbf{R}, g_X(t) = \sum_{k=1}^n a_k t^k = t \times \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} t^k \quad \text{et} \quad g_Y(t) = t \times \sum_{k=0}^{p-1} b_{k+1} t^k$$

Si on pose

$$P_X = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} X^k \quad \text{et} \quad P_Y = \sum_{k=0}^{p-1} b_{k+1} X^k,$$

on obtient l'égalité voulue. Ce sont les seuls polynômes qui conviennent puisqu'on impose leurs valeurs sur une infinité de points (à savoir sur  $\mathbf{R}^*$ ).  $P_X$  est de degré  $n - 1$  et  $P_Y$  de degré  $p - 1$ .

- (b) Comme dans la première partie, puisque  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, on a :

$$g_{X+Y} = g_X \times g_Y$$

- (c) D'après la question précédente, après division par  $t^2$ , on obtient

$$\forall t \in \mathbf{R}^*, P_X(t)P_Y(t) = \frac{1}{n+p} \sum_{k=0}^{n+p-2} t^k \quad \text{i.e.} \quad P_X P_Y = Q$$

avec  $Q = \frac{1}{n+p} \sum_{k=0}^{n+p-2} X^k$ . Les racines de  $P_X$  et  $P_Y$  sont donc les racines de  $Q$ . Or, les racines de  $Q$  sont les racines  $(n+p-1)$ -ièmes de l'unité différentes de 1, donc sont toutes de module 1, et elles sont toutes simples, car  $Q$  ne possède que des racines simples. Donc les racines de  $P_X$  et  $P_Y$  sont toutes de module 1 et simples.

Le raisonnement qu'on va effectuer sur  $P_X$  s'effectuera de la même façon sur  $P_Y$ .

$P_X$  n'a que des racines de module 1, et est à coefficients réels, donc si  $r$  est racine de  $P_X$ , alors  $\bar{r} = \frac{1}{r}$  est aussi racine de  $P_X$ . Puisque toutes les racines de  $P_X$  sont simples, on en déduit que

$$t \mapsto P_X(t) \quad \text{et} \quad t \mapsto t^{n-1} P_X(1/t)$$

sont deux fonctions polynomiales de degré  $n - 1$  qui coïncident sur l'ensemble des racines de  $P_X$ , qui est de cardinal  $n - 1$ . Elles sont donc colinéaires :

$$\exists \lambda \in \mathbf{R}, \forall t \in \mathbf{R}^*, P_X(t) = \lambda t^{n-1} P_X(1/t)$$

On évalue enfin en  $t = 1$ , ce qui donne :

$$\lambda = 1$$

Donc

$$\forall t \in \mathbf{R}^*, P_X(t) = t^{n-1}P_X(1/t) \quad \text{i.e.} \quad \forall t \in \mathbf{R}^*, a_1 + a_2t + \dots + a_nt^{n-1} = a_n + a_{n-1}t + a_{n-2}t^2 + \dots + a_1t^{n-1}$$

Puisque les deux polynômes coïncident sur l'ensemble infini  $\mathbf{R}^*$ , ils sont égaux :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_k = a_{n+1-k}$$

Le même raisonnement vaut aussi pour  $P_Y$ .

- (d) D'après les égalités obtenues sur les coefficients, on en déduit que  $X$  et  $n + 1 - X$  ont la même fonction génératrice, donc suivent la même loi.  $Y$  et  $n + 1 - X$  sont indépendantes, donc  $Y + n + 1 - X$  suit la même loi que  $X + Y$ , à savoir une loi uniforme sur  $\llbracket 2, n + p \rrbracket$ . En retranchant  $n + 1$ , on en déduit que  $Y - X$  suit une loi uniforme sur  $\llbracket 1 - n, p - 1 \rrbracket$ .
- (e) Puisque  $Y - X$  suit une loi uniforme sur  $\llbracket 2, n + p \rrbracket$ , on a en particulier

$$\frac{1}{n + p - 1} = P(Y - X = 0) = P(X = Y) = \sum_{k=1}^n P(X = i)P(Y = i) = \sum_{k=1}^n a_i b_i$$

Or  $P(X + Y = 2) = \frac{1}{n + p - 1} = P(X = 1)P(Y = 1) = a_1 b_1$ . On obtient alors :

$$\frac{1}{n + p - 1} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + \sum_{i=2}^n a_i b_i = \frac{1}{n + p - 1} + \sum_{i=2}^n a_i b_i$$

Donc

$$\sum_{i=2}^n a_i b_i = 0$$

Comme tous les termes de cette somme sont positifs ou nuls, on en déduit que

$$\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, a_i b_i = 0$$

- (f) Pour  $k \in \llbracket 2, n + p \rrbracket$ , en écrivant  $P(Y + X = k) = \frac{1}{n + p - 1}$ , on obtient

$$\frac{1}{n + p - 1} = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{i=1}^k a_i b_{k-i} = a_1 b_{k-1} + \underbrace{\sum_{i=2}^k a_i b_{k-i}}_{\geq 0}$$

Donc

$$a_1 b_{k-1} \leq \frac{1}{n + p - 1} = a_1 b_1$$

et comme  $a_1 > 0$ , en divisant par  $a_1$ , on obtient

$$b_{k-1} \leq b_1$$

Donc  $\forall i \in \llbracket 2, p \rrbracket, 0 \leq b_i \leq b_1$ .

Par un raisonnement identique, on obtient

$$\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, 0 \leq a_i \leq a_1.$$

- (g) Puisque  $n \leq p$  par hypothèse, il nous faut montrer que  $n \neq p$ .  
 Par l'absurde, si  $n = p$ , alors, puisque  $n \geq 2$ , on a  $a_n b_n = 0$ , et on a aussi  $a_n b_n = a_1 b_1 > 0$ .  
 C'est une contradiction. donc  $n \neq p$ .
- (h) Montrons par récurrence forte sur  $i$  que

$$\forall i \geq 2, a_i \in \{0, a_1\} \text{ et } b_i \in \{0, b_1\}$$

Initialisation. On sait que  $a_2 b_2 = 0$ , donc  $a_2 = 0$  ou  $b_2 = 0$ .

Par les calculs effectués en question 2.f, on obtient

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 = \frac{1}{n+p-1} = a_1 b_1$$

Si  $a_2 = 0$ , alors  $a_1 b_2 = a_1 b_1$ , donc  $b_2 = b_1$ .

Si  $b_2 = 0$ , alors  $a_2 b_1 = a_1 b_1$ , donc  $a_2 = a_1$ .

Dans tous les cas, on obtient  $a_2 \in \{0, a_1\}$  et  $b_2 \in \{0, b_1\}$ .

Hérédité. Soit  $k \geq 2$  tel que la propriété soit vraie pour tout  $i \in \llbracket 2, k \rrbracket$ . Montrons qu'elle l'est encore pour  $i = k + 1$ .

Tout d'abord si  $k \geq p$ , alors  $k + 1 > p \geq n$ , donc  $a_{k+1} = b_{k+1} = 0$ .

Sinon, par les calculs effectués en 2.f, on a

$$a_1 b_{k+1} + \dots + a_{k+1} b_1 = \frac{1}{n+p-1} = a_1 b_1$$

On pose  $S = a_2 b_k + a_3 b_{k-1} + \dots + a_k b_2$ . Par hypothèse de récurrence, tous les termes de  $S$  valent 0 ou  $a_1 b_1$ . Puisque la somme  $S$  est inférieure ou égale à  $a_1 b_1$ , on en déduit que

$$S = 0 \text{ ou } S = a_1 b_1$$

Si  $S = a_1 b_1$ , alors

$$a_1 b_{k+1} + a_{k+1} b_1 = 0$$

Puisque les deux termes de cette somme sont positifs, ils sont tous deux nuls, et comme  $a_1 > 0$  et  $b_1 > 0$ , on en déduit que  $a_{k+1} = b_{k+1} = 0$ .

Si  $S = 0$ , alors

$$a_1 b_{k+1} + a_{k+1} b_1 = a_1 b_1$$

Comme  $a_{k+1} b_{k+1} = 0$ , soit  $a_{k+1} = 0$ , et donc  $b_{k+1} = b_1$ , soit  $b_{k+1} = 0$  et  $a_{k+1} = a_1$ .

Cela termine la récurrence.

- (i) D'après les questions précédentes, tous les  $a_i$  prennent la seule valeur 0 ou  $a_1 > 0$ , et leur somme vaut 1. De même pour les  $b_i$ . De plus les  $a_i$  et  $b_j$  sont symétriques dans le sens où  $a_i = a_{n+1-i}$  et  $b_j = b_{p+1-i}$ . On va noter dans la suite  $q$  le nombre de valeurs prises par  $Y$  de telle sorte que  $b_1 = \frac{1}{q}$ .

On remarque que dès que les  $a_i$  sont fixés, les  $b_j$  le sont aussi par récurrence forte puisque

$$b_i + \sum_{k=\max(1, i-n+1)}^{i-1} a_{i+1-k} b_k + \frac{1}{n+p-1}$$

- Si  $n = 2$ ,  $a_1 = a_2$  et leur somme vaut 1, donc  $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ . On va donc écrire un tableau récapitulatif la loi possibles pour  $Y$  en fonction de celle pour  $X$ .

$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$	...
1/2	1/2	1/q	0	1/q	0	1/q	0	1/q	...

On constate qu'on obtient 1  $b_i$  sur 2 qui vaut 0 et 1 sur 2 qui vaut  $\frac{1}{q}$ .

Puisque  $b_p = b_1$ , on en déduit que  $p$  est impair, et donc  $p = 2q - 1$ .

Réciproquement, si  $p = 2q - 1$ . et  $Y$  suit une loi uniforme sur l'ensemble des nombre impairs de  $\llbracket 1, 2q-1 \rrbracket$ , indépendante de  $X$ , alors  $X + Y$  suit une loi uniforme sur  $\llbracket 2, p+2 \rrbracket$ .

Donc la condition nécessaire et suffisante sur  $p$  est «  $p$  impair ».

- Si  $n = 3$ , il y a a priori deux possibilités pour la loi de  $X$  : soit  $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{3}$ , soit  $a_1 = a_3 = \frac{1}{2}$  et  $a_2 = 0$ . On obtient alors le tableau suivant :

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$	...
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{q}$	0	0	$\frac{1}{q}$	0	0	$\frac{1}{q}$	...
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{q}$	$\frac{1}{q}$	0	0	$\frac{1}{q}$	$\frac{1}{q}$	...	...

On constate que pour la première ligne du tableau,  $p \equiv 1 [3]$ , et pour la seconde ligne,  $p \equiv 2 [4]$ .

Réciproquement, ces deux cas donnent bien lieu à une loi uniforme. Donc la condition nécessaire et suffisante sur  $p$  est

$$p \equiv 1 [3] \quad \text{ou} \quad p \equiv 2 [4]$$

- Si  $n = 4$ , il y a a priori deux possibilités pour la loi de  $X$  : soit  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{4}$ , soit  $a_1 = a_4 = \frac{1}{2}$  et  $a_2 = a_3 = 0$ . On obtient alors le tableau suivant :

$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$	$b_8$	$b_9$	...
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{q}$	0	0	0	$\frac{1}{q}$	0	0	0	$\frac{1}{q}$	...
$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{q}$	$\frac{1}{q}$	$\frac{1}{q}$	0	0	0	$\frac{1}{q}$	$\frac{1}{q}$	$\frac{1}{q}$	...

On constate que pour la première ligne du tableau,  $p \equiv 1 [4]$ , et pour la seconde ligne,  $p \equiv 3 [6]$ .

Réciproquement, ces deux cas donnent bien lieu à une loi uniforme. Donc la condition nécessaire et suffisante sur  $p$  est

$$p \equiv 1 [4] \quad \text{ou} \quad p \equiv 3 [6]$$

## Problème algèbre

### Partie I

1.  $I_n$  engendre une droite vectorielle, non incluse dans l'hyperplan  $H$ , puisque  $I_n$  est inversible. Donc, d'après les propriétés classiques sur les hyperplans,  $I_n$  engendre un supplémentaire de  $H$ .
2. On suppose  $A$  nilpotente. Soit  $p$  le plus petit nombre impair supérieur ou égal à l'indice de nilpotence de  $A$ . Alors, comme  $I_n$  et  $A$  commutent,

$$I_n = I_n^p + A^p = (I_n + A) \times \left( \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k A^k \right) = \left( \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k A^k \right) \times (I_n + A)$$

Donc  $I_n + A$  est inversible, d'inverse

$$(I_n + A)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k A^k$$

3. Soit  $N$  une matrice nilpotente. D'après la question 1, il existe  $\lambda \in \mathbf{K}$  et  $B \in H$  telle que

$$N = \lambda I_n + B$$

On suppose par l'absurde que  $N \notin H$ . Alors donc  $\lambda \neq 0$  et, en notant  $N' = \frac{-1}{\lambda} N$ ,

$$-B = \lambda I_n - N = \lambda(I_n + N') \quad \text{i.e.} \quad \frac{-1}{\lambda} B = I_n + N'$$

Comme  $N'$  est nilpotente, la question 2 assure que  $\frac{-1}{\lambda} B$  est inversible, et donc  $B$  est inversible. Or,  $B \in H$ . D'où la contradiction. Finalement,  $H$  contient toutes les matrices nilpotentes.

4.  $H$  contient toutes les matrices nilpotentes. En particulier les matrices  $A$  et  $B$  suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$H$  est stable par somme, donc  $A + B \in H$ . Or

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et un développement par rapport à la première ligne, donne

$$\det(A + B) = (-1)^{n+1}$$

Donc  $A + B \in H \cap \text{GL}_n(\mathbf{K})$ . C'est une contradiction, donc  $H$  contient nécessairement des matrices inversibles.

## Partie II

5. Tous les éléments de  $\mathcal{M}_1(\mathbf{K})$  sont inversibles sauf la matrices nulle, donc  $\mathcal{P}_1$  est trivialement vérifiée.

Pour  $n = 2$  on utilise le résultat de la partie I : aucun hyperplan ne peut contenir uniquement des matrices inversibles. Donc un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{K})$  ne contenant aucune matrice inversible ne peut pas contenir d'hyperplan, donc il est de dimension au plus 2 (car  $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbf{K})) = 4$ ).

6. (a) Soit  $G$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  formé des matrices dont toutes les colonnes d'indice  $2, 3, 4, \dots, n$  sont nulles.  $G$  est clairement isomorphe à  $\mathbf{K}^n$ , donc de dimension  $n$ .

$F \cap G$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  comme intersection de sous-espaces vectoriels, et on a :

$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) = \dim(F) + n - \dim(F + G)$$

Or,  $F + G$  étant un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , de dimension  $n^2$ , on a  $\dim(F + G) \leq n^2$ .  
Donc

$$\dim(F \cap G) \geq \dim(F) + n - n^2 = \dim(F) - n(n - 1) > 0$$

Donc  $F \cap G \neq \{0\}$ . Il existe donc une matrice  $A \in F$ , non nulle, dont toutes les colonnes sont nulles sauf la première.

(b)  $A$  est clairement de rang 1, comme  $E_{1,1}$ . Deux matrices de même rang sont équivalentes, donc

$$\exists (P, Q) \in \text{GL}_n(\mathbf{K}), \quad PAQ = E_{1,1}$$

(c) On remarque que  $f$  est linéaire, bijective de bijection réciproque

$$\begin{aligned} g : \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) & (2.9) \\ M &\longmapsto P^{-1}MQ^{-1} \end{aligned}$$

$f$  est donc un automorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .  $F' = f(F)$  est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  en tant qu'image d'un sous-espace par une application linéaire.

De plus  $f$  étant injective, elle conserve la dimension, donc  $\dim(F') = \dim(F)$ .

La multiplication à droite comme à gauche par une matrice inversible conserve le rang d'une matrice, donc  $f$  conserve le rang des matrices. En particulier,  $F'$  ne contient aucune matrice inversible, sinon l'image par  $g$  d'une telle matrice serait inversible et dans  $F$ .

Enfin  $E_{1,1} = f(A) \in f(F) = F'$ .

- (d) Pour tous  $(M, M') \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$ , en notant

$$M = \left( \begin{array}{c|c} a_M & L_M \\ \hline C_M & g(M) \end{array} \right) \quad \text{et} \quad M' = \left( \begin{array}{c|c} a_{M'} & L_{M'} \\ \hline C_{M'} & g(M') \end{array} \right)$$

on a :

$$\lambda M + M' = \left( \begin{array}{c|c} \lambda a_M + a_{M'} & \lambda L_M + L_{M'} \\ \hline \lambda C_M + C_{M'} & \lambda g(M) + g(M') \end{array} \right)$$

donc  $g(\lambda M + M') = \lambda g(M) + g(M')$ . L'application  $g$  est donc linéaire.

On suppose par l'absurde qu'il existe  $M \in F'$  telle que  $g(M)$  est inversible.

Puisque  $E_{1,1} \in F'$ , qui est un sous-espace vectoriel, pour tout  $t \in \mathbf{K}$ ,  $M_t = tE_{1,1} + M \in F'$ .

Or  $\det(M_t)$  est une fonction affine de  $t$  de coefficient directeur  $\det(g(M)) \neq 0$ . Cette fonction affine s'annule donc en un unique  $t_0 \in \mathbf{K}$ .  $\mathbf{K}$  n'étant pas réduit à un élément, on en déduit qu'il existe  $t \in \mathbf{K}$  (il suffit de choisir  $t \neq t_0$ ) tel que  $\det(M_t) \neq 0$ . Ainsi  $M_t \in F' \cap \text{GL}_n(\mathbf{K})$ . Contradiction.

Donc pour tout  $M \in F'$ ,  $g(M)$  est non inversible.

- (e) D'après la question précédente,  $g(F')$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K})$  qui ne contient aucune matrice inversible. D'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que  $\dim(g(F')) \leq (n-1)(n-2) = n^2 - 3n + 2$ .

On constate que

$$G := \text{Vect}((E_{i,1})_{1 \leq i \leq n}) \oplus \text{Vect}((E_{1,j})_{2 \leq j \leq n}) \subset \ker(g)$$

$G$  est de dimension  $2n - 1$  puisqu'une base en est  $(E_{1,1}, E_{2,1}, \dots, E_{n,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, \dots, E_{1,n})$ .

L'application du théorème du rang à  $g$  donne :

$$\dim(F') = \dim(\ker(g)) + \dim(g(F'))$$

Or  $\dim(g(F')) \leq n^2 - 3n + 2$  et  $\dim(\ker(g)) \leq \dim(G) \leq 2n - 1$ . On obtient donc

$$\dim(F') \leq 2n - 1 + n^2 - 3n + 2 = n^2 - n + 1$$

Or, par hypothèse,  $\dim(F') \geq n^2 - n + 1$ , donc on a égalité, et les inégalité précédentes sont des égalités :

$$\dim(g(F')) = n^2 - 3n + 2 \quad \text{et} \quad \dim(\ker(g)) = 2n - 1$$

En particulier  $\ker(g) = G$ . Donc  $F'$  contient tous les vecteurs de  $\ker(g)$ , en particulier tous les  $E_{i,1}$  et les  $E_{1,j}$ .

- (f) Puisque  $F'$  contient tous les  $E_{i,1}$ , en réappliquant le même raisonnement, en remplaçant  $E_{1,1}$ , par chacun des  $E_{i,1}$ , on en déduit de la même façon que tous les  $E_{i,j}$  appartiennent à  $F'$ . Finalement, on en déduit que  $F' = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ . C'est une contradiction, donc  $\dim(F) \leq n(n-1)$ .

### Partie III

7. (a)  $E_{1,1}$  et  $E_{i,j}$  sont de même rang égal à 1 donc sont équivalentes.

Ainsi, si  $E_{1,n} \in \text{Vect}(\text{GL}_n(\mathbf{K}))$ , puisque  $E_{i,j} = P_j E_{1,n} Q_i$  et que la multiplication à gauche par  $P_j$  et à droite par  $Q_i$  est linéaire et conserve l'inversibilité, on en déduit que pour tout couple  $(i, j)$ ,  $E_{i,j} \in \text{Vect}(\text{GL}_n(\mathbf{K}))$ .

- (b)  $E_{1,n} \in \text{Vect}(\text{GL}_n(\mathbf{K}))$  car  $E_{1,n} = (I_n + E_{1,n}) - I_n$ , avec  $I_n$  et  $I_n + E_{1,n}$  inversibles car de déterminant 1. Donc tous les  $E_{i,j}$  appartiennent à  $\text{Vect}(\text{GL}_n(\mathbf{K}))$ . En prenant le sous-espace engendré, on en déduit que

$$\text{Vect}(\text{GL}_n(\mathbf{K})) = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$$

8. (a) Soit  $(x, y) \in F^2$ . Alors

$$q(x+y) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \varphi(x+y, x+y) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \underbrace{q(x)}_{=0} + \underbrace{q(y)}_{=0} + 2\varphi(x, y) = 0$$

Donc, puisque  $\mathbf{K}$  n'est pas de caractéristique 2, on obtient  $\varphi(x, y) = 0$ .

- (b) Première méthode (qui nécessite des connaissances sur les formes quadratiques) :  
Si  $F$  est un SETI de dimension  $p$ , puisque la forme quadratique est non dégénérée, on a  $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$ . De plus  $F \subset F^\perp$  (où l'orthogonal est pris au sens de la forme quadratique).

Finalement  $\dim(F^\perp) = n - p$  et puisque  $F \subset F^\perp$ ,  $p \leq n - p$ , autrement dit  $p \leq \frac{n}{2}$ .

Deuxième méthode (à la main, sans connaissance sur les formes quadratiques) :

Soit  $F$  un SETI de dimension  $p$  pour  $q$  et  $b = (e_1, \dots, e_n)$  une base adaptée à  $F$ . Si on pose  $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$ , alors  $A = (a_{ij})$  est une matrice symétrique de la forme :

$$A = \left( \begin{array}{c|c} 0_p & B \\ \hline B^\top & C \end{array} \right)$$

avec  $B \in \mathcal{M}_{p, n-p}(\mathbf{K})$  et  $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbf{K})$ . Alors en notant  $A_1 = \left( \begin{array}{c} 0_p \\ B^\top \end{array} \right)$  et  $A_2 = \left( \begin{array}{c} B \\ C \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{n, n-p}(\mathbf{K})$ , on a :

$$\text{rg}(A) \leq \text{rg}(A_1) + \text{rg}(A_2) = \underbrace{\text{rg}(B)}_{\leq n-p} + \underbrace{\text{rg}(A_2)}_{\leq n-p} \leq 2(n-p)$$

Or,  $A$  est inversible. En effet, par l'absurde, si  $A$  est non inversible, ses lignes sont linéairement dépendantes. Donc il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$  tel que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i L_i = (0 \dots 0)$$

Donc  $\varphi(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \cdot)$  est la forme linéaire nulle, ce qui est en contradiction avec le caractère non dégénéré de  $q$ . Finalement,  $n \leq 2(n-p)$  donc  $p \leq \frac{n}{2}$ , i.e.  $\dim(F) \leq \frac{n}{2}$ .

## Partie IV

9. (a) Puisque  $M \in F$  et  $\Pi_n \in F$ ,  $M + t\Pi_n \in F$  car  $F$  est stable par combinaison linéaire, donc est non inversible car  $F$  ne contient que des matrices non inversibles.
- (b) On déduit de la question précédente que pour tout  $t \in \mathbf{K}$ ,  $\det(t\Pi_n + M) = 0$ .  
En développant par rapport à la dernière colonne (ou dernière ligne), on obtient que  $\det(t\Pi_n + M)$  est polynomial en  $t$ , de degré au plus  $n-1$  et dont le terme de degré  $n-1$  vaut  $\alpha_M t^{n-1}$ .  
Puisque ce polynôme de degré  $\leq n-1$  s'annule en au moins  $n$  valeurs, il est nul, donc  $\alpha_M = 0$ .  
Si on note  $m_{i,j}$  le coefficient d'indice  $(i, j)$  de la matrice  $M + t\Pi_n$ , alors

$$0 = \det(M + t\Pi_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{i, \sigma(i)}$$

Si  $\sigma = Id$ , alors on a le produit des coefficient diagonaux, qui vaut 0.

Si  $\sigma = (i\ n)$  est une transposition, on obtient un terme polynomial de degré au plus  $n - 2$  dont le terme de degré  $n - 2$  vaut  $m_{i,n}m_{n,i}t^{n-2}$ .

Pour toutes les autres permutations, on obtient un terme polynomial de degré au plus  $n - 3$ .

Donc le terme de degré  $n - 2$  vaut  $\sum_{k=1}^{n-1} m_{n1}m_{1n}t^{n-2} = L_M C_M t^{n-2}$ . Puisque le polynôme est nul, ce terme est nul, donc

$$L_M C_M = 0$$

(c) L'application

$$\begin{aligned} q : \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbf{K}) &\longrightarrow \mathbf{K} \\ (L, C) &\longmapsto LC \end{aligned} \quad (2.10)$$

est une forme quadratique sur  $\mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbf{K})$  (si on identifie  $\mathcal{M}_1(\mathbf{K})$  avec  $\mathbf{K}$ ). Sa forme bilinéaire symétrique associée est donc

$$\begin{aligned} \varphi : (\mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbf{K}))^2 &\longrightarrow \mathbf{K} \\ ((L_1, C_1), (L_2, C_2)) &\longrightarrow \frac{1}{2}(L_1 C_2 + L_2 C_1) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Cette forme quadratique est non dégénérée. En effet si le couple  $(L_1, C_1) \neq (0, 0)$ , alors la forme linéaire obtenue est non nulle. Il suffit de l'évaluer sur un couple  $(L_2, C_2)$  dont tous les coefficients sont nuls, sauf un seul bien choisi, qui sera multiplié par un coefficient non nul de  $L_1$  ou  $C_1$ .

On note

$$\begin{aligned} f : F &\longrightarrow \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbf{K}) \times \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbf{K}) \\ M &\longmapsto (L_M, C_M) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$f$  est linéaire et d'après la question précédente,  $f(F)$  est un SETI pour la forme quadratique  $q$ , donc l'application du lemme 2 qui nous dit que  $f(F)$  est de dimension au plus  $n - 1$ .

On en déduit donc que

$$\dim(F) = \dim(\psi(F)) + \dim(f(F)) \leq (n - 1)^2 + n - 1 = n(n - 1) = \dim(F)$$

Ainsi, toutes les inégalités sont des égalités. Donc  $\dim(f(F)) = n - 1$  et  $\dim(\psi(F)) = (n - 1)^2$ .

Donc  $\psi(F) = \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K})$  par inclusion et égalité des dimension, et  $f(F)$  est de dimension exactement  $n - 1$ .

(d) D'après la question précédente, l'application  $M \mapsto (\psi(M), f(M))$  est un isomorphisme. En particulier,  $F$  contient toutes les matrices de la forme

$$\left( \begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right), \quad M \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K})$$

Soit alors  $N \in \text{GL}_{n-1}(\mathbf{K})$  et  $N' = \left( \begin{array}{c|c} N & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$ . Alors  $F' = N'F$  est un sous-espace vectoriel de dimension  $n(n - 1)$ , ne contenant aucune matrice inversible, et contenant la matrice  $\Pi_n$ , donc elle vérifie les mêmes hypothèses que  $F$ .

Soit donc  $M \in F$ , alors  $N'M \in F'$  avec

$$M = \left( \begin{array}{c|c} \psi(M) & C_M \\ \hline L_M & 0 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad N'M = \left( \begin{array}{c|c} N\psi(M) & NC_M \\ \hline L_M & 0 \end{array} \right)$$

Ainsi, puisque les matrices de  $F'$  vérifient les mêmes identités que celles de  $F$ , on en déduit que  $L_M N C_M = 0$ , et ce pour toute matrice inversible  $N$ . Or, d'après le lemme 1,  $\text{Vect}(\text{GL}_{n-1}(\mathbf{K})) = \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K})$ . On en déduit par linéarité de l'application  $N \mapsto LNC$  que

$$\forall N \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbf{K}), L_M N C_M = 0$$

10. Si on suppose à la fois  $L_M$  et  $C_M$  non nuls, alors le noyau de  $L_M$  est un hyperplan de  $\mathbf{K}^{n-1}$ . Soit  $i$  tel que la  $i$ -ième ligne de  $C_M$  est non nulle et  $N$  une matrice carrée de taille  $n-1$  dont toutes les colonnes sont nulles sauf la  $i$ -ième qui est une matrice colonne n'appartenant pas à  $\ker(L_M)$ . Alors  $L_M N C_M \neq 0$ . Par contraposition, on en déduit que pour tout  $(L, C) \in f(F)$ ,  $L = 0$  ou  $C = 0$ . Puisque  $f(F)$  est un espace vectoriel, soit  $L$  est toujours nul, soit  $C$  est toujours nul. Dans le premier cas ( $L$  toujours nul),  $F$  est l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  dont la dernière ligne est nulle. C'est donc  $I_H$  avec  $H$  l'hyperplan engendré par les  $n-1$  premiers vecteurs de la base canonique.

Dans le second cas ( $C$  toujours nul),  $F$  est l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  dont la dernière colonne est nulle. C'est donc  $K_D$  avec  $D$  la droite engendrée par le dernier vecteur de la base canonique.

11. On commence par montrer que  $F$  contient une matrice de rang  $n-1$ .

Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $E_{ij} \notin F$ . Une telle matrice existe car  $F$  est un sous-espace strict de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ .

Alors  $F + \mathbf{K}E_{ij}$  est de dimension  $n(n-1) + 1$  donc contient une matrice inversible  $M$  de la forme  $N + \lambda E_{ij}$  avec  $N \in F$ . Or  $n = \text{rg}(N + \lambda E_{ij}) \leq \text{rg}(N) + \text{rg}(E_{ij})$ . Donc

$$\text{rg}(N) \geq n-1$$

Puisque  $N \in F$ , donc est non inversible, on a  $\text{rg}(N) = n-1$ .

Or, toute matrice de rang  $n-1$  est équivalente à  $\Pi_n$ , donc il existe  $(P, Q) \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$ , tel que

$$\Pi_n = PNQ$$

Si on pose  $f : M \mapsto PMQ$ , alors  $f$  est un isomorphisme (donc conserve la dimension) et conserve le rang des matrices. Ainsi  $f(F)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , de dimension  $n-1$ , qui contient  $\Pi_n$ . Ainsi, d'après la question précédente,

- Soit  $f(F)$  est l'ensemble des matrices dont la dernière colonne est nulle. Ainsi  $f(F) = K_D$  où  $D$  est la droite engendrée par le dernier vecteur de la base canonique. Donc  $F = K_{Q^{-1}(D)}$ .
- Soit  $f(F)$  est l'ensemble des matrices dont la dernière ligne est nulle. Ainsi  $f(F) = I_H$  où  $H$  est l'hyperplan engendré par les  $n-1$  premiers vecteurs de la base canonique. Donc  $F = K_{P(D)}$ .

## Partie V

12. Puisque  $\text{GL}_n(\mathbf{K}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , on a  $f(\text{GL}_n(\mathbf{K})) \subset f(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$ . Ainsi

$$\text{GL}_n(\mathbf{K}) \subset f(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$$

En prenant le sous-espace engendré, on a d'après le lemme 1

$$\mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \subset f(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$$

Ainsi  $f$  est surjective, donc bijective puisque c'est une endomorphisme ne dimension finie.

13. Puisque  $f$  est bijective et envoie les matrices inversibles sur les matrices inversibles, elle envoie les matrices non inversibles sur les matrices non inversibles.

Ainsi  $f(F)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  de dimension  $n(n-1)$ , ne contenant aucune matrice inversible. D'après le résultat de la partie IV, il est de la forme  $K_D$  ou  $I_H$ .

14. On considère deux sous-espaces vectoriels  $K_{D_1}$  et  $K_{D_2}$  avec  $D_1 \neq D_2$ . On remarque que la transposition matricielle envoie les sous-espaces de la forme  $K_D$  sur les sous-espaces de la forme  $I_H$  et réciproquement.

Ainsi, quitte à composer  $f$  par la transposition matricielle, on suppose que  $f(K_{D_1}) = K_{D'_1}$ . On suppose par l'absurde que  $f(K_{D_2})$  est de la forme  $I_H$ . Alors  $K_{D_1} \cap K_{D_2}$  est l'ensemble des matrices dont le noyau contient  $D_1 \oplus D_2$ , qui est un plan vectoriel, donc  $\dim(K_{D_1} \cap K_{D_2}) = n - 2$ .

$f$  conserve la dimension, donc  $\dim(f(K_{D_1} \cap K_{D_2})) = n(n - 2)$ .

Puisque  $f$  est bijective :

$$f(K_{D_1} \cap K_{D_2}) = f(K_{D_1}) \cap f(K_{D_2}) = K_{D'_1} \cap I_H$$

Or

$$\dim(K_{D'_1} \cap I_H) = (n - 1)^2 = n^2 - 2n + 1 \neq n(n - 2)$$

C'est une contradiction, donc  $f(K_{D_2})$  est de la forme  $K_D$ .

Ainsi, l'image d'un sev de la forme  $I_{H_1}$  est un sous-espace de la forme  $I_{H_2}$ . En effet, s'il était de la forme  $K_D$ , en composant par  $f^{-1}$ , on aurait que  $I_{H_1}$  est de la forme  $K_D$ .

15. Soit  $M$  de rang  $p$ . Alors  $\dim(\ker(M)) = n - p$ . Soient donc  $D_1, D_2, \dots, D_{n-p}$   $n - p$  droites dont la somme donne  $\ker(M)$ . Là encore, on suppose que quitte à composer  $f$  par la transposition, les  $f(K_{D_i})$  sont de la forme  $K_D$ . Alors

$$\ker(M) = \bigoplus_{k=1}^{n-p} D_k$$

donc

$$M \in \bigcap_{k=1}^{n-p} K_{D_k}$$

donc

$$f(M) \in \bigcap_{k=1}^{n-p} f(K_{D_k})$$

Si on note  $K_{D'_i} = f(K_{D_i})$ , alors

$$f(M) \in \bigcap_{k=1}^{n-p} K_{D'_k}$$

Puisque  $f$  est un automorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , il conserve la dimension, donc les  $D'_i$  sont en somme directe, comme les  $D_i$ , et on obtient

$$\bigoplus_{k=1}^{n-p} D'_k \subset \ker(f(M))$$

donc  $\dim(\ker(f(M))) \geq \dim(\ker(M))$ . Donc  $f$  diminue le rang. Puisque  $f^{-1}$  vérifie les mêmes propriétés,  $f^{-1}$  diminue aussi le rang, donc  $f$  conserve le rang.

16. Dans cette question, on suppose encore que, quitte à composer par la transposition,  $f$  envoie les sous-espaces de la forme  $K_D$  sur les sous-espaces de la forme  $K_D$ .

Par les mêmes arguments qu'en question 15, puisque  $\text{Im}(E_{11}) \subset D_1$ , où  $D_1$  est le premier vecteur de la base canonique, alors  $\text{Im}(f(E_{11})) \subset f(D_1)$  en écrivant  $D_1$  comme une intersection de  $n - 2$  hyperplans. On pose alors  $C_1 = f(D_1)$ , donc pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f(E_{1,i})$  est une matrice de rang 1 (car  $f$  conserve le rang) dont l'image est  $C_1$ , donc s'écrit sous la forme :

$$f(E_{1j}) = \lambda_i C_1 L_j$$

avec  $L_j$  une matrice ligne.

On fixe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Avec les mêmes arguments, en raisonnant sur les noyaux cette fois, tous les  $f(E_{ij})$  ont le même noyau (un hyperplan, noyau de la forme linéaire  $L_j$ ). Enfin, sur une même ligne, les images des  $f(E_{ij})$  sont les mêmes ( $\text{Vect}(C_i)$ ), donc en position  $(i, j)$  on a une matrice de rang 1, dont le noyau est le noyau de  $L_i$  et dont l'image est  $\text{Vect}(C_i)$ , donc  $f(E_{ij})$  est colinéaire (et non nulle, car le rang est conservé) à  $C_i L_j$ . Finalement :

$$\exists (\lambda_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, f(E_{ij}) = \lambda_{ij} C_i L_j$$

En composant par la transposition, on obtient l'autre cas de figure.

Les  $C_i$  forment une famille libre, sinon, pour  $M$  inversible  $f(M)$  aurait pour image un sous-espace strict de  $\mathbf{K}^n$ . De même, les  $L_j$  forment une famille libre, sinon, pour  $M$  inversible  $f(M)$  aurait pour noyau un sous-espace non réduit à 0.

17. On se place ici encore dans le cas où  $f$  conserve les  $K_D$ , quitte à composer par la transposition. Tout d'abord, on note que, quitte à remplacer dans l'ordre les  $C_i$  par  $\lambda_{i1} C_i$ , on peut supposer que tous les  $\lambda_{i1}$  valent 1, puis, quitte à remplacer tous les  $L_j$  par  $\lambda_{1j} L_j$ , on peut également supposer que tous les  $\lambda_{j1}$  valent 1.

Alors la matrice  $E_{11} + E_{1j} + E_{i1} + E_{ij}$  est de rang 1, puisqu'elle contient uniquement 2 colonnes non nulles, qui sont identiques. Puisque  $f$  conserve le rang, son image par  $f$  est aussi de rang 1. Donc

$$C_1 L_1 + C_i L_1 + C_1 L_j + \lambda_{ij} C_i L_j$$

est de rang 1.

On note  $A$  la matrice dont les colonnes sont, dans l'ordre,  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , et on note  $B$  la matrice dont les lignes sont, dans l'ordre,  $L_1, L_2, \dots, L_n$ . Ces deux matrices sont inversibles d'après la question précédente.

En multipliant l'identité précédente par  $A^{-1}$  à gauche et par  $B^{-1}$  à droite, ce qui conserve le rang, on obtient que

$$E_{11} + E_{i1} + E_{1j} + \lambda_{ij} E_{ij}$$

est de rang 1. Ceci est possible uniquement si  $\lambda_{ij} = 1$ . Donc tous les  $\lambda_{ij}$  valent 1, et on en déduit que, si on note  $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  :

$$f(M) = \sum_{i,j=1}^m m_{ij} C_i L_j = \sum_{i,j=1}^m m_{ij} A E_{ij} B = A \left( \sum_{i,j=1}^m m_{ij} E_{ij} \right) B = AMB$$

L'autre cas s'obtient en composant par la transposition.

## Problème d'analyse

### Partie I

1. Soit  $x \in \mathbf{R}$ . La convexité de  $f$  assure que la fonction pente :

$$p_x : \mathbf{R} \setminus \{x\} \longrightarrow \mathbf{R} \tag{2.13}$$

$$t \longmapsto \frac{f(x) - f(t)}{x - t}$$

est croissante. Donc

- Sur  $]x, +\infty[$ , elle est croissante et minorée par  $p_x(x-1)$ , donc d'après le théorème de la limite monotone,  $p_x$  admet une limite finie à droite en  $x$ , qui est par définition la dérivée à droite de  $f$  en  $x$ .

- Sur  $] -\infty, x[$ , elle est croissante et majorée par  $p_x(x+1)$ , donc d'après le théorème de la limite monotone,  $p_x$  admet une limite finie à gauche en  $x$ , qui est par définition la dérivée à gauche de  $f$  en  $x$ .

De plus pour  $t > x$  et  $s \in ]x, t[$  :

$$p_x(s) \leq p_x(t)$$

et, en passant à la limite quand  $s \rightarrow x^+$ , on obtient

$$f'_d(x) \leq \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad \text{i.e.} \quad f'_d(x)(t - x) \leq f(t) - f(x)$$

Finalement :

$$\forall t > x, \quad f(t) \geq f(x) + f'_d(x)(t - x)$$

On montre de même que

$$\forall t < x, \quad f(t) \geq f(x) + f'_d(x)(t - x)$$

Pour  $t = x$ , il y a égalité. Finalement, pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,  $f(t) \geq f(x) + f'_d(x)(t - x)$ . Puisque  $f$  est dérivable à gauche et à droite en tout point, elle est continue à gauche et à droite en tout point, donc elle est continue sur  $\mathbf{R}$ .

2. (a) Puisque  $f$  est continue,  $g$  est continue, et

$$\forall x \in \mathbf{R}^*, \quad g_y(x) = |x| \left( y - \frac{f(x)}{|x|} \right)$$

donc

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} g_y(x) = -\infty$$

Donc il existe  $A > 0$  tel que  $|x| \geq A \Rightarrow g_y(x) \leq g_y(0)$ .

Ainsi  $g_y$  est continue sur le segment  $[-A, A]$ , donc d'après le théorème des bornes atteintes, elle y atteint son maximum :

$$M = \max_{x \in [-A, A]} g_y(x)$$

Puisque pour  $|x| > A$ , on a  $g_y(x) \leq g_y(0) \leq M$ , on en déduit

$$M = \max_{x \in \mathbf{R}} g_y(x)$$

- (b)  $f^*$  est bien définie d'après la question précédente. Montrons qu'elle est convexe : Soit  $\lambda \in [0, 1]$  et  $(y, z) \in \mathbf{R}^2$ . Alors

$$f^*(\lambda y + (1 - \lambda)z) = \max_{x \in \mathbf{R}} x(\lambda y + (1 - \lambda)z - f(x))$$

Or

$$x(\lambda y + (1 - \lambda)z - f(x)) = \lambda(xy - f(x)) + (1 - \lambda)(xz - f(x)) \leq \lambda f^*(y) + (1 - \lambda)f^*(z)$$

Donc en passant à gauche au max sur  $\mathbf{R}$ , on obtient bien

$$f^*(\lambda y + (1 - \lambda)z) \leq \lambda f^*(y) + (1 - \lambda)f^*(z)$$

- (c) Pour tout  $x \in \mathbf{R}$ , par définition du max, on a :

$$f^*(y) \geq xy - f(x) \quad \text{i.e.} \quad f(x) + f^*(y) \geq xy$$

- (d) Montrons tout d'abord que  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{f^*(y)}{y} = +\infty$  en supposant par l'absurde que ce n'est pas le cas : on dispose alors de  $A > 0$  et une suite  $(y_n)$  qui tend vers  $+\infty$  telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, f^*(y_n) \leq Ay_n$$

En reprenant l'inégalité de la question précédente, on obtient pour  $x = A + 1$  :

$$xy_n \leq f(x) + f^*(y_n) \leq f(x) + Ay_n$$

Pour  $n$  assez grand,  $y_n > 0$  et en divisant par  $y_n$ , on obtient :

$$x \leq \frac{f(x)}{y_n} + A$$

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient alors  $x \leq A$ . C'est une contradiction.

On raisonne de même en  $-\infty$ .

Donc  $f^*$  vérifie également (2).

3. Comme  $f$  est dérivable, pour tout  $y \in \mathbf{R}$ ,  $g_y$  l'est aussi et pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $g'_y(x) = y - f'(x)$ . S'il y a égalité dans (3), alors  $g_y(x) = \max_{t \in \mathbf{R}} g_y(t)$  donc  $g_y$  admet un maximum global en  $x$  donc, comme  $g_y$  est dérivable,  $g'_y(x) = 0$ , i.e.  $y = f'(x)$ . Réciproquement, si  $y = f'(x)$ , alors  $g'_y(x) = 0$ . Or, par dérivabilité et convexité de  $f$ ,  $g_y$  est dérivable et concave donc  $g'_y$  est décroissante. Donc  $g'_y$  prend des valeurs positives sur  $] -\infty, x]$  et des valeurs négatives sur  $[x, +\infty[$ . Donc  $g_y$  croît sur  $] -\infty, x]$  et décroît sur  $[x, +\infty[$ . Donc  $g_y$  atteint son maximum global en  $x$  donc  $f^*(y) = g_y(x)$ , i.e.  $f^*(y) = xy - f(x)$  : il y a bien égalité dans (3).

Finalement, il y a égalité dans (3) si et seulement si  $y = f'(x)$ .

4. Soit  $x \in \mathbf{R}$ . D'après (3), on a :

$$\forall y \in \mathbf{R}, xy - f^*(y) \leq f(x)$$

De plus, le fait que  $f^*$  est convexe et vérifie (2) garantit l'existence de sa transformée de Legendre. En passant au max sur  $y$ , on obtient

$$f^{**}(x) \leq f(x)$$

Par ailleurs, d'après (1) et en posant  $y_0 = f'_d(x)$ ,

$$\forall t \in \mathbf{R}, f(t) \geq f(x) + y_0(t - x)$$

donc

$$\forall t \in \mathbf{R}, xy_0 - f(x) \geq ty_0 - f(t) \quad \text{i.e.} \quad \forall t \in \mathbf{R}, g_{y_0}(x) \geq g_{y_0}(t)$$

Donc  $f^*(y_0) = g_{y_0}(x)$ , i.e.  $f^*(y_0) = xy_0 - f(x)$  donc  $xy_0 - f^*(y_0) = f(x)$  ce qui montre que  $f^{**}(x) \geq f(x)$ .

Finalement  $f^{**}(x) = f(x)$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ .

5. (a) On note  $f_p$  cette fonction. On remarque que, puisque  $p > 1$ ,  $f_p$  est dérivable en 0 et  $f'_p(0) = 0$ . On constate aussi que  $f_p$  est dérivable en tout point de  $\mathbf{R}^*$  et que pour tout  $x > 0$ ,

$$f'_p(x) = x^{p-1}$$

et pour tout  $x < 0$ ,

$$f'_p(x) = -(-x)^{p-1}.$$

On en déduit que  $f'_p$  est croissante, ce qui établit la convexité de  $f_p$ . Enfin, puisque  $p > 1$ ,  $p - 1 > 0$  et donc

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{|x|^p}{|x|} = +\infty$$

$f_p$  vérifie donc toutes les conditions, on peut donc calculer sa transformée de Legendre. On sait que

$$f^*(y) = xy - f(x)$$

avec  $y = f'(x)$  et donc, puisqu'ici  $f'$  est une bijection de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ , on peut définir sa réciproque, ce qui donne :

$$f^*(y) = y(f')^{-1}(y) - f((f')^{-1}(y)).$$

Puisque pour  $x \neq 0$ ,  $f'_p(x) = \frac{|x|^p}{x}$ , on obtient pour  $y \neq 0$  :

$$(f')^{-1}(y) = \frac{|y|}{y} |y|^{\frac{1}{p-1}} = \frac{|y|^{\frac{p}{p-1}}}{y}$$

De plus  $(f')^{-1}(0) = 0$ . On obtient au final :

$$\begin{aligned} f^*(y) &= |y|^{\frac{p}{p-1}} - \frac{1}{p} |y|^{\frac{p}{p-1}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{p}\right) |y|^{\frac{p}{p-1}}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Or, comme  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , on a  $\frac{p}{p-1} = q$  et  $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$ . Au final, on obtient :

$$f^*(y) = \frac{|y|^q}{q}.$$

Lorsque l'on écrit l'inégalité  $f(x) + f^*(y) \geq xy$ , on obtient :

$$xy \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}.$$

En changeant  $x$  en  $-x$  on obtient :

$$-xy \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}.$$

Au final :

$$|xy| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}.$$

(b) La fonction  $\operatorname{ch}$  est dérivable et convexe (car  $\operatorname{ch}'' = \operatorname{ch} \geq 0$ ) sur  $\mathbf{R}$  et

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{ch}(x)}{|x|} = +\infty$$

Calculons la transformée de Legendre de  $\operatorname{ch}$ . Comme dans la question précédente, comme  $\operatorname{ch}'$  est une bijection de  $\mathbf{R}$  sur  $\mathbf{R}$ , on peut utiliser sa fonction réciproque, ce qui donne

$$\operatorname{ch}^*(y) = y \operatorname{argsh}(y) - \operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(y)).$$

Or,  $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh}(y)) = \sqrt{1 + y^2}$ , donc

$$\operatorname{ch}^*(y) = y \operatorname{argsh}(y) - \sqrt{1 + y^2}.$$

## Partie II

6. (a) Si
- $f$
- est continue, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in H, \exists \eta > 0, \forall y \in H, \|x - y\|_H \leq \eta \Rightarrow f(x) - \varepsilon \leq f(y) \leq f(x) + \varepsilon \Rightarrow f(y) \geq f(x) - \varepsilon$$

Donc la continuité implique la semi-continuité inférieure. La réciproque est fautive. Par exemple, sur  $\mathbf{R}$ , la fonction indicatrice de  $] - 1, 1[$  est semi-continue inférieurement, mais pas continue.

- (b) Soit
- $x \in H$
- et
- $\varepsilon > 0$
- . Alors

$$\exists \eta_1 > 0, \forall y \in H, \|x - y\|_H \leq \eta_1 \Rightarrow f(y) \geq f(x) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\exists \eta_2 > 0, \forall y \in H, \|x - y\|_H \leq \eta_2 \Rightarrow g(y) \geq g(x) - \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc en posant  $\eta = \min(\eta_1, \eta_2) > 0$ , on obtient

$$\forall y \in H, \|x - y\|_H \leq \eta \Rightarrow (f + g)(y) \geq (f + g)(x) - \varepsilon$$

C'est vrai pour tout  $x \in H$ , donc  $f + g$  est s.c.i..

- (c) On suppose
- $f$
- s.c.i.. Montrons que
- $\Gamma_f^+$
- est fermé par caractérisation séquentielle. On considère
- $(x_n, t_n)$
- une suite de
- $\Gamma_f^+$
- qui converge dans
- $H \times \mathbf{R}$
- vers
- $(a, s)$
- . Soit
- $\varepsilon > 0$
- . Comme
- $f$
- est s.c.i., il existe
- $\eta > 0$
- tel que pour tout
- $x$
- dans
- $H$
- ,
- $\|x - a\| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq f(a) - \varepsilon$
- .

Or, puisque  $x_n$  converge vers  $a$ , il existe un rang  $N$  tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq N \Rightarrow \|x_n - a\| \leq \eta$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq N \Rightarrow f(x_n) \geq f(a) - \varepsilon$$

Or, pour tout  $n$ ,  $(x_n, t_n) \in \Gamma_f^+$ , donc  $t_n \geq f(x_n)$ . Finalement :

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq N \Rightarrow t_n \geq f(a) - \varepsilon$$

donc, en passant à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$ , on a  $s \geq f(a) - \varepsilon$ .

C'est vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , donc  $s \geq f(a)$ , ce qui signifie que  $(a, s) \in \Gamma_f^+$ .

Réciproquement, si  $f$  n'est pas s.c.i., on a :

$$\exists \varepsilon > 0, \exists x \in H, \forall \eta > 0, \exists y \in H, \|x - y\|_H \leq \eta \text{ et } f(y) < f(x) - \varepsilon$$

En particulier pour  $\eta = \frac{1}{n+1}$  :

$$\exists \varepsilon > 0, \exists x \in H, \forall n \in \mathbf{N}, \exists y_n \in H, \|x - y_n\|_H \leq \frac{1}{n+1} \text{ et } f(y_n) < f(x) - \varepsilon$$

On considère alors la suite  $(y_n, f(x) - \varepsilon)$ . Cette suite est une suite de  $\Gamma_f^+$ , qui converge vers  $(x, f(x) - \varepsilon) \notin \Gamma_f^+$ . Donc  $\Gamma_f^+$  n'est pas fermé.

7. (a)
- $H$
- étant un espace de Hilbert et
- $D_x f$
- étant une forme linéaire continue, par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique vecteur
- $v_x$
- tel que
- $D_x f$
- est le produit scalaire contre
- $v_x$
- .

(b) Si  $f$  est convexe et  $(x, y) \in H^2$  et  $t \in [0, 1]$ , alors

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

Or

$$f((1-t)x + ty) = f(x + t(y-x))$$

donc pour  $t \in ]0, 1]$

$$\frac{1}{t}(f(x + t(y-x)) - f(x)) \leq f(y) - f(x)$$

en passant à la limite  $t \rightarrow 0^+$ , on obtient

$$\langle f'(x)|y-x \rangle \leq f(y) - f(x) \quad \text{i.e.} \quad f(y) \geq f(x) + \langle f'(x)|y-x \rangle$$

(c) Soit  $f$  convexe et dérivable. D'après la question précédente,

$$\forall (x, y) \in H^2, f(y) \geq f(x) + \langle f'(x)|y-x \rangle$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , en posant  $\eta = \frac{\varepsilon}{\max(1, \|f'(x)\|)} > 0$ , l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure alors que

$$\|x-y\| \leq \eta \Rightarrow f(y) \geq f(x) - \varepsilon$$

donc  $f$  est s.c.i..

(d) On suppose que  $f$  est dérivable en  $x$  et qu'elle y admet un minimum local. Alors pour tout  $h \in H$ ,  $t \mapsto f(x+th)$  est dérivable et admet un minimum local en  $x$ , donc sa dérivée s'y annule :

$$\forall h \in H, D_x f(h) = 0 \quad \text{i.e.} \quad f'(x) = 0$$

8. On note  $g_y : x \mapsto \langle x|y \rangle - f(x)$ . Soit  $y \in H$ . D'après (4), il existe  $A > 1$  tel que

$$\|x\| \geq A \Rightarrow f(x) \geq (\|y\| + 1 + f(0))\|x\|$$

Donc

$$\|x\| \geq A \Rightarrow g_y(x) \leq -f(0) - 1 < g_y(0)$$

De plus, d'après la question 7.b (où on inverse les rôles de  $x$  et  $y$ ) et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall x \in \overline{B(x, A)}, g_y(x) \leq \|x\|\|y\| - f(y) + \|f'(y)\|\|x-y\| \leq A\|y\| - f(y) + \|f'(y)\|(A + \|y\|)$$

Donc  $g_y$  est majorée sur  $\overline{B(x, A)}$ . Puisqu'en dehors de cette boule, elle prend des valeurs plus petites que  $g_y(0)$ , elle est majorée sur  $H$ , et la borne supérieure de  $g_y$  sur  $H$  est la même que sur  $\overline{B(x, A)}$ .

9. (a) On commence par la convexité. Soit  $\lambda \in [0, 1]$  et  $(y_1, y_2) \in H^2$ . Alors

$$f^*(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) = \sup_{x \in H} \langle x|\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \rangle - f(x) = \sup_{x \in H} \lambda \underbrace{(\langle x|y_1 \rangle - f(x))}_{\leq f^*(y_1)} + (1-\lambda) \underbrace{(\langle x|y_2 \rangle - f(x))}_{\leq f^*(y_2)}$$

donc

$$\langle x|\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \rangle - f(x) \leq \lambda f^*(y_1) + (1-\lambda)f^*(y_2)$$

et en prenant le sup sur  $x$ , on obtient bien la convexité de  $f^*$ .

On sait qu'une fonction est s.c.i. si et seulement si son épigraphe est fermé.

Or on constate que

$$\Gamma_{f^*}^+ = \bigcap_{x \in H} \Gamma_{h_x}^+$$

où  $h_x : y \mapsto \langle x|y \rangle - f(x)$ . Remarquons que, pour tout  $x \in H$ ,  $h_x$  est affine donc continue donc s.c.i. donc  $\Gamma_{h_x}^+$  est fermé. Ainsi, en tant qu'intersection de fermés,  $\Gamma_{f^*}^+$  est fermé. Donc  $f^*$  est s.c.i..

(b) Par définition, puisque

$$f^*(y) = \sup_{x \in H} (\langle x|y \rangle - f(x))$$

on a

$$\forall (x, y) \in H^2, f(x) + f^*(y) \geq \langle x|y \rangle$$

(c) Si on a égalité, alors  $z \mapsto \langle z|y \rangle - f(z)$  atteint son maximum en  $x$ , donc sa dérivée, qui vaut  $y - f'(x)$ , y est nulle, donc  $y = f'(x)$ .

Réciproquement, si  $y = f'(x)$ , d'après la question 7.b, on a :

$$\forall x' \in H, f(x') \geq f(x) + \langle y|x' - x \rangle \quad \text{i.e.} \quad \langle x|y \rangle - f(x) \geq \langle x'|y \rangle - f(x')$$

donc le max est atteint en  $x$ , donc  $f^*(y) = \langle x|y \rangle - f(x)$ . Il y a donc égalité.

(d) Soit  $x \in H$ . On effectue un raisonnement similaire à celui de la question 4 :

$$\forall y \in H, \langle x|y \rangle - f^*(y) \leq f(x)$$

donc  $y \mapsto \langle x|y \rangle - f^*(y)$  est majorée. Ainsi  $f^{**}$  est bien définie en  $x$  et, en passant au sup sur  $y$ ,

$$f^{**}(x) \leq f(x)$$

D'autre part, d'après la question précédente avec  $y_0 = f'(x)$ , on a :  $\langle x|y_0 \rangle - f^*(y_0) = f(x)$ , donc  $f^{**}(x) \geq f(x)$ .

Finalement  $f^{**}(x) = f(x)$  pour tout  $x \in H$ .

### Partie III

10. (a) Si  $m = -\infty$ ,  $f$  n'est pas minorée, donc on peut trouver une suite  $x_n$  telle que  $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ .

Si  $m \in \mathbf{R}$ , par caractérisation de la borne inférieure,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \exists x_n \in H, m \leq f(x_n) < m + \frac{1}{n+1}$$

donc, par théorème d'encadrement,  $(f(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $m$ .

Puisque  $f$  est coercive, il existe  $R > 0$  tel que

$$\forall x \in H, \|x\| \geq R \Rightarrow f(x) \geq f(0) + 1$$

et comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = m < f(0) + 1$$

il existe un rang  $N$  tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq N \Rightarrow f(x_n) < f(0) + 1$$

On en déduit finalement que

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq N \Rightarrow \|x_n\| < R$$

Donc la suite  $(x_n)$  est bornée.

(b) On applique le théorème de Banach-Alaoglu : il existe une sous-suite  $(x_{\varphi(n)})$  de  $(x_n)$  et  $z_0 \in H$  tel que

$$\forall y \in H, \langle x_{\varphi(n)}|y \rangle \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \langle z_0|y \rangle$$

(c) Puisque  $\alpha > m$ , par définition de la borne inférieure,  $C_\alpha$  est non vide.

Si  $(x, y) \in C_\alpha$ , et  $\lambda \in [0, 1]$ , alors

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq \lambda \alpha + (1 - \lambda)\alpha \leq \alpha$$

donc  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C_\alpha$  qui est donc convexe.

Montrons que  $C_\alpha$  est fermé par caractérisation séquentielle.

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite d'éléments de  $C_\alpha$  qui converge vers  $x \in H$ . Alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, f(x_n) \leq \alpha$$

On suppose par l'absurde que  $f(x) > \alpha$ . On pose  $\varepsilon = \frac{f(x) - \alpha}{2} > 0$ . Puisque  $f$  est s.c.i., il existe  $\eta > 0$  tel que

$$\forall y \in H, \|x - y\| \leq \eta \Rightarrow f(y) \geq f(x) - \varepsilon$$

Or, puisque  $(x_n)$  converge vers  $x$ , il existe un rang  $N \in \mathbf{N}$  tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq N \Rightarrow \|x_n - x\| \leq \eta$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbf{N}, n \geq N \Rightarrow f(x_n) \geq f(x) - \varepsilon > \alpha$$

C'est une contradiction, donc  $f(x) \leq \alpha$ , i.e.  $x \in C_\alpha$ , ce qui montre finalement que  $C_\alpha$  est fermé.

On applique le théorème de projection sur un convexe fermé de  $z_0$  sur  $C_\alpha$ . On note  $p(z_0)$  le projeté. Alors d'après le théorème 2 :

$$\forall y \in C_\alpha, \langle z_0 - p(z_0) | y - p(z_0) \rangle \leq 0$$

Par construction, pour  $n$  assez grand,  $x_{\varphi(n)} \in C_\alpha$  donc pour  $n$  assez grand :

$$\langle z_0 - p(z_0) | x_{\varphi(n)} - p(z_0) \rangle \leq 0$$

et en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient

$$\|z_0 - p(z_0)\|^2 \leq 0$$

donc  $z_0 = p(z_0)$ . Donc  $z_0 \in C_\alpha$ , i.e.  $f(z_0) \leq \alpha$ , et ce pour tout  $\alpha > m$ .

On en déduit finalement que  $f(z_0) \leq m$ , donc  $f(z_0) = m$ .  $f$  atteint donc un minimum global en  $z_0$ .

(d) Par l'absurde, si le minimum global  $m$  de  $f$  est atteint en deux points distincts  $x$  et  $y$ , alors

$$m \leq f\left(\frac{1}{2}(x + y)\right) < \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) = m$$

c'est une contradiction, donc  $f$  atteint bien son minimum en un unique point.

11. Puisque  $x$  n'est pas intérieur à  $C$ , il est dans l'adhérence du complémentaire de  $C$ , donc par caractérisation séquentielle de l'adhérence, il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  d'éléments de  $H \setminus C$  qui converge vers  $x$ .

On pose

$$u_n = \frac{1}{\|x_n - p(x_n)\|} (x_n - p(x_n))$$

qui est bien défini puisque  $x_n \notin C$  et  $p(x_n) \in C$ , donc  $x_n - p(x_n) \neq 0$ .  $(u_n)$  étant bornée, par Banach-Alaoglu et quitte à extraire, on peut supposer qu'elle converge faiblement, disons vers  $a$ .

Montrons que pour tout  $y \in C$ ,  $\langle a | y - x \rangle \leq 0$ . On remarque que

$$\langle u_n | y - x \rangle = \langle u_n | y - p(x_n) \rangle + \langle u_n | p(x_n) - x \rangle \leq \langle u_n | p(x_n) - x \rangle$$

donc

$$\langle u_n | y - x \rangle \leq \|p(x_n) - x\|_H \leq \|p(x_n) - x_n\|_H + \|x_n - x\|_H$$

donc

$$\langle u_n | y - x \rangle \leq 2\|x_n - x\|_H.$$

En passant à la limite,  $\langle a | y - x \rangle \leq 0$ .

Montrons enfin que  $a \neq 0$ . On suppose par l'absurde  $a = 0$ . Puisque  $\mathring{C} \neq \emptyset$ , on dispose de  $r > 0$  et de  $c \in C$  tel que  $B(c, 2r) \subset C$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c + ru_n \in C$  donc  $\langle u_n | c + ru_n - p(x_n) \rangle \leq 0$ , i.e.  $r + \langle u_n | c - p(x_n) \rangle \leq 0$ . Or

$$\langle u_n | c - p(x_n) \rangle = \langle u_n | c - x \rangle + \langle u_n | x - p(x_n) \rangle.$$

On a :  $\langle u_n | c - x \rangle \rightarrow \langle 0 | c - x \rangle = 0$  et  $|\langle u_n | x - p(x_n) \rangle| \leq 2\|x_n - x\|_H \rightarrow 0$ . D'où  $\langle u_n | c - p(x_n) \rangle \rightarrow 0$  et  $r \leq 0$ , ce qui est absurde. Finalement,  $a \neq 0$ .

## Partie IV

12. Tout d'abord, par antisymétrie de  $A$ , en prenant  $u = v$ , on obtient

$$\forall u \in H, \langle A(u) | u \rangle = -\langle u | A(u) \rangle \quad \text{i.e.} \quad 2\langle u | A(u) \rangle = 0 \quad \text{i.e.} \quad \langle u | A(u) \rangle = 0$$

Ensuite, d'après les propriétés de la transformée de Legendre, on a :

$$\forall u \in H, \phi(u) + \phi^*(A(u)) \geq \underbrace{\langle u | A(u) \rangle}_{=0}$$

avec égalité si et seulement si  $\phi'(u) = A(u)$ .

Autrement dit :

$$\forall u \in H, I(u) \geq 0 \quad \text{avec égalité si et seulement si} \quad \phi'(u) = A(u)$$

13.  $u \mapsto \phi^*(A(u))$  est convexe comme composée d'une application linéaire continue et d'une fonction convexe. De plus, elle est s.c.i. car  $\phi^*$  est s.c.i. et  $A$  est continue.

Donc  $I$  est convexe et s.c.i. comme somme de deux fonctions convexes et s.c.i..

Comme  $\phi$  est strictement convexe,  $I$  l'est aussi comme somme d'une fonction convexe et d'une fonction strictement convexe.

Enfin, par construction, on a

$$\forall v \in H, \phi^*(v) \geq -\phi(0)$$

donc  $\phi^*$  est minoré par  $-\phi(0)$ .

Finalement,  $I$  est la somme d'une fonction qui vérifie (4) et d'une fonction minorée, donc vérifie (4).

Toute solution du problème (6) étant nécessairement un minimum global de  $I$ , et étant donnée que  $I$  possède un unique minimum global, le problème (6) possède au plus une solution.

14. (a) On calcule :

$$\langle u | f \rangle + \langle v | g \rangle - L(f, g) = \langle u | f \rangle + \langle v | g \rangle - \phi(f) - \phi^*(A(f) + g)$$

On pose  $h = A(f) + g$ , ce qui donne, en utilisant l'inégalité (5) obtenue à la question 9.b :

$$\langle u | f \rangle + \langle v | g \rangle - L(f, g) = \langle u | f \rangle + \langle v | h - A(f) \rangle - \phi(f) - \phi^*(h) \quad (2.15)$$

$$= \langle u | f \rangle + \langle v | h \rangle - \langle v | A(f) \rangle - \phi(f) - \phi^*(h) \quad (2.16)$$

$$= \langle u | f \rangle + \langle v | h \rangle + \langle A(v) | f \rangle - \phi(f) - \phi^*(h) \quad (2.17)$$

$$= \langle u + A(v) | f \rangle + \langle v | h \rangle - \phi(f) - \phi^*(h) \quad (2.18)$$

$$= \langle v | h \rangle - \phi^*(h) + \langle u + A(v) | f \rangle - \phi(f) \quad (2.19)$$

$$\leq \phi(v) + \phi^*(u + A(v))$$

- (b) On note tout d'abord que, par convexité de  $\phi$  et  $\phi^*$ ,  $L$  est convexe relativement à  $(u, v)$ . D'après la question précédente, puisque la fonction est majorée pour tout  $(u, v)$ , on peut calculer son sup sur  $(f, g)$  pour tout  $(u, v)$ , ce qui donne :

$$L^*(u, v) = \sup_{(f, g) \in H^2} \langle u|f \rangle + \langle v|g \rangle - \phi(f) - \phi^*(A(f) + g)$$

Comme dans la question précédente, on pose  $h = A(f) + g$ . Lorsque  $(f, g)$  parcourt  $H^2$ , il en va de même pour  $(f, h)$ , donc par des calculs similaires à ceux de la question précédente, on obtient :

$$L^*(u, v) = \sup_{(f, h) \in H^2} \langle v|h \rangle - \phi^*(h) + \langle u + A(v)|f \rangle - \phi(f) \quad (2.20)$$

$$= \sup_{f \in H} (\langle v|h \rangle - \phi^*(h)) + \sup_{h \in H} (\langle u + A(v)|f \rangle - \phi(f)) \quad (2.21)$$

$$= \phi(v) + \phi^*(A(v) + u) \quad (2.22)$$

$$= L(v, u)$$

15. (a) Puisque  $L(u, v) = L^*(v, u)$ , on a :

$$L(u, v) = L^*(v, u) = \sup_{(f, g) \in H^2} \langle v|f \rangle + \langle u|g \rangle - L(f, g) \geq -L(0, 0)$$

Donc pour tout  $v \in H$ ,  $u \mapsto L(u, v)$  est minorée par  $-L(0, 0)$ .  $h$  est donc bien définie.

Montrons qu'elle est convexe. Soit  $(u_1, u_2) \in H^2$  et  $(v_1, v_2) \in H^2$  et  $\lambda \in [0, 1]$ . Alors par convexité de  $L$  relativement au couple  $(u, v)$ , on obtient :

$$L(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2, \lambda v_1 + (1-\lambda)v_2) = L(\lambda(u_1, v_2) + (1-\lambda)(u_2, v_2)) \leq \lambda L(u_1, v_1) + (1-\lambda)L(u_2, v_2)$$

On prend alors l'inf sur le couple  $(u_1, u_2)$ . Lorsque  $(u_1, u_2)$  parcourt  $H^2$ ,  $\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2$  parcourt également  $H^2$ , ce qui nous donne :

$$h(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2) \leq \lambda h(v_1) + (1-\lambda)h(v_2)$$

Donc  $h$  est convexe.

- (b)  $h$  est bien définie. En effet, si  $(f, v) \in H^2$ , alors

$$\langle f|v \rangle - h(v) = \langle f|v \rangle - \inf_{u \in H} L(u, v) = \sup_{u \in H} (\langle f|v \rangle - L(u, v))$$

Donc pour tout  $u \in H$

$$\langle f|v \rangle - h(v) \leq \langle f|v \rangle - L(u, v)$$

C'est vrai en particulier pour  $u = 0$ , donc

$$\langle f|v \rangle - h(v) \leq \langle f|v \rangle - L(0, v) \leq L^*(0, f) = L(f, 0)$$

$v \mapsto \langle f|v \rangle - h(v)$  est donc majorée, donc son sup est bien défini, donc  $h^*$  est bien définie sur  $H$ . C'est une transformée de Legendre, donc elle est convexe et s.c.i..

Pour finir, par définition de  $h$ , on peut écrire :

$$\forall v \in H, h(v) \leq L(0, v) = \phi(0) + \phi^*(v)$$

donc pour  $u \in H$  :

$$h^*(u) = \sup_{v \in H} (\langle u|v \rangle - h(v)) \geq \sup_{v \in H} (\langle u|v \rangle - L(0, v)) \geq \sup_{v \in H} (\langle u|v \rangle - \phi(0) - \phi^*(v)) \geq -\phi(0) + \phi(u)$$

Donc  $h^*$  vérifie (4) car  $\phi$  vérifie (4) par hypothèse.

(c) On sait déjà que  $h \geq -L(0, 0)$ . On a pour tout  $v \in H$

$$h(v) = \inf_{u \in H} L(u, v) \leq L(0, v) = \phi(0) + \phi^*(v)$$

Il suffit donc de prouver que  $\phi^*$  est majorée sur toute boule fermée (et même sur toute boule fermée centrée en 0).

Soit  $R > 0$  et  $v \in H$  tel que  $\|v\| \leq R$ . Alors on sait qu'il existe  $u_0 \in H$  tel que

$$\phi^*(v) = \langle u_0 | v \rangle - \phi(u_0)$$

et on a l'encadrement (par Cauchy-Schwarz) :

$$-\phi(0) \leq \phi^*(v) \leq R\|u_0\| - \phi(u_0)$$

En particulier

$$\phi(u_0) - \phi(0) \leq R\|u_0\|$$

Puisque  $\frac{\phi(u)}{\|u\|} \xrightarrow{\|u\| \rightarrow +\infty} +\infty$ , il existe  $M \geq 1$  tel que

$$\|u\| \geq M \Rightarrow \phi(u) \geq (R + 1 + |\phi(0)|)\|u\|$$

Alors

$$\|u\| \geq M \Rightarrow \phi(u) - \phi(0) \geq (R + 1)\|u\| > R\|u\|$$

Par contraposition,  $\|u_0\| < M$ . Comme  $\phi$  est minorée par  $m \in \mathbb{R}$  d'après la question 10, on a donc :

$$\phi^*(v) \leq R\|u_0\| - \phi(u_0) \leq R \times M - m$$

Finalement,  $\phi^*$  (et donc  $h$ ) est bien majorée sur toute boule fermée.

Pour la continuité :

Quitte à faire une translation de la variable, on se ramène en  $v = 0$ , et quitte à remplacer  $h$  par  $h - h(0)$ , on suppose que  $h(0) = 0$ . Établissons la continuité en 0 sous ces hypothèses. On sait d'après la question précédente que, sur  $\overline{B(0, 1)}$ , la fonction  $h$  est majorée (disons par  $\alpha > 0$ ). Alors si  $\varepsilon \in ]0, 1[$  et  $v \in \overline{B(0, \varepsilon)}$ , on a par convexité de  $h$  :

$$h(v) = h\left(\varepsilon \frac{v}{\varepsilon} + (1 - \varepsilon)0\right) \leq \varepsilon h\left(\frac{v}{\varepsilon}\right) + (1 - \varepsilon)h(0) \leq \varepsilon \alpha$$

Cela montre que  $h$  est semi-continue supérieurement.

De même, pour la semi-continuité inférieure, on écrit :

$$0 = h(0) = h\left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \times \frac{-v}{\varepsilon} + \frac{1}{1 + \varepsilon}v\right) \leq \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}h\left(\frac{-v}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{1 + \varepsilon}h(v)$$

donc

$$h(v) \geq -\varepsilon h\left(\frac{-v}{\varepsilon}\right) \geq -\varepsilon \alpha$$

qui donne la semi-continuité inférieure.

**Remarque :** seule la semi-continuité inférieure sera utilisée par la suite.

(d) Par définition pour tout  $u \in H$

$$h^*(u) = \sup_{v \in H} \langle u | v \rangle - h(v)$$

donc  $h^*(u) + h(0) = 0$  si et seulement si le sup précédent est un max, atteint pour  $v = 0$ .  
Donc

$$h^*(u) + h(0) = 0 \Leftrightarrow \forall v \in H, \langle u | v \rangle - h(v) \leq -h(0) \Leftrightarrow u \in K$$

- (e) On va montrer que  $K$  est non vide. Pour cela, on applique la propriété de la question 11 à l'épigraphe de  $h$ .

$h$  est convexe et bornée sur toute boule fermée, en particulier la boule fermée de centre 0 et de rayon 1. Donc il existe  $M \in \mathbf{R}$  tel que

$$\forall x \in H, \|x\| \leq 1 \Rightarrow h(x) \geq M$$

Donc l'ensemble  $\overline{B_H(0,1)} \times [M, +\infty[$  est inclus dans l'épigraphe de  $h$ , et d'intérieur non vide. Il contient par exemple la boule ouverte de centre  $(0, M+1)$  et de rayon 1, pour la norme hilbertienne découlant du produit scalaire dont  $H \times \mathbf{R}$  est naturellement muni en tant que produit cartésien d'espaces de Hilbert.

L'épigraphe de  $h$  est donc d'intérieur non vide, convexe (car  $h$  est convexe) et fermé (car  $h$  est s.c.i.).

$x = (0, h(0))$  est un point du bord de l'épigraphe (non intérieur car  $(0, h(0) - \varepsilon)$  n'appartient pas à l'épigraphe de  $f$  dès que  $\varepsilon > 0$ ).

On peut donc appliquer le résultat de la question 11 :

$$\exists a = (u, t) \in H \times \mathbf{R}, \|(u, t)\| = 1 \quad \text{et} \quad \forall y = (v, s) \in \Gamma_h^+, \langle (u, t) | (v, s) - (0, h(0)) \rangle \leq 0$$

Or  $\|(u, t)\| = 1 \Leftrightarrow \|u\|_H^2 + t^2 = 1$ , et

$$\langle (u, t) | (v, s) - (0, h(0)) \rangle \leq 0 \Leftrightarrow \langle u | v \rangle + st - th(0) \leq 0$$

C'est vrai en particulier si  $(v, s)$  appartient au graphe ( $s = h(v)$ ) donc

$$\forall v \in H, \langle u | v \rangle \leq t(h(0) - h(v))$$

Enfin,  $t \leq 0$ . En effet,  $(0, h(0) + 1) \in \Gamma_h^+$ , donc  $\langle (u, t) | (0, 1) \rangle \leq 0$ , donc  $t \leq 0$ . Enfin,  $t$  ne peut pas être nul. Par l'absurde, si  $t = 0$ , on a donc  $u \in H$  unitaire tel que

$$\forall v \in H, \langle u | v \rangle = 0$$

donc  $u \in H^\perp = \{0\}$ . Contradiction. Donc  $t < 0$ . Après division par  $t$ , on a donc :

$$\forall v \in H, \left\langle \frac{1}{t}u | v \right\rangle \geq h(0) - h(v)$$

et en posant  $w = -\frac{1}{t}u \neq 0$ , on a bien

$$\forall v \in H, \langle w | v \rangle \leq h(v) - h(0)$$

donc  $w \in K$ , donc  $K \neq \emptyset$ .

Par définition :

$$h^{**}(0) = \sup_{u \in H} \langle u | 0 \rangle - h^*(u) = \sup_{u \in H} -h^*(u)$$

Or

$$-h^*(u) \leq -h(0) \quad \text{car} \quad h^*(u) + h(0) \geq \langle u | 0 \rangle = 0$$

et d'après ce qu'on vient de montrer juste avant, cette inégalité est une égalité si et seulement si  $u \in K$ . Donc le sup est atteint pour  $u \in K$ , qui est non vide. Donc

$$h^{**}(0) = h(0).$$

Pour finir, tout d'abord :

$$L^*(u, 0) = \sup_{(f,g) \in H^2} \langle u | f \rangle + \langle 0 | g \rangle - L(f, g) = \sup_{(f,g) \in H^2} \langle u | f \rangle - L(f, g) = \sup_{f \in H} \left( \langle u | f \rangle - \inf_{g \in H} L(f, g) \right)$$

$$= \sup_{f \in H} (\langle u | f \rangle - h(f)) = h^*(u)$$

Donc

$$\inf_{u \in H} L(u, 0) = h(0) = h^{**}(0) = \sup_{u \in H} -h^*(u) = \sup_{u \in H} -L^*(0, u) = \sup_{u \in H} -L(u, 0) = -\inf_{u \in H} L(u, 0) = -h(0)$$

Finalement  $h(0) = 0$ , donc

$$\inf_{u \in H} I(u) = \inf_{u \in H} L(u, 0) = 0.$$

Ainsi, d'après la question 12, le problème (6) possède une unique solution.

# Chapitre 3

## Épreuves orales

**Note préliminaire.** Les compétences techniques sont au cœur de l'épreuve de leçons de mathématiques et de l'épreuve de modélisation mathématique. La première consiste à construire une leçon sur un thème donné. La candidate ou le candidat doit proposer un plan argumenté précisant l'agencement et l'enchaînement des concepts clés de la notion abordée, les illustrer par des exemples, en donner des applications et être en mesure de développer au tableau des résultats représentatifs de cette leçon. C'est à la candidate ou au candidat qu'il incombe de sélectionner de tels résultats représentatifs (au moins deux), d'expliquer ces choix, et d'en proposer le développement au jury, dans un temps imparti. Dans la seconde épreuve, la candidate ou le candidat doit mettre en valeur ses connaissances techniques à partir d'un texte d'environ six pages qui lui est fourni. Il s'agit alors de mettre des mathématiques en action dans un contexte applicatif. La candidate ou le candidat présente et discute, de manière structurée, les hypothèses qui conduisent à la description mathématique proposée dans le texte et explique comment les énoncés du programme s'appliquent dans le contexte qui y est décrit. Le propos doit, de plus, être illustré en exploitant l'outil informatique.

Le jury rappelle que s'écarter du programme n'est en aucun cas une exigence pour prétendre à des notes très satisfaisantes ; le jury encourage surtout les préparations et les candidates et candidats à se concentrer sur la maîtrise des bases.

### 3.1 Épreuve orale de mathématiques (Analyse-Probabilités & Algèbre-Géométrie)

Les thèmes des leçons proposées au concours docteurs sont une sélection de l'ensemble des leçons d'algèbre-géométrie et d'analyse-probabilités du concours standard. On trouvera en annexe la liste des leçons qui seront utilisées en 2026, identique à celle de 2025. Le format de cette épreuve de leçons, ainsi que ses attendus, sont en tous points identiques à ceux des épreuves d'Analyse-Probabilités et d'Algèbre-Géométrie du concours standard. Aussi, les candidats sont invités à se reporter aux indications fournies dans le rapport du concours standard pour cette épreuve.

Proposer un plan de leçon et réaliser le développement d'une démonstration précise et détaillée d'un résultat substantiel sélectionné dans le plan proposé, dans un temps limité, sans recours à des notes, constituent des exercices difficiles qui ne s'improvisent pas et auxquels les candidates et candidats doivent impérativement s'entraîner. Il est recommandé de s'y exercer au sein d'une préparation universitaire, où les candidates et candidats docteurs, forts d'une plus grande maturité scientifique, peuvent d'ailleurs jouer un rôle d'émulation très positif sur l'ensemble de la promotion. Le jury attire l'attention des candidates et candidats sur le fait que les tirages peuvent combiner deux leçons orientées analyse et probabilités ou deux leçons orientées algèbre et géométrie ou deux leçons prises dans chacun de ces champs. La candidate ou le candidat choisit laquelle de ces deux leçons elle ou il va exposer au jury. Le

jury recommande une lecture minutieuse du rapport du concours standard, qui donne des indications détaillées sur les attendus de ces leçons. On y trouvera notamment une description des notions de base qui devraient constituer le cœur des leçons.

Il est toujours conseillé aux candidates et candidats de chercher à rassurer le jury quant à la maîtrise de ces bases plutôt que de tenter de l'éblouir par un exposé potentiellement inspiré de leurs thèmes de recherche mais débordant largement du programme. Le jury estime que le programme du concours contient un matériel technique suffisamment étoffé pour évaluer les capacités à remplir les missions du professeur agrégé. Les résultats contrastés sont surtout le reflet de niveaux de préparation hétérogènes.

## 3.2 Épreuve orale de modélisation (options A, B et C)

Pour cette épreuve, le jury renvoie là encore aux recommandations faites dans le rapport du concours standard. Le jury recommande d'éviter les écueils suivants :

- se lancer dans un hors sujet, caractérisé par une tentative de replacer le contenu d'une leçon au détriment de l'analyse du texte ;
- négliger l'illustration informatique, parfois par manque d'entraînement sur les logiciels du concours.

Les candidates et candidats docteurs peuvent tirer profit de leur recul scientifique dans cette épreuve qui nécessite des qualités de synthèse et une capacité à balayer le programme de manière transverse.

Le jury encourage les futurs candidates et candidats à bien se préparer à cette épreuve en s'exerçant sur les textes rendus publics et en se familiarisant avec l'environnement informatique du concours accessible sur le site [agreg.org](http://agreg.org).

## 3.3 Épreuve orale de mise en perspective didactique d'un dossier recherche

Cette épreuve est spécifique au concours spécial ; sa matière est fournie par un document PDF de 12 pages maximum déposé par la candidate ou le candidat sur son espace **Cyclades** dix jours avant le début des épreuves d'admission (en l'espèce la date butoir était donc le 8 juin à 23h59). Ce document consiste en un dossier scientifique présentant le parcours, les travaux de recherche et, le cas échéant, les activités d'enseignement et/ou de valorisation de la recherche. Il n'y a pas de format type puisque ce document a pour vocation de décrire l'expérience *personnelle* du candidat ; il doit surtout s'attacher à décrire le parcours de la candidate ou du candidat, la place qu'occupent les mathématiques dans les principales étapes de celui-ci et comment cette expérience, quelle qu'en soit la nature, sera réinvestie dans la pratique enseignante. La description de l'exploitation d'outils mathématiques au cours d'une expérience professionnelle, comme ingénieur par exemple, est tout à fait bienvenue. Candidates et candidats déjà enseignants peuvent aussi expliquer comment leur expérience de recherche s'exprime dans les classes.

Chaque dossier est confié au préalable à deux membres du jury, avec mission d'en être rapporteurs devant la commission d'interrogation. L'affectation des dossiers prend garde à ne pas confier cette part de l'évaluation à un expert du sujet de thèse de la candidate ou du candidat. L'appréciation du document fourni fait partie des éléments de la grille de notation. Les deux autres membres du jury sont réputés avoir un regard plus « candide » sur la présentation orale de ce dossier. Un débat préparatoire réunissait les membres de la commission avant les épreuves afin d'échanger sur les dossiers et d'organiser une interrogation personnalisée, adaptée aux profils de la candidate ou du candidat.

Les dossiers fournis sont pour la plupart soignés et de qualité, montrant un investissement incontestable des candidats pour mettre en valeur leur parcours. Le jury conseille aux candidates et candidats de

penser dans un même élan le document écrit et la présentation orale, en ayant bien présent à l'esprit que le document fournit la base de la présentation et qu'il sera disponible tout au long de celle-ci. Le jury recommande aux candidates et candidats d'inclure dans leur dossier un minimum d'éléments biographiques (notamment en y faisant apparaître clairement leur nom) : des informations sur la mobilité géographique et thématique, le parcours académique et/ou professionnel, les évolutions après thèse... donnent du relief à la discussion. La bibliographie doit être vérifiable par le jury (articles de revues avec comité de lecture, livres vendus dans le commerce etc.). L'impossibilité de trouver de trace des articles ou livres mentionnés dans la bibliographie est sanctionnée.

De manière générale, la rédaction du dossier doit être guidée par une réflexion sur la question « En quoi une expérience dans la recherche peut-elle être un plus pour un enseignant ? ». La dimension de mise en perspective didactique du dossier occupe une place importante de son évaluation : on attend des candidats qu'ils mettent en lumière leurs savoirs, les méthodes et démarches présentes dans leurs travaux et qu'ils expliquent comment elles pourraient être réinvesties dans un enseignement sur l'éventail « lycée - L3 ». Le jury fait observer que la description d'une démarche de recherche et son explication didactique peuvent s'appuyer sur des sujets différents de ceux abordés durant la thèse, si la candidate ou le candidat juge un tel choix plus pertinent (cela peut être le cas pour des candidats ayant une expérience post-thèse assez longue). Davantage que les travaux proprement dits, c'est son expérience de recherche, son parcours qu'il convient de valoriser dans cette épreuve. En particulier, le jury recommande de ne pas s'appuyer sur des résultats obtenus personnellement mais dont on n'a plus la maîtrise. Les concepts utilisés doivent être introduits, et pouvoir être expliqués en détail.

L'objet de cette épreuve est que les candidates et candidats puissent faire preuve d'une véritable plus-value, les distinguant des candidats du concours standard.

Bien que cette demande puisse être légitime au regard des pratiques de la communauté mathématique, les textes régissant le concours interdisent l'exploitation de matériel auxiliaire : les candidates et candidats ne peuvent donc pas appuyer leur présentation sur un support projeté préparé à cette fin. Pour compenser en partie cette difficulté, le jury a décidé de projeter le document de 12 pages fourni par la candidate ou le candidat, en amont du concours. Il recommande donc vivement aux candidates et candidats de prendre en compte cette disposition, afin d'exploiter au mieux cette ressource pour leur exposé. Ce document peut notamment contenir des images ou des figures en illustrant le contenu, qui peuvent même être organisées sous forme d'animation à l'intérieur du fichier PDF. (Il doit bien s'agir d'images ou de figures sous forme d'animation ; cette option ne doit pas permettre d'ajouter du texte et de contourner ainsi la limitation imposée de 12 pages. Si une candidate ou un candidat utilise cette opportunité, il lui est conseillé de l'indiquer dans le document). Il est aussi possible d'insérer des liens hypertextes pour naviguer à l'intérieur du document. Il n'est toutefois pas permis d'exploiter des liens vers des sites web. De même, il n'est pas autorisé de se munir de son manuscrit de thèse, d'articles de recherche, ou, évidemment, de notes personnelles, ni pendant l'épreuve proprement dite, ni pendant la préparation ; seuls sont autorisés les mêmes documents que pour les autres épreuves, à savoir des livres dont la diffusion commerciale est avérée.

Il était rappelé en début de préparation que l'épreuve a pour objectif « d'apprécier l'aptitude de la candidate ou du candidat à rendre ses travaux accessibles à un public de non-spécialistes ». Typiquement il était recommandé de construire un discours à destination d'un auditoire de niveau au plus M2 de mathématiques ; l'épreuve n'est pas un séminaire réservé à un public de chercheurs sur le sujet de thèse de la candidate ou du candidat. Une grande attention avait été apportée à la composition des commissions pour justement éviter la présence d'experts des thèmes de recherche de la candidate ou du candidat. L'aptitude à se faire comprendre par des non-spécialistes, à la fois dans le dossier écrit et durant la prestation orale, la capacité à s'adapter à des questions de niveaux variés, occupent une part très substantielle de la grille de notation.

L'arrêté du 28 juin 2016 stipule que la candidate ou le candidat doit, lors de cette épreuve, répondre « [...] à une question [...] communiquée par le jury au début de l'heure de préparation ». Elle ou il reçoit donc une question spécifique l'invitant à développer sa réflexion sur la dimension didactique qui

pourrait être donnée à son expérience de recherche et à expliquer comment cette expérience pourrait rejaillir dans ses fonctions d'enseignant. Lors de cette session, la question portait sur la proposition d'une ou plusieurs activités en classe autour des thématiques suivantes :

- proposer une illustration ou animation graphique, un dessin ou un objet permettant d'introduire une notion mathématique ;
- proposer une activité instaurant une situation de recherche en classe ;
- proposer une activité introduisant une problématique de modélisation.

Dans les trois cas, il était demandé de préciser à quel niveau était destiné la proposition lycée, ou bien L1 ou L2 non spécialiste.

Le jury souligne qu'il n'y a pas de réponse « type » attendue. Néanmoins, le jury apprécie sa pertinence et attend une description assez précise et concrète de la séance qui pourrait être proposée à des élèves ou des étudiants, avec des exemples et des exercices le cas échéant. Les mathématiques mises en oeuvre et l'identification des enjeux didactiques sont des éléments qu'il convient de bien expliciter. Certaines candidates et certains candidats ont fait cet effort de réfléchir à leur séance de cours ou TD et ont décrit en détail la séquence, en mettant bien en avant une démarche, bâtie sur une question, un calcul, une simulation, et conduisant à des déductions. Si ces propositions ont été plus ou moins pertinentes, avec un niveau plus ou moins bien identifié/adapté, elles ont toujours été valorisées par rapport aux affirmations laconiques « cette notion pourrait être présentée à des étudiants de L1-L2 », « telle partie pourrait être comprise par des étudiants de L1-L2 »... Le dialogue s'est systématiquement attaché à clarifier les modalités de mise en oeuvre pratique et concrète de la séquence proposée.

L'épreuve proprement dite comprend deux parties distinctes. Dans un premier temps, durant 30 minutes, la candidate ou le candidat organise librement la présentation de son dossier (durant au moins 20 minutes) et la réponse à la question posée (durant au moins 5 minutes). La suite de l'interrogation est consacrée à un dialogue avec le jury. Ce dialogue, personnalisé suivant le parcours de la candidate ou du candidat, explore divers aspects du dossier. On peut y distinguer

- des questions en lien direct avec la question posée pour la préparation de l'épreuve. L'objectif est ici de discuter du contenu mathématique de la démarche proposée et de sa mise en perspective didactique.
- des questions sur les mathématiques, les démarches et les méthodes présentées par la candidate ou le candidat lors de son exposé ou présents dans son dossier. Il ne s'agit pas de questions spécialisées d'experts, et encore moins de questions « pièges ». En particulier, pour des docteurs ayant soutenu leur thèse dans d'autres disciplines que les mathématiques, ces questions visent à mettre en relief les aspects mathématiques qui peuvent être en rapport avec leurs travaux de leur recherche. Le but est de tester la capacité à expliquer des points élémentaires des travaux de recherche et de discuter des possibilités de réinvestir les démarches utilisées ou les savoir-faire acquis dans un enseignement de niveau lycée, ou L1-L2.
- le jury peut proposer un exercice niveau lycée (ou L1 mais en restant dans des domaines très classiques) dans un domaine disjoint de celui de la thèse en demandant de le « faire vivre » dans une classe. Ces questions sortent les candidats de leur zone de confort en les faisant réfléchir à des questions en lien avec le programme du secondaire qui ne sont pas reliées à leur domaine de recherche. Il n'est pas attendu de résolution complète des exercices proposés lors de l'oral. Le jury attend une réflexion et une mise en oeuvre d'une possible stratégie, à commencer le plus souvent par une modélisation du problème.
- enfin, le jury pose des questions plus ouvertes dont le thème général peut se résumer à évaluer l'apport d'une expérience dans la recherche pour un enseignant.

Ces questions, dont le niveau est généralement assez élémentaire, arrivent au débotté durant la discussion. La capacité à rebondir pour resituer la question dans le cadre de l'expérience de recherche et/ou d'une réflexion à mener en classe, à reformuler des notions pour les rendre accessibles à un public non averti sont particulièrement évaluées dans cette phase de l'épreuve.

Cette épreuve permet de faire ressortir un véritable signal, discriminant et pertinent quant à l'objectif de recrutement d'enseignants et de valorisation d'une expérience de recherche. Elle joue pleinement son rôle dans la sélection des candidates et candidats. L'épreuve permet à des profils variés, issus d'autres disciplines ou dont la thèse est ancienne, d'exprimer des qualités et une motivation pour les carrières d'enseignants en mathématiques. Pour tirer plein profit de leur expérience et bien mettre en valeur leur parcours, les candidates et candidats doivent préparer cette épreuve spécifique avec soin. Une prestation improvisée, purement descriptive des résultats doctoraux, sans réflexion de mise en perspective et sans anticipation de la discussion, ne conduira qu'à un résultat médiocre.

## Chapitre 4

# La bibliothèque de l'agrégation

Pendant la préparation à l'épreuve de leçon, les candidates et les candidats ont accès à la bibliothèque du concours. . Pendant la préparation à l'épreuve de modélisation, les candidates et les candidats disposent d'une bibliothèque numérique. La liste des livres disponibles de ces deux bibliothèques peuvent être consultées dans le rapport de l'agrégation externe.

# Chapitre 5

## Liste des leçons de mathématiques pour le concours spécial 2026

Leçons de mathématiques pour le concours spécial docteurs 2026

- 101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- 105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
- 106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie  $E$ , sous-groupes de  $GL(E)$ . Applications.
- 108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
- 120 Anneaux  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ . Applications.
- 121 Nombres premiers. Applications.
- 123 Corps finis. Applications.
- 141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
- 142 PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.
- 148 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
- 149 Déterminant. Exemples et applications.
- 151 Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.
- 155 Exponentielle de matrices. Applications.
- 156 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
- 157 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
- 159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.
- 162 Systèmes d'équations linéaires; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.
- 171 Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.
- 181 Convexité dans  $\mathbf{R}^n$ . Applications en algèbre et en géométrie.
- 190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.
- 203 Utilisation de la notion de compacité.
- 208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
- 213 Espaces de HILBERT. Exemples d'applications.

- 214** Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.
- 215** Applications différentiables définies sur un ouvert de  $\mathbf{R}^n$ . Exemples et applications.
- 218** Formules de TAYLOR. Exemples et applications.
- 219** Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.
- 220** Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.
- 223** Suites réelles complexes. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.
- 226** Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.
- 228** Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.
- 234** Fonctions et espaces de fonctions LEBESGUE-intégrables.
- 235** Problèmes d'interversion de symboles en analyse.
- 236** Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.
- 241** Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- 245** Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de  $\mathbf{C}$ . Exemples et applications.
- 246** Séries de FOURIER. Exemples et applications.
- 250** Transformation de FOURIER. Applications.
- 262** Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.
- 266** Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.