MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS
Liberté
Égalité
Fraternité

Concours de recrutement du second degré

Rapport de jury

Concours : Agrégation externe spéciale

Section : Mathématiques

Session 2021

Rapport de jury présenté par : Claudine Picaronny
Président du jury

Table des matières

Introduction

La session 2021 est la cinquième édition de ce concours spécial réservé aux docteurs. Les exigences scientifiques de ce concours spécial sont les mêmes que celles qui régissent le concours externe standard, sans aucune concession quant aux connaissances mathématiques et leur maîtrise. Cependant, son format original et son public réservé donnent l'occasion de mettre en valeur la maturité liée à une expérience professionnelle et les qualités spécifiques résultant d'une pratique des mathématiques par la recherche. Ce concours permet ainsi de recruter des professeurs agrégés ayant un parcours professionnel déjà établi, une expérience de recherche, des compétences pluridisciplinaires, éventuellement marqués par la confrontation à un environnement international. Ce vécu est appelé à s'exprimer au concours et ne peut que rejaillir positivement sur la pratique enseignante. L'expérience montre que cette voie de recrutement est très ouverte et permet de valoriser — moyennant un indispensable effort de préparation — des candidats aux parcours et profils variés, incluant des titulaires d'une thèse dans une autre discipline que les mathématiques.

Ce rapport vise deux objectifs. D'une part il établit un bilan de la session 2021, notamment en présentant les données statistiques du concours et en discutant les éléments saillants des productions des candidats. D'autre part il se veut un document *utile* pour les futurs candidats afin de les aider à se préparer au mieux pour les épreuves qui les attendent. Ainsi, il fournit :

- un corrigé commenté de l'épreuve écrite d'admissibilité, en indiquant les erreurs les plus fréquentes et les défauts de rédaction observés ;
- des recommandations précises pour les épreuves orales d'admission.

Le jury invite les candidats de tous profils, ainsi que les centres de préparation et leurs intervenants, à en faire une lecture attentive et à bien tenir compte des prescriptions qui y sont faites. La consultation du rapport du concours standard, plus détaillé sur les attentes des épreuves d'admission peut s'avérer utile.

On trouve sur le site officiel de l'agrégation externe de mathématiques agreg.org nombre d'informations utiles : des archives (sujets d'écrit, textes de modélisation, rapports) et des renseignements pratiques concernant les sessions à venir. En particulier, les futurs candidats peuvent trouver sur ce site la `ClefAgreg` qui leur permettra de se familiariser avec l'environnement informatique qu'ils rencontreront pour l'épreuve de modélisation. Se préparer suffisamment tôt à cette épreuve permet d'en bien comprendre les attendus, mais aussi peut aider à renforcer les capacités de synthèse sur l'ensemble du programme. Enfin, le jury rappelle qu'une réunion publique, ouverte aux préparateurs et aux candidats, est traditionnellement organisée en début d'année universitaire sous l'égide des sociétés savantes de mathématiques et d'informatique pour évoquer le bilan et les perspectives du concours.

Le concours externe, spécial comme standard, de l'agrégation a pour vocation de recruter des professeurs agrégés destinés à exercer dans l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collèges) ou dans l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, grandes écoles, classes préparatoires aux grandes écoles, sections de techniciens supérieurs). Le jury estime donc que le niveau visé doit permettre au professeur agrégé d'intervenir sereinement et efficacement sur le créneau « bac-3/bac+3 » ; cet objectif calibre la conception du programme et les critères d'évaluation. Le programme du concours spécial reprend à l'identique celui du concours standard. Il est publié sur le site www.devenirenseignant.gouv.fr/. Le programme pour l'édition 2022 est accessible à l'URL https://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agregation_externe_spec/34/7/p2022_agreg_ext_spec_mathematiques_1402347.pdf.

Le jury recommande aux candidats de se préoccuper suffisamment tôt des questions liées à la gestion de leur carrière auxquelles ils seront confrontés en cas de succès au concours. Les lauréats de ce concours spécial sont considérés comme devant être immédiatement opérationnels et ne devraient donc pas être concernés par les procédures de report de stage. Notamment, les possibilités d'être nommé stagiaire en qualité d'ATER ou affecté dans l'enseignement supérieur sur un emploi de professeur du second degré (PRAG) ne sont pas offertes aux lauréats du concours spécial (note de service n°. 2019-064 du 25 avril 2019, https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=141354). Il est à noter que les reçus bénéficient d'une bonification d'ancienneté de deux ans au titre de la période de préparation du doctorat ; lorsque la période de préparation du doctorat a été accomplie sous contrat de travail, les services accomplis dans ce cadre sont pris en compte pour la part de leur durée excédant deux ans (article 6 du décret n°. 72-580 du 4 juillet 1972 relatif au statut particulier des professeurs agrégés de l'enseignement du second degré, modifié par le décret n°. 2016-656 du 20 mai 2016).

Chapitre 1

Déroulement du concours et statistiques

1.1 Déroulement du concours 2021

Le concours spécial docteur, création de la campagne de recrutement 2017, est un concours « jeune », instaurée par le décret n°. 2016-656 du 20 mai 2016. En 2019, six disciplines étaient concernées par l'ouverture de postes à ce concours spécial : mathématiques (seize postes), langues vivantes étrangères : anglais (dix postes), lettres modernes (douze postes), physique-chimie option chimie (cinq postes), physique-chimie option physique (douze postes) et sciences de la vie-sciences de la Terre et de l'Univers (cinq postes). Les modalités des épreuves sont décrites par l'arrêté du 28 juin 2016, accessible sur le site https://www.legifrance.gouv.fr/. Le concours comprend une seule épreuve écrite d'admissibilité et trois épreuves orales d'admission : une épreuve de leçon de mathématiques qui couvre l'intégralité du programme (sans distinction des thèmes d'algèbre-géométrie et ceux d'analyse-probabilités), une épreuve de modélisation et une épreuve de mise en perspective didactique d'un dossier de recherche qui est spécifique à ce concours. Les candidats ont le choix parmi quatre options :

— probabilités et statistiques,
— calcul scientifique,
— algèbre et calcul formel,
— informatique,

qui ne diffèrent que par l'épreuve de modélisation.

Ce concours spécial est réservé aux titulaires d'un doctorat, le diplôme devant être acquis à la date de publication de la liste des admissibles. Les mères ou pères d'au moins trois enfants ainsi que les sportifs de haut niveau sont dispensés de cette condition de diplôme, mais ils seront bien sûr confrontés aux mêmes épreuves. En particulier candidater à ce concours n'a de sens que pour une personne qui, sans être forcément titulaire d'un doctorat, peut justifier d'un parcours et d'une expérience pouvant être mis en valeur dans l'épreuve sur dossier. Tout en rappelant que le référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat de l'éducation (arrêté du 1er Juillet 2013) indique que la maîtrise de la langue française est un attendu premier, il est important de souligner que ce concours est ouvert à tout ressortissant d'un État membre de l'Union européenne, d'un État faisant partie de l'accord sur l'Espace économique européen, de la principauté d'Andorre, de la Confédération suisse ou de la Principauté de Monaco. Ainsi, ce concours peut être une opportunité pour des docteurs ressortissants de ces pays, intéressés pour exercer en France, mais dont le parcours académique initial, par exemple effectué à l'étranger, ne donnait pas d'inclination particulière pour passer le concours de l'agrégation externe standard dans la lignée de leur cursus. Enfin, cette session le prouve encore, le format de l'épreuve permet d'attirer des candidats qui seraient titulaires d'une thèse dans une autre discipline : ils ont l'occasion d'expliquer comment des outils mathématiques sont intervenus au cours de leur expérience de recherche ou professionnelle, comment ils ont été exploités au service d'applications concrètes et comment cette expérience pourra enrichir leur pratique d'enseignant en mathématiques.

L'épreuve écrite d'admissibilité s'est déroulée le mercredi 3 mars 2021. Les candidats sont libres de s'inscrire à la fois au concours standard et au concours spécial ; toutefois, les épreuves écrites ayant lieu au même moment, il leur faut déterminer finalement à quel concours ils souhaitent se présenter. Le jury conseille aux candidats d'effectuer ce choix en évaluant quelles épreuves leur permettent de mieux se mettre en valeur, en fonction de leur parcours et de leur préparation, toute autre considération, par exemple liée à la gestion des carrières, paraissant particulièrement hypothétique.

La liste des candidats admissibles a été publiée le 11 mai 2021. Les épreuves orales du concours spécial étaient organisées en parallèle de celles du concours standard de l'agrégation externe à Lille, au lycée Pasteur. Le jury et les candidats y ont trouvé d'excellentes conditions de travail, malgré les contraintes dues à la situation sanitaire, et ont profité d'un accueil chaleureux et dévoué. Les jurys, les délibérations et les classements du concours spécial et du concours standard sont distincts.

La session 2022

Le concours 2022 voit disparaitre l'option informatique, en raison de la création de l'agrégation d'informatique. Les oraux se dérouleront au lycée Kléber à Strasbourg.

1.2 Commentaires généraux et statistiques sur la session 2021

1.2.1 Commentaires généraux

Le nombre d'inscrits au concours spécial s'élève à 228 et 68 candidats se sont présentés à l'épreuve écrite. À l'issue de la délibération d'écrit, 27 candidats ont été déclarés admissibles ; le premier admissible avait une note de 18/20 et le dernier une note de 5,25/20. Avec toutes les précautions d'usage sur la comparaison entre deux concours différents, le jury estime que tous ces candidats auraient probablement eu leur place parmi les admissibles du concours standard et que les meilleures copies du concours spécial s'y seraient placées à un très bon, voire excellent, rang. À l'issue des épreuves orales, les délibérations du jury ont conduit à retenir les 13 candidats qui avaient franchi la note moyenne de 8,66/20 ; le premier du concours présente une moyenne de 16,4/20 et le premier candidat non admis a une moyenne de 7,8.

Le jury renouvelle sa principale recommandation qui consiste à s'assurer de bases solides et à faire preuve de la maîtrise de ces bases, que ce soit par une rédaction efficace et convaincante à l'écrit, par des leçons calibrées et soignées ou une présentation à l'épreuve de modélisation qui inspirent toute confiance quant à la solidité de ces bases. La consultation du rapport du concours standard confortera ces priorités.

Admissibilité. L'épreuve écrite, unique, se présente sous un format légèrement différent de celui du concours standard. Le site agreg.org présente les archives du concours afin que les futurs candidats puissent se familiariser avec ce format. Le sujet était constitué

— d'une série d'exercices, qui balaient plutôt le niveau L1-L3,
— de deux problèmes **au choix**, l'un plutôt orienté sur la partie algèbre-géométrie du programme, l'autre orienté sur la partie analyse-probabilités.

Cette formulation permet d'une part de tester les candidats sur les bases du programme, et d'autre part de leur donner l'occasion de s'exprimer au mieux sur ce qui pourrait être leur terrain de prédilection. L'en-tête du sujet invitait très clairement les candidats à répartir leur temps, dont au moins la moitié devait être dévolue au problème et au moins un tiers à la partie exercices. Le barème correspondait à une telle répartition de l'effort. Les candidats doivent convaincre d'une compétence suffisante sur l'ensemble du programme : si le problème invite les candidats à s'exprimer sur leurs thèmes de prédilection, les exercices préliminaires ont précisément la vocation de vérifier les connaissances de base sur un éventail large. Les candidats ne doivent pas se se focaliser sur les seuls exercices relevant du même thème que le problème choisi. Une telle stratégie est pénalisée.

Un tel format « exercices (imposés) + problème au choix », avec la même clef de répartition du temps et du barème, sera reconduit en 2022.

Admission. Bien que le concours comporte une épreuve sur dossier, impliquant ainsi une connaissance du parcours et du profil du candidat, le jury travaille de manière étanche : les commissions des épreuves de leçons et de modélisation ne reçoivent aucune indication sur les candidats (sujet de thèse, provenance, situation professionnelle...). Les commissions n'ont par ailleurs aucune information quant aux résultats à l'écrit ou aux autres épreuves orales avant la phase de délibération. Ces épreuves obéissent donc au même fonctionnement et aux mêmes critères d'évaluation que pour le concours standard.

Le programme Le concours externe de l'agrégation a pour vocation de recruter des professeurs agrégés destinés à exercer dans l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collèges) ou dans l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, grandes écoles, classes préparatoires aux grandes écoles, sections de techniciens supérieurs). Le jury estime donc que le niveau visé devrait permettre au professeur agrégé d'intervenir sereinement et efficacement sur le créneau « bac-3/bac$+3$ » ; cet objectif calibre la conception du programme et les critères d'évaluation.

Le programme et la nature des épreuves, écrites et orales, font l'objet de publications sur le site officiel de ministère de l'Éducation nationale http://www.devenirenseignant.gouv.fr. Le programme 2022, disponible à l'URL http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/agregation_externe/33/7/p2022_agreg_ext_mathematiques_1402337.pdf est identique au programme 2021 et se contente d'acter la disparition de l'option informatique.

Le jury s'engage, bien sûr, à respecter le programme. Ce programme n'est pas exhaustif, il résulte d'un compromis et des résultats mathématiques « importants » manquent au programme. Il est tout à fait possible que des candidats aient connaissance de ces notions avancées, souhaitent en faire mention et proposer des excursions hors des limites du programme. Le jury saura s'adapter et apprécier de telles propositions. Toutefois, elles ne sont absolument pas nécessaires pour prétendre aux notes maximales.

1.2.2 Données statistiques diverses

Trois candidats se sont présentés à l'épreuve écrite avec une dispense de diplômes, mais aucun n'a pu être déclaré admissible.

Répartition des candidats selon le genre On trouvait 24 % puis 20 % de femmes parmi les inscrits et les présents à l'épreuve d'admissibilité. Avec 2 candidates admissibles sur 27 (soit 7 %), et une unique candidate présente et admise à l'oral .

Répartition des candidats selon l'âge La majeure partie des admissibles et des admis a moins de 35 ans.

Age	< 29	29 - 30	31 - 32	33 - 35	36 - 40	41-45	46-50	> 50
Inscrits	7	20	26	28	42	24	30	51
Admissibles	1	2	7	4	2	2	1	8
Admis	1	1	5	2	1	1	1	1

FIGURE 1.1 – Répartition des candidats suivant l'âge aux différentes étapes du concours

Répartition selon l'académie.

[H !]

Academie	Inscrit	Compose	Admissible	Oral	Admis
CRETEIL-PARIS-VERSAIL.	65	19	10	8	5
LILLE	14	3	1	1	
GRENOBLE	13	5	4	2	2
TOULOUSE	13	4	2	2	2
LYON	12	6	4	3	2
POITIERS	11	2			
BORDEAUX	10	3	1	1	
STRASBOURG	10	5	1	1	
NANTES	9	2			
AIX-MARSEILLE	8	2	1	1	1
MONTPELLIER	8	3			
RENNES	8	3	1		
NANCY-METZ	7	2	1	1	1
NICE	6	1	1	1	
REIMS	5	2			
ORLEANS-TOURS	4				
AMIENS	4	2			
BESANCON	3	1			
ROUEN	3				
LA REUNION	3				
MAYOTTE	3				
CAEN	2	1			
GUADELOUPE	2				
CLERMONT-FERRAND	1	1			
DIJON	1				
MARTINIQUE	1	1			
GUYANE	1				
NOUVELLE CALEDONIE	1				

Tableau de répartition des candidats par académie

Répartition selon la profession Ces données sont issues des déclarations faites par les candidats lors de l'inscription et sont peu précises.

Profession	Inscrit	Compose	Admissible	Oral	Admis
CERTIFIE	90	33	10	6	1
SANS EMPLOI	30	12	7	7	6
CADRES SECT PRIVE CONV COLLECT	16	3	2	2	1
ENSEIGNANT DU SUPERIEUR	15	4	1	1	1
CONTRACTUEL 2ND DEGRE	11				
ENS.STAGIAIRE 2E DEG. COL/LYC	9	3	1	1	1
CONTRACT ENSEIGNANT SUPERIEUR	8	2	1	1	1
ETUD.HORS ESPE (PREPA MO.UNIV)	7	2	1	1	1
SALARIES SECTEUR TERTIAIRE	6	1	1		
AGREGE	5	1			
VACATAIRE ENSEIGNANT DU SUP.	4				
ETUD.HORS ESPE (SANS PREPA)	4				
PLP	3	2	2	1	
SALARIES SECTEUR INDUSTRIEL	3	1	1	1	1
PERS ENSEIG TIT FONCT PUBLIQUE	3				
AG NON TITULAIRE FONCT PUBLIQ	3				
ASSISTANT D'EDUCATION	1	1			
ETUD.HORS ESPE (PREPA CNED)	1				
ARTISANS / COMMERCANTS	1	1			
MAITRE AUXILIAIRE	1				
VACATAIRE DU 2ND DEGRE	1				
PERS ENSEIG NON TIT FONCT PUB	1				
FORMATEURS DANS SECTEUR PRIVE	1				
ADJOINT D'ENSEIGNEMENT	1				
PROFESSIONS LIBERALES	1	1			
PROFESSEUR ECOLES	1	1			
ENSEIG NON TIT ETAB SCOL.ETR	1				

FIGURE 1.2 – Répartition suivant la profession aux différentes étapes du concours

On observe de fortes évolutions d'une année sur l'autre, sur des effectifs qui restent réduits. La population des admissibles et des lauréats est très contrastée, mêlant « jeunes » docteurs et candidats dont la thèse est plus ancienne. Les doctorats des candidats se répartissent sur des champs des mathématiques très variés ou relèvent d'autres disciplines (automatique, physique, informatique...)

Chapitre 2

Épreuve écrite de mathématiques

2.1 Énoncé

Le sujet est disponible à l'URL

http://www.devenirenseignant.gouv.fr/cid137747/sujets-rapports-des-jurys-agregation-2021.html

ou sur le site agreg.org.

2.2 Commentaires sur l'épreuve écrite d'admissibilité

Quelques candidats ont traité une grande partie du sujet (en analyse comme en algèbre), et ont produit des copies très bonnes voire excellentes. Les candidats ont globalement fait l'effort d'aborder tous les exercices, maisn'ont pas souvent montré une aisance suffisante en algèbre, en analyse et en probabilités. Par exemple, les bornes supérieures ont été traitées avec beaucoup de confusion, et parfois des erreurs grossières (exercice 1 question 3). En algèbre, le théorème de Bézout est tout simplement absent de la plupart des copies (exercice 4 question 1). Quant aux probabilités, trop peu de candidats savent écrire et manipuler des intersections ou réunions d'événements. Les problèmes ont été rédigés de façon relativement soignée, ce qui a été apprécié, mais beaucoup trop éparse, les candidats ayant eu trop tendance à répondre à des questions isolées sans traiter de partie significative. Les mêmes constats que pour les exercices peuvent être faits : il subsiste des lacunes importantes sur des points élémentaires. Ainsi, en algèbre, trop peu ont su faire la question I.2., confondant 2 puissance n et 2n, et en analyse, très peu savent montrer qu'une fonction définie par une série est continue (question I.5.(a)). Sur la même ligne, on pourra regretter les difficultés à calculer une somme géométrique (analyse I.4.) ou un polynôme caractéristique (algèbre II.8.(a)).

2.3 Proposition de corrigé

Exercices

Exercice 1

1. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$: alors F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1]\,,\ F'(x) = f(x)$, d'où :

   - F est continue sur $]0,1]$, donc $T(f)$ est continue en tout point de $]0,1]$;
   - $\forall x \in\,]0,1]\,,\ T(f)(x) = \dfrac{F(x)-F(0)}{x}$, donc $T(f)(x) \underset{x\to 0}{\to} F'(0) = f(0)$, c-à-d. que $T(f)$ est continue en 0.

   Ainsi, $T(f) \in \mathscr{C}^0[0,1]$.
2. Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$ telle que $\|f\|_\infty \leqslant 1$.

   Alors $\forall x \in\,]0,1]\,,\ |T(f)(x)| = \dfrac{1}{x}\left|\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \underbrace{|f(t)|}_{\leqslant 1}\mathrm{d}t \leqslant 1.$

   Or $|T(f)(0)| = |f(0)| \leqslant 1$, donc $\forall x \in [0,1]\,,\ |T(f)(x)| \leqslant 1$, d'où : $\|T(f)\|_\infty \leqslant 1$.
   On en déduit alors que T est continue et que $|||T||| \leqslant 1$.
3. (a) D'après le théorème de Weierstraß, f est uniformément approchable par une suite de fonctions polynomiales sur $[0,1]$ (car f est continue sur $[0,1]$).
   Ainsi, il existe $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $\|f-P\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

   (b) Soit $n \in \mathbf{N}$: alors

   $$\begin{aligned}\|T^n(f)-f(0)\|_\infty &= \|T^n(f)-T^n(P)+T^n(P)-P(0)+P(0)-f(0)\|_\infty.\\ &\leqslant \|T^n(f)-T^n(P)\|_\infty + \|T^n(P)-P(0)\|_\infty + \|P(0)-f(0)\|_\infty.\end{aligned}$$

   - $\|T^n(f)-T^n(P)\|_\infty = \|T^n(f-P)\|_\infty \leqslant \|f-P\|_\infty \leqslant \varepsilon$ (car $|||T^n||| \leqslant |||T|||^n \leqslant 1$).
   - $\|P(0)-f(0)\|_\infty \leqslant \|P-f\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

   Donc $\forall n \in \mathbf{N},\ \|T^n(f)-f(0)\|_\infty \leqslant \|T^n(P)-P(0)\|_\infty + 2\varepsilon$.

   (c) Écrivons P sous la forme $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$: on montre alors par récurrence que

   $$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in [0,1]\,,\ T^n(P)(x) = \sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{(k+1)^n} x^k.$$

   Ainsi,

   $$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in [0,1]\,,\ |T^n(P)(x) - P(0)| = \left|\sum_{k=1}^{d} \frac{a_k}{(k+1)^n} x^k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{d} \frac{|a_k|}{(k+1)^n}.$$

   Donc $\forall n \in \mathbf{N},\ \|T^n(P)-P(0)\|_\infty \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \frac{|a_k|}{(k+1)^n}$.

   Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{d} \frac{|a_k|}{(k+1)^n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, donc $\|T^n(P)-P(0)\|_\infty \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Il existe alors $r \geqslant 0$ tel que $\forall n \geqslant r,\ \|T^n(P) - P(0)\|_\infty \leqslant \varepsilon$.
On déduit de 3.(b) que $\forall n \geqslant r,\ \|T^n(f) - f(0)\|_\infty \leqslant 3\varepsilon$.
Finalement, on a montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists r \geqslant 0,\ \forall n \geqslant r,\ \|T^n(f) - f(0)\|_\infty \leqslant 3\varepsilon,$$

d'où la convergence uniforme de $(T^n(f))_{n\in\mathbf{N}}$ vers $f(0)$.

Exercice 2

1. *Condition suffisante*

   (a) On montre par récurrence que $\forall k \in \mathbf{N},\ MA^k = B^k M$.

   En écrivant P sous la forme $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on a alors :

   $$MP(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k = \sum_{k=0}^{d} a_k MA^k = \sum_{k=0}^{d} a_k B^k M = P(B)M.$$

   (b) Soit P le polynôme caractéristique de A.
   Alors d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $P(A) = 0$.
   Donc, d'après 1.(a), $P(B)M = 0$.
   Supposons $P(B)$ inversible : alors (en multipliant à gauche par $P(B)^{-1}$) $M = 0$.
   C'est absurde, donc $P(B)$ n'est pas inversible.
   En outre, P s'écrit sous la forme $P = \prod_{k=1}^{n}(X - \alpha_k)$ où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont valeurs propres (complexes) de A.
   Donc $P(B) = \prod_{k=1}^{n}(B - \alpha_k I_n)$ n'est pas inversible.
   Or un produit de matrices inversibles est inversible, donc il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $B - \alpha_k I_n$ n'est pas inversible.
   Ainsi, α_k est valeur propre de B : A et B ont donc une valeur propre commune.

2. *Condition nécessaire*

   (a) $\forall \lambda \in \mathbf{C},\ \lambda \in \mathrm{Sp}({}^{\mathrm{t}}A) \ \Leftrightarrow\ \underbrace{{}^{\mathrm{t}}A - \lambda I_n}_{={}^{\mathrm{t}}(A-\lambda I_n)} \notin \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \ \Leftrightarrow\ A - \lambda I_n \notin \mathrm{GL}_n(\mathbf{C}) \ \Leftrightarrow\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.
   Donc $\mathrm{Sp}({}^{\mathrm{t}}A) = \mathrm{Sp}(A)$.

   (b) Soit $M = Y\,{}^{\mathrm{t}}X$.
   Alors $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2,\ M_{i,j} = X_{i,1} Y_{1,j}$.
   En outre, il existe $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $X_{i_0,1} \neq 0$ (car X est non nulle) et $j_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $Y_{1,j_0} \neq 0$ (car Y est non nulle), donc $M_{i_0,j_0} \neq 0$.
   Ainsi, M est non nulle.
   Enfin, $MA = Y\,{}^{\mathrm{t}}XA = Y\,{}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}AX) = \lambda Y\,{}^{\mathrm{t}}X = BY\,{}^{\mathrm{t}}X = BM$.

Exercice 3

1. Soit $x \in C$: alors $f(x) \in C$.
   Or $x_0 \in C$ et C est convexe, donc $f_n(x) = \dfrac{1}{n} x_0 + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) f(x) \in C$.

Ainsi, f_n est bien définie.

En outre, $\forall (x,y) \in C^2,\ \|f_n(y) - f_n(x)\| = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \|f(y) - f(x)\| \leqslant \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \|y - x\|$.

Donc f_n est contractante.

On en déduit alors, d'après le théorème du point fixe (qui stipule que toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même admet un unique point fixe) que f_n admet un unique point fixe.

2. Soient, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, x_n l'unique point fixe de f_n et $\sigma : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ telle que $(x_{\sigma(n)})_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers un certain $x \in C$ (c'est possible par compacité de C).
   - $f_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)}) = \dfrac{1}{\sigma(n)} x_0 + \left(1 - \dfrac{1}{\sigma(n)}\right) f(x_{\sigma(n)}) \underset{n \to \infty}{\to} f(x)$;
   - $f_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)}) = x_{\sigma(n)} \underset{n \to \infty}{\to} x$.

   On en déduit que $f(x) = x$.

3. - Sans l'hypothèse de compacité, ce résultat est faux : on peut voir cela en prenant par exemple une translation dans la droite réelle.
   - Sans l'hypothèse de convexité, ce résultat est faux : on peut voir cela en prenant par exemple une rotation du cercle trigonométrique dans lui-même.

Exercice 4

1. D'après le théorème de Bézout, il existe U et V dans $\mathbf{Q}[X]$ tels que $UP + VQ = 1$.
   En réduisant les coefficients de U et V au même dénominateur, on en déduit l'existence de $d \in \mathbf{N}^*$ tel que $dU \in \mathbf{Z}[X]$ et $dV \in \mathbf{Z}[X]$.
   On pose alors $\tilde{U} = dU$ et $\tilde{V} = dV$ et on a : $\tilde{U}P + \tilde{V}Q = d$.
   Soit $n \in \mathbf{N}$: alors $\tilde{U}(n)P(n) + \tilde{V}(n)Q(n) = d$, donc $u_n \mid d$.

2. Écrivons R sous la forme $R(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ (avec $a_0, \ldots, a_d$ dans $\mathbf{Z}$).
   En notant $\overline{\alpha}$ la classe dans $\mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ de tout $\alpha \in \mathbf{Z}$, on a :

$$\overline{R(n+d)} = \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k} \cdot \overline{n+d}^k = \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k} \cdot \overline{n}^k = \overline{R(n)}.$$

   Ainsi, $\overline{R(n+d) - R(n)} = \overline{0}$, donc $R(n+d) - R(n)$ est divisible par d.

3. Soit $n \in \mathbf{N}$: alors $u_n | P(n)$.
   Or $u_n | d$ (d'après 1.) et $d | P(n+d) - P(n)$ (d'après 2.) donc $u_n | (P(n+d) - P(n))$.
   On en déduit alors que $u_n | P(n+d)$.
   Pour les mêmes raisons, $u_n | Q(n+d)$, donc $u_n | u_{n+d}$.
   On montre de même que $u_{n+d} | u_n$, d'où on déduit que $u_{n+d} = u_n$.

Exercice 5

1. Soit $f : t \mapsto p\mathrm{e}^t + (1-p)\mathrm{e}^{-t}$: alors f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall t \in \mathbf{R},\ f'(t) = p\mathrm{e}^t - (1-p)\mathrm{e}^{-t}$.
   En particulier, $f'(0) = 2p - 1 < 0$.
   Supposons que $\forall t > 0,\ f(t) \geqslant f(0)$: alors, $\forall t > 0,\ \dfrac{f(t) - f(0)}{t} \geqslant 0$.
   Donc, par passage à la limite quand $t \to 0^+$, $f'(0) \geqslant 0$.
   C'est absurde, donc il existe $t_0 > 0$ tel que $f(t_0) < f(0)$, c-à-d. tel que $f(t_0) < 1$.

2. Soient $n \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathbf{Z}$.

- $\forall t > 0,\ P(S_n \geqslant k) = P(\mathrm{e}^{tS_n} \geqslant \mathrm{e}^{tk}) \leqslant \dfrac{E(\mathrm{e}^{tS_n})}{\mathrm{e}^{tk}}$ (d'après l'inégalité de Markov) ;
- $\forall t > 0,\ E(\mathrm{e}^{tS_n}) = E(\mathrm{e}^{tX_1+\cdots+tX_n}) = E(\mathrm{e}^{tX_1})\cdots E(\mathrm{e}^{tX_n})$ (par indépendance) ;
- $\forall t > 0,\ E(\mathrm{e}^{tX_1}) = \cdots = E(\mathrm{e}^{tX_1}) = p\mathrm{e}^t + (1-p)\mathrm{e}^{-t}$ (d'après le théorème de transfert).

On en déduit que $\forall t > 0,\ P(S_n \geqslant k) \leqslant \mathrm{e}^{-tk}(p\mathrm{e}^t + (1-p)\mathrm{e}^{-t})^n$.
En posant $\alpha = \mathrm{e}^{-t_0}$ et $\beta = p\mathrm{e}^{t_0} + (1-p)\mathrm{e}^{-t_0}$, alors α et β sont dans $]0,1[$ et

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall k \in \mathbf{Z},\ P(S_n \geqslant k) \leqslant \alpha^k \beta^n.$$

3. Tout d'abord,

$$[S_n \underset{n\to\infty}{\to} -\infty] = \bigcap_{k\geqslant 0}\left(\bigcup_{r\geqslant 0}\left(\bigcap_{n\geqslant r}[S_n < -k]\right)\right).$$

C'est une intersection décroissante d'événements, donc, d'après le théorème de la limite monotone,

$$P(S_n \underset{n\to\infty}{\to} -\infty) = \lim_{k\to\infty} P\left(\bigcup_{r\geqslant 0}\left(\bigcap_{n\geqslant r}[S_n < -k]\right)\right) = 1 - \lim_{k\to\infty} P\left(\bigcap_{r\geqslant 0}\left(\bigcup_{n\geqslant r}[S_n \geqslant -k]\right)\right).$$

Remarquons ensuite que pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} P(S_n \geqslant -k)$ converge (d'après 2.).
Donc, d'après le lemme de Borel-Cantelli,

$$\forall k \in \mathbf{Z},\ P\left(\bigcap_{r\geqslant 0}\left(\bigcup_{n\geqslant r}[S_n \geqslant -k]\right)\right) = 0.$$

On en déduit alors que $P(S_n \underset{n\to\infty}{\to} -\infty) = 1$, c-à-d. que $S_n \underset{n\to\infty}{\to} -\infty$ presque sûrement.

Problème de mathématiques générales

I. Étude du cas entier

1. *Préliminaire*
Soit $i \in [\![1,d]\!]$: alors $0 \leqslant a_{i+1} \leqslant \|a\|_\infty$ et $-\|a\|_\infty \leqslant -a_i \leqslant 0$ (car $0 \leqslant a_i \leqslant \|a\|_\infty$).
En sommant ces inégalités, on obtient : $-\|a\|_\infty \leqslant a_{i+1} - a_i \leqslant \|a\|_\infty$, d'où

$$|a_{i+1} - a_i| \leqslant \|a\|_\infty.$$

Ceci étant vrai pour tout $i \in [\![1,d]\!]$, on en déduit alors que $\|D(a)\|_\infty \leqslant \|a\|_\infty$.

2. Tout d'abord, $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (car A et B commutent).
Or A et B sont dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, donc $2AB = 0_{\mathscr{M}_d(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})}$, puis

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 \quad (\star).$$

Considérons alors la propriété $\mathscr{P}(n)$: « $(A+B)^{2^n} = A^{2^n} + B^{2^n}$ ».
- $\mathscr{P}(0)$.
- Soit $n \geqslant 0$, supposons $\mathscr{P}(n)$.
Alors $(A+B)^{2^{n+1}} = ((A+B)^{2^n})^2 = (A^{2^n} + B^{2^n})^2$.
Or A^{2^n} et B^{2^n} commutent (car A et B commutent), donc, en appliquant $(\star)$ à A^{2^n} et B^{2^n}, on obtient : $(A^{2^n} + B^{2^n})^2 = (A^{2^n})^2 + (B^{2^n})^2 = A^{2^{n+1}} + B^{2^{n+1}}$.
Ainsi, $(A+B)^{2^{n+1}} = A^{2^{n+1}} + B^{2^{n+1}}$, donc $\mathscr{P}(n+1)$.

Donc, par récurrence,
$$\forall n \in \mathbf{N},\ (A+B)^{2^n} = A^{2^n} + B^{2^n}.$$

3. Soit $x \in \mathbf{Z}$.
   - Si $x \geqslant 0$, $|x| = x$, donc $\overline{|x|} = \overline{x}$.
   - Si $x \leqslant 0$, $|x| = -x$, donc $\overline{|x|} = \overline{-x} = \overline{x}$.

   Ainsi, $\forall x \in \mathbf{Z},\ \overline{|x|} = \overline{x}$, donc
   $$\overline{D(a)} = (\overline{|a_{i+1} - a_i|})_{1 \leqslant i \leqslant d} = (\overline{a_{i+1} - a_i})_{1 \leqslant i \leqslant d} = (\overline{a_{i+1}} + \overline{a_i})_{1 \leqslant i \leqslant d} = \Delta(\overline{a}).$$

4. (a) Tout d'abord, remarquons que $(\overline{I}_d + \overline{J}_d)^d = \overline{I}_d^d + \overline{J}_d^d$ (d'après I.2.).
   Or $\overline{I}_d^d = \overline{I}_d$ et $\overline{J}_d^d = \overline{I}_d$, donc $\overline{I}_d^d + \overline{J}_d^d = 2\overline{I}_d = 0_{\mathscr{M}_d(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})}$.
   Ainsi, $\forall b \in \mathbf{Z},\ \overline{D^d(b)} = \Delta^d(\overline{b}) = 0_{(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d}$ (d'après I.3.).

   (b) Soit $\mathscr{P}(p)$: « $\exists n \in \mathbf{N},\ \exists a' \in \mathbf{Z}^d,\ D^n(a) = 2^p a'$ ».
   - $\mathscr{P}(0)$.
   - Soit $p \geqslant 0$, supposons $\mathscr{P}(p)$.
     Considérons alors $n \in \mathbf{N}$ et $a' \in \mathbf{Z}^d$ tels que $D^n(a) = 2^p a'$.
     Pour tout $m \in \mathbf{N}$, $D^{m+n}(a) = D^m(D^n(a)) = D^m(2^p a') = 2^p D^m(a')$.
     En appliquant I.4.(b) à a', on obtient l'existence de $m \in \mathbf{N}$ et de $a'' \in \mathbf{Z}^d$ tels que $D^m(a') = 2a''$, d'où $D^{m+n}(a) = 2^p \cdot 2a'' = 2^{p+1}a''$, donc $\mathscr{P}(p+1)$.

   Ainsi, par récurrence,
   $$\forall p \in \mathbf{N},\ \exists n \in \mathbf{N},\ \exists a' \in \mathbf{Z}^d,\ D^n(a) = 2^p a'.$$

   (c) Supposons que $\forall n \in \mathbf{N},\ D^n(a) \neq 0_{\mathbf{R}^d}$: alors $\forall n \in \mathbf{N},\ \|D^n(a)\|_\infty > 0$.
   Or d'après I.4.(b), $\forall p \in \mathbf{N}, \exists n \in \mathbf{N},\ 2^p |\ \|D^n(a)\|_\infty$, donc $\forall p \in \mathbf{N}, \exists n \in \mathbf{N},\ 2^p \leqslant \|D^n(a)\|_\infty$.
   Enfin, d'après I.1., $\forall n \in \mathbf{N},\ \|D^n(a)\|_\infty \leqslant \|a\|_\infty$, donc $\forall p \in \mathbf{N},\ 2^p \leqslant \|a\|_\infty$.
   C'est absurde, donc $\exists n \in \mathbf{N},\ D^n(a) = 0_{\mathbf{R}^d}$.

5. Notons $\Pi_d \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}[X]$ le polynôme minimal de $\overline{J}_d$.
   Alors $\overline{J}_d^d + \overline{I}_d = 0_{\mathscr{M}_d(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})}$ (car $\overline{J}_d^d = \overline{I}_d$), c-à-d. que $X^d + \overline{1}$ annule J_d, donc $\Pi_d | X^d + \overline{1}$.

   Supposons que $\deg \Pi_d < d$ et écrivons Π_d sous la forme $\Pi_d = \displaystyle\sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$.

   La première ligne de $\Pi_d(\overline{J}_d)$ est alors $[a_0, \ldots, a_{d-1}]$.
   Or $\Pi_d(\overline{J}_d) = 0_{\mathscr{M}_d(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})}$, donc $a_0, \ldots, a_{d-1}$ sont nuls, c-à-d. que $\Pi_d = 0$, ce qui est absurde.
   Ainsi, $\deg \Pi_d \geqslant d$, puis $\Pi_d = X^d + \overline{1}$.

6. (a) Supposons Δ nilpotente : alors $\overline{I}_d + \overline{J}_d$ est nilpotente.
   Or $\overline{I}_d + \overline{J}_d \in \mathscr{M}_d(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$, donc $(\overline{I}_d + \overline{J}_d)^d = 0_{\mathscr{M}_d(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})}$.
   Et comme $d = 2^k m$, on en déduit que $((\overline{I}_d + \overline{J}_d)^{2^k})^m = 0_{\mathscr{M}_d(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})}$.
   Donc, d'après I.2., $\left(\overline{I}_d + \overline{J}_d^{2^k}\right)^m = 0_{\mathscr{M}_d(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})}$, c-à-d. que $(X^{2^k} + \overline{1})^m$ annule $\overline{J}_d$.
   Enfin, $(X^{2^k} + \overline{1})^m$ est de degré $2^k m = d$ et est unitaire, donc, d'après I.5.,
   $$(X^{2^k} + \overline{1})^m = X^d + \overline{1}.$$

   En utilisant la formule du binôme de Newton et en égalant les coefficients de X^{2^k}, on obtient :
   $$\overline{\binom{m}{1}} = \overline{0}.$$

   Or $\overline{\binom{m}{1}} = \overline{m} = \overline{1}$ (car m est impair), donc $\overline{1} = \overline{0}$.
   C'est absurde, donc Δ n'est pas nilpotente.

(b) Supposons que $\forall \alpha \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d,\ \exists n \in \mathbf{N},\ \Delta^n(\alpha) = 0_{(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d}$.

En notant $(e_1, \ldots, e_d)$ la base canonique de $\mathbf{R}^d$ (ainsi, $(\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_d)$ est celle de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d$), alors, pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, il existe $n_i \in \mathbf{N}$ tel que $\Delta^{n_i}(\overline{e}_k) = 0_{(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d}$.

En posant $n = \max(n_1, \ldots, n_d)$, on a donc : $\forall i \in [\![1, d]\!]\,,\ \Delta^n(\overline{e}_i) = 0_{(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d}$.

D'où (par linéarité) : $\forall \alpha \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d,\ \Delta^n(\alpha) = 0_{(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d}$.

Ainsi, Δ^n est nulle, ce qui est absurde d'après I.6.(a), d'où l'existence d'un $\alpha \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \Delta^n(\alpha) \neq 0_{(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d}.$$

Soit $a \in \mathbf{Z}^d$ tel que $\overline{a} = \alpha$: alors $\forall n \in \mathbf{N},\ \overline{D^n(a)} = \Delta^n(\alpha) \neq 0_{(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d}$ (d'après I.3.).

Donc $\forall n \in \mathbf{N},\ D^n(a) \neq 0_{\mathbf{R}^d}$.

II. Étude des longueurs

7. Soient x et y dans $\mathbf{R}^d$: alors

$$\|D(y) - D(x)\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant d} \{||y_{i+1} - y_i| - |x_{i+1} - x_i||\}.$$

Or $\forall i \in [\![1, d]\!]\,,$
$$\begin{aligned} ||y_{i+1} - y_i| - |x_{i+1} - x_i|| &\leqslant |(y_{i+1} - y_i) - (x_{i+1} - x_i)| \\ &= |(y_{i+1} - x_{i+1}) - (y_i - x_i)| \\ &\leqslant |y_{i+1} - x_{i+1}| + |y_i - x_i| \leqslant 2\,\|y - x\|_\infty, \end{aligned}$$

donc
$$\|D(y) - D(x)\|_\infty \leqslant 2\,\|y - x\|_\infty\,.$$

Ainsi, D est 2-lipschitzienne.

En outre, avec $x = (0, \ldots, 0)$ et $y = (1, -1, 0, \ldots, 0)$, alors $\|D(y) - D(x)\|_\infty = 2$ et $\|y - x\|_\infty = 1$, donc 2 est la plus petite constante possible.

8. *Exemple d'une longueur infinie*

(a) Tout d'abord,

$$XI_d - C = \begin{bmatrix} X+1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X+1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & X+1 & -1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & X-1 \end{bmatrix} \in \mathscr{M}_d(\mathbf{R})$$

En développant suivant la première colonne, on obtient :

$$\det(XI_d - C) = (X+1)^{d-1}(X-1) + (-1)^{d+1}(-1)^{d-1},$$

donc $Q = (X+1)^{d-1}(X-1) + 1$.

(b)
- $Q(0) = 0$;
- $Q(1) = 1 > 0$;
- $Q'(X) = (d-1)(X+1)^{d-2}(X-1) + (X+1)^{d-1}$, donc $Q'(0) = 2 - d < 0$.

Supposons que $\forall x \in \,]0, 1[,\ Q(x) \geqslant 0$: alors $\forall x \in \,]0, 1[,\ \dfrac{Q(x) - Q(0)}{x} = \dfrac{Q(x)}{x} \geqslant 0$.

On en déduit, par passage à la limite quand $x \to 0^+$, que $Q'(0) \geqslant 0$, ce qui est absurde.

Il existe donc $x \in \,]0, 1[$ tel que $Q(x) < 0$.

Enfin, $Q(1) > 0$ et Q définit une application continue, d'où, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'existence d'un $\lambda \in \,]0, 1[$ tel que $Q(\lambda) = 0$.

(c) Soit $u \in \mathbf{R}^d \setminus \{0_{\mathbf{R}^d}\}$ un vecteur propre de C associé à la valeur propre λ.
De $Cu = \lambda u$, on obtient :

$$\forall i \in [\![1, d-1]\!]\,,\ u_{i+1} - u_i = \lambda u_i \quad \text{et} \quad u_d - u_1 = \lambda u_d.$$

Or $\lambda \in]0,1[$, donc $u_1, \dots, u_d$ sont de même signe.
Ainsi, quitte à changer u en $-u$, il existe un vecteur propre à coordonnées positives.

(d) En réutilisant les égalités obtenues dans la question précédente, on obtient :

$$\forall i \in [\![1, d-1]\!]\,,\ u_{i+1} - u_i = \lambda u_i \geqslant 0 \quad \text{et} \quad u_d - u_1 = \lambda u_d \geqslant 0.$$

On en déduit alors que $D(u) = \lambda u$, puis que $\forall n \in \mathbf{N},\ D^n(u) = \lambda^n u$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N},\ D^n(u) \neq 0_{\mathbf{R}^d}$, donc u est de longueur infinie.

9. *Application* Tout d'abord, remarquons, pour tous $\alpha \geqslant 0$ et $a \in \mathbf{R}^d$, que $D(\alpha a) = \alpha D(a)$.
Plus généralement, on montre (par récurrence sur n) que $\forall n \in \mathbf{N},\ D^n(\alpha a) = \alpha D^n(a)$.
Supposons maintenant qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\forall a \in \mathbf{Z}^d,\ \Lambda(a) \leqslant N$..
On peut écrire, de façon équivalente :

$$\forall a \in \mathbf{Z}^d,\ D^N(a) = 0_{\mathbf{R}^d}.$$

On en déduit alors, en réduisant au même dénominateur et en appliquant la remarque précédente, que

$$\forall a \in \mathbf{Q}^d,\ D^N(a) = 0_{\mathbf{R}^d}.$$

Enfin, D^N est continue (car D est continue d'après II.7.), donc, par densité de $\mathbf{Q}^d$ dans $\mathbf{R}^d$,

$$\forall a \in \mathbf{R}^d,\ D^N(a) = 0_{\mathbf{R}^d},$$

ce qui est absurde d'après II.8.(d).

III. Étude du cas réel

10. *Lemme fondamental*
Soit $\mathscr{P}(p)$: « pour tout $b \in [0,c]^d$, s'il existe $i \in \mathbf{Z}$ tel que $D(b)_i, \dots, D(b)_{i+p}$ sont dans $\{0,c\}$ et non tous nuls, alors $b_i, \dots, b_{i+p+1}$ sont dans $\{0,c\}$ et non tous nuls. »

- Soit $b \in [0,c]^d$ et supposons qu'il existe $i \in \mathbf{Z}$ tel que $D(b)_i = c$.
  Alors $|b_{i+1} - b_i| = c$, donc (b_i, b_{i+1}) égale $(0,c)$ ou $(c,0)$, donc $\mathscr{P}(0)$.
- Soit $p \geqslant 0$, supposons $\mathscr{P}(p)$.
  Soit $b \in [0,c]^d$ et supposons qu'il existe $i \in \mathbf{Z}$ tel que $D(b)_i, \dots, D(b)_{i+p+1}$ sont dans $\{0,c\}$ et non tous nuls.
  Cas où $D(b)_i, \dots, D(b)_{i+p}$ sont non tous nuls
  D'après $\mathscr{P}(p)$, $b_i, \dots, b_{i+p+1}$ sont dans $\{0,c\}$ et non tous nuls.
  Si $D(b)_{i+p+1} = c$, alors, d'après $\mathscr{P}(0)$, b_{i+p+1} et b_{i+p+2} sont dans $\{0,c\}$.
  Si $D(b)_{i+p+1} = 0$, alors $b_{i+p+2} = b_{i+p+1} \in \{0,c\}$.
  Dans les deux cas, on peut conclure que $b_i, \dots, b_{i+p+2}$ sont dans $\{0,c\}$ et non tous nuls.
  Cas où $D(b)_i, \dots, D(b)_{i+p}$ sont tous nuls
  Alors $D(b)_{i+p+1} = c$, donc, d'après $\mathscr{P}(0)$, b_{i+p+1} et b_{i+p+2} sont dans $\{0,c\}$.
  Or $b_i = b_{i+1} = \cdots = b_{i+p+1}$, donc $b_i, \dots, b_{i+p+2}$ sont dans $\{0,c\}$ et non tous nuls.
  Donc $\mathscr{P}(p+1)$.

Donc, par récurrence, $\forall p \geqslant 0,\ \mathscr{P}(p)$.
Enfin, en appliquant cette propriété $d-1$ fois successivement en partant de $D^{d-1}(a)$, on obtient que $a \in \{0,c\}^d$.

11. (a) D'après I.1., $\forall n \in \mathbf{N},\ \left\|D^{n+1}(a)\right\|_\infty = \|D(D^n(a))\|_\infty \leqslant \|D^n(a)\|_\infty$.
Ainsi, la suite $(\|D^n(a)\|_\infty)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
Or elle est minorée (par 0), donc, d'après le théorème de la limite monotone, elle converge.

(b) i. Soit $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante telle que $D^{\sigma(n)}(a) \underset{n\to\infty}{\to} v$.
Notons ℓ la limite de $\|D^n(a)\|_\infty$ quand $n \to \infty$.
Alors $\|D^{\sigma(n)}(a)\|_\infty \underset{n\to\infty}{\to} \ell$ (car $(D^{\sigma(n)}(a))_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite extraite de $(D^n(a))_{n\in\mathbf{N}}$).
En outre, $\|D^{\sigma(n)}(a)\|_\infty \underset{n\to\infty}{\to} \|v\|_\infty$ (car $D^{\sigma(n)}(a) \underset{n\to\infty}{\to} v$).
Donc $\ell = \|v\|_\infty$, c-à-d. que $\|D^n(a)\|_\infty \underset{n\to\infty}{\to} \|v\|_\infty$.

ii. Soit $n \in \mathbf{N}$: alors $(\|D^{n+\sigma(p)}(a)\|_\infty)_{p\in\mathbf{N}}$ est une suite extraite de $(\|D^p(a)\|_\infty)_{p\in\mathbf{N}}$.
Or $\|D^p(a)\|_\infty \underset{p\to\infty}{\to} \|v\|_\infty$ (d'après III.11.(b)i.), donc $\|D^{n+\sigma(p)}(a)\|_\infty \underset{p\to\infty}{\to} \|v\|_\infty$.
Enfin, $\|D^{n+\sigma(p)}(a)\|_\infty = \|D^n(D^{\sigma(p)}(a))\|_\infty \underset{p\to\infty}{\to} \|D^n(v)\|_\infty$, donc $\|D^n(v)\|_\infty = \|v\|_\infty$.

iii. Supposons $v \neq 0_{\mathbf{R}^d}$ et notons $w = \frac{1}{\|v\|_\infty} v$.
Alors $\forall n \in \mathbf{N},\ \|D^n(w)\|_\infty = 1$ (d'après III.11.(b)ii. et la remarque faite en II.9.).
Donc $w \in \{0,1\}^d$ (d'après III.10.).
On en déduit l'existence d'un $n \in \mathbf{N}$ tel que $D^n(w) = 0_{\mathbf{R}^d}$ (d'après I.4.(c)).
C'est absurde (car $\|D^n(w)\|_\infty = 1$), donc $v = 0_{\mathbf{R}^d}$.

(c) Tout d'abord, remarquons que $\forall n \in \mathbf{N},\ \|D^n(a)\|_\infty \leqslant \|a\|_\infty$ (d'après I.1.).
Ensuite, $(D^n(a))_{n\in\mathbf{N}}$ a $0_{\mathbf{R}^d}$ pour seule valeur d'adhérence possible (d'après III.11.(b)).
Ainsi, $(D^n(a))_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de $\mathbf{R}^d$ ayant $0_{\mathbf{R}^d}$ pour seule valeur d'adhérence possible, donc elle converge vers $0_{\mathbf{R}^d}$, c-à-d. que $\|D^n(a)\|_\infty \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

IV. Étude des périodes

12. (a) La suite $(D^n(a))_{n\in\mathbf{N}}$ étant bornée (d'après I.1.) et à valeurs dans $\mathbf{Z}^d$, elle ne prend donc qu'un nombre fini de valeurs.
Il existe ainsi des entiers $r \geqslant 0$ et $n \geqslant 1$ tels que $D^{r+n}(a) = D^r(a)$, c-à-d. que $(D^n(a))_{n\in\mathbf{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.

(b) D'après IV.12.(a), il existe des entiers $n \geqslant 0$ et $p \geqslant 1$ tels que $D^{n+p}(a) = D^n(a)$.
Soient $m \geqslant 0$ et $q \geqslant p$ tels que $qp \geqslant m$.
Alors $\|D^n(a)\|_\infty = \|D^{n+qp}(a)\|_\infty \leqslant \|D^{n+m}(a)\|_\infty \leqslant \|D^n(a)\|_\infty$ (d'après I.1.).
Ainsi, la suite $(\|D^{n+m}(a)\|_\infty)_{m\geqslant 0}$ (c-à-d. la suite $(\|D^m(D^n(a))\|_\infty)_{m\geqslant 0}$) est constante.
On déduit alors de III.10. l'existence de $c \in \mathbf{N}^*$ et $v \in \{0,1\}^d$ tels que $D^n(a) = cv$.

(c) Tout d'abord, remarquons que pour tous v et w dans $\{0,1\}^d$, $v = w \ \Leftrightarrow\ \overline{v} = \overline{w}$.
Remarquons également que $\forall m \in \mathbf{N},\ D^m(u) \in \{0,1\}^d$ (d'après I.1.).
Ainsi, $\exists r \in \mathbf{N},\ D^{r+n}(u) = D^r(u) \ \Leftrightarrow\ \exists r \in \mathbf{N},\ \overline{D^{r+n}(u)} = \overline{D^r(u)}$.
Donc, d'après I.3., $\exists r \in \mathbf{N},\ D^{r+n}(u) = D^r(u) \ \Leftrightarrow\ \exists r \in \mathbf{N},\ \Delta^{r+n}(\overline{u}) = \Delta^r(\overline{u})$.

(d) Soit $r \in \mathbf{N}$ tel que $D^{r+T_d}(e_1^d) = D^r(e_1^d)$.
On a montré en IV.12.(c) que $\Delta^{r+T_d}(\overline{e}_1^d) = \Delta^r(\overline{e}_1^d)$.
Remarquons maintenant que $\forall i \in [\![1, d-1]\!],\ \overline{J}_d^i(\overline{e}_1^d) = \overline{e}_{d+1-i}^d$.
Comme $\overline{J}_d$ et Δ commutent, on en déduit, en appliquant $\overline{J}_d^i$ l'égalité précédente, que $\forall i \in [\![1, d-1]\!],\ \Delta^{r+T_d}(\overline{e}_{d+1-i}^d) = \Delta^r(\overline{e}_{d+1-i}^d)$.
Ainsi, $\forall i \in [\![1, d]\!],\ \Delta^{r+T_d}(\overline{e}_i^d) = \Delta^r(\overline{e}_i^d)$.
D'où, par linéarité, $\forall v \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d,\ \Delta^{r+T_d}(v) = \Delta^r(v)$.

Donc, d'après IV.12.(c), T_d est une période de tout $u \in \{0,1\}^d$.

Enfin, d'après IV.12.(b), T_d est une période de a.

En particulier, $\tau(a) \leqslant T_d$.

Supposons que $\tau(a)$ ne divise pas T_d et considérons q le quotient et ρ le reste de la division euclidienne de T_d par $\tau(a)$.

Alors $T_d = q\tau(a) + \rho$ et $1 \leqslant \rho < \tau(a)$.

Soit $r \in \mathbf{N}$ tel que $D^{r+\tau(a)}(a) = D^r(a)$ et $D^{r+T_d}(a) = D^r(a)$.

On déduit de la première égalité que $D^{r+q\tau(a)}(a) = D^r(a)$ et de la deuxième que $D^{r+q\tau(a)+\rho}(a) = D^r(a)$.

Ainsi, $D^{r+q\tau(a)+\rho}(a) = D^{r+q\tau(a)}(a)$, donc ρ est une période de a (car $\rho \geqslant 1$).

C'est absurde (car $\tau(a)$ est la plus petite période de a et $\rho < \tau(a)$), donc $\tau(a)$ divise T_d.

13. (a) Soient $\lambda_{q-1}, \ldots, \lambda_1, \lambda_0$ dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, supposons $\lambda_{q-1}\overline{X}^{q-1} + \cdots + \lambda_1\overline{X} + \lambda_0 = \overline{0}$.

Alors $\lambda_{q-1}X^{q-1} + \cdots + \lambda_1 X + \lambda_0$ est divisible par $X^q + \overline{1}$, donc nul (car de degré au plus $q-1$), d'où : $\lambda_{q-1} = \cdots = \lambda_1 = \lambda_0 = \overline{0}$.

Ainsi, $(\overline{X}^{q-1}, \ldots, \overline{X}, \overline{1})$ est libre.

Soient P dans $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})[X]$, Q le quotient et $R = a_{q-1}X^{q-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ le reste de la division euclidienne de P par $X^q + \overline{1}$.

Alors $\overline{P} = \overline{R} = a_{q-1}\overline{X}^{q-1} + \cdots + a_1\overline{X} + a_0 \in \mathrm{Vect}(\overline{X}^{q-1}, \ldots, \overline{X}, \overline{1})$.

Ainsi, $(\overline{X}^{q-1}, \ldots, \overline{X}, \overline{1})$ est génératrice de E_q.

On en conclut que $\mathscr{B}_q = (\overline{X}^{q-1}, \ldots, \overline{X}, \overline{1})$ est une base de E_q.

(b)
- $\Phi_q(\overline{X}^{q-1}) = (\overline{X} + \overline{1})\overline{X}^{q-1} = \overline{X}^q + \overline{X}^{q-1} = \overline{X}^{q-1} + \overline{1}$;
- $\forall i \in [\![0, q-2]\!]$, $\Phi_q(\overline{X}^i) = (\overline{X} + \overline{1})\overline{X}^i = \overline{X}^{i+1} + \overline{X}^i$.

Ainsi, la matrice de Φ_q dans la base $\mathscr{B}_q$ est $\overline{I}_q + \overline{J}_q$.

(c)
$$\begin{aligned}
& n \geqslant 1 \text{ est une période de } e_1^q \\
\Leftrightarrow\ & \exists r \in \mathbf{N},\ \Delta^{r+n}(\overline{e}_1^q) = \Delta^r(\overline{e}_1^q) \quad \text{(d'après IV.12.(c))} \\
\Leftrightarrow\ & \exists r \in \mathbf{N},\ \Phi_q^{r+n}(\overline{X}^{q-1}) = \Phi_q^r(\overline{X}^{q-1}) \quad \text{(d'après IV.13.(b))} \\
\Leftrightarrow\ & \exists r \in \mathbf{N},\ (\overline{X} + \overline{1})^{r+n}\overline{X}^{q-1} = (\overline{X} + \overline{1})^r\overline{X}^{q-1} \\
\Leftrightarrow\ & \exists r \in \mathbf{N},\ ((\overline{X} + \overline{1})^{r+n} - (\overline{X} + \overline{1})^r)\overline{X}^{q-1} = \overline{0}
\end{aligned}$$

Or $\overline{X}^{q-1}$ est inversible dans E_q (car $\overline{X}^{q-1}\overline{X} = \overline{X}^q = \overline{1}$), donc
$$\begin{aligned}
& n \geqslant 1 \text{ est une période de } e_1^q \\
\Leftrightarrow\ & \exists r \in \mathbf{N},\ (\overline{X} + \overline{1})^{r+n} - (\overline{X} + \overline{1})^r = \overline{0} \\
\Leftrightarrow\ & \exists r \in \mathbf{N},\ (X^q + \overline{1}) \mid ((X + \overline{1})^{r+n} - (X + \overline{1})^r).
\end{aligned}$$

14. *Application*

(a) D'après IV.13.(c), il existe $r \in \mathbf{N}$ et $Q \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}[X]$ tel que
$$(X + \overline{1})^{r+n} - (X + \overline{1})^r = (X^d + \overline{1})Q.$$

En élevant au carré, on obtient :
$$(X + \overline{1})^{2r+2n} - (X + \overline{1})^{2r} = (X^{2d} + \overline{1})Q^2.$$

En utilisant à nouveau IV.13.(c), on en déduit que $2n$ est une période de e_1^{2d}.

(b) i. D'après IV.13.(c), il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que $(X^{2d} + \overline{1}) \mid ((X + \overline{1})^{r+p} - (X + \overline{1})^r)$.

Quitte à multiplier par $X + \overline{1}$, on peut supposer que r est pair.

Considérons donc $Q \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}[X]$ tel que $(X + \overline{1})^{r+p} - (X + \overline{1})^r = (X^{2d} + \overline{1})Q$.

Alors $X^{2d} + \overline{1} = (X^{2^{k+1}m} + \overline{1}) = (X^m + \overline{1})^{2^{k+1}}$, donc
$$(X^m + \overline{1})^{2^{k+1}}Q = (X + \overline{1})^{r+p} - (X + \overline{1})^r.$$

ii. Supposons p impair.
En dérivant la relation obtenue en IV.14.(a), on a :

$$2^{k+1}mX^{m-1}(X^m+\overline{1})^{2^{k+1}-1}Q+(X^m+\overline{1})^{2^{k+1}}Q' = (r+p)(X+\overline{1})^{r+p-1}-r(X+\overline{1})^{r-1}.$$

En utilisant le fait que r est pair et que p est impair, on en déduit que

$$(X^m+\overline{1})^{2^{k+1}}Q' = (X+\overline{1})^{r+p-1}.$$

Ainsi, $X^m+\overline{1} \mid (X+\overline{1})^{r+p-1}$, puis $X^m+\overline{1} = (X+\overline{1})^m$.
Enfin, en égalant les coefficients de X, on obtient que $\overline{m} = \overline{0}$, ce qui est absurde (car m est impair), donc p est pair.

iii. En reprenant IV.14.(b)i. (et en écrivant $r = 2s$ avec $s \in \mathbf{N}$), on a :

$$(X^{2d}+\overline{1}) \mid ((X+\overline{1})^{2s+2n} - (X+\overline{1})^{2s}),$$

d'où :

$$(X^d+\overline{1})^2 \mid ((X+\overline{1})^{s+n} - (X+\overline{1})^{s})^2.$$

On en déduit (en utilisant la factorialité de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}[X]$) que

$$(X^d+\overline{1}) \mid ((X+\overline{1})^{s+n} - (X+\overline{1})^{s}).$$

Donc, d'après IV.13.(c), n est une période de e_1^d.

15. *Étude de T_m*

(a) Tout d'abord, remarquons que
$n \geqslant 1$ est une période de e_1^m
$\Leftrightarrow\ \exists r \in \mathbf{N},\ \Delta^{r+n}(\overline{e}_1^m) = \Delta^r(\overline{e}_1^m)$ (d'après IV.12.(c))
$\Leftrightarrow\ \exists r \in \mathbf{N},\ \forall v \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^m,\ \Delta^{r+n}(v) = \Delta^r(v)$ (en procédant comme en IV.12.(d))
$\Leftrightarrow\ \exists r \in \mathbf{N},\ \Delta^{r+n} = \Delta^r$
$\Leftrightarrow\ \exists r \in \mathbf{N},\ \overline{H}_m^{r+n} = \overline{H}_m^r$.
Or T_m est la plus petite période de e_1^m, donc T_m est bien le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que $\exists r \in \mathbf{N},\ \overline{H}_m^{r+n} = \overline{H}_m^r$.

(b) Il suffit de prendre pour K un corps de décomposition de $X^m+\overline{1}$ sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

(c) Soit $P = X^m+\overline{1}$: alors $P' = mX^{m-1} = X^{m-1}$ (car m est impair), donc P et P' n'ont pas de racine commune dans K (en effet, $\overline{0}$ est la seule racine de P', et $\overline{0}$ n'est pas racine de P).
Ainsi, P annule H_m, est scindé (d'après IV.15.(b)) dans K, à racines simples, donc $\overline{H}_m$ est diagonalisable dans K.

(d) *Une première expression*

Tout d'abord, $T_m = \min\{n \in \mathbf{N}^* \mid \exists r \in \mathbf{N},\ \overline{H}_m^{n+r} = \overline{H}_m\}$ (d'après IV.15.(a)).
En outre, $\forall n \in \mathbf{N},\ \forall x \in K,\ (\exists r \in \mathbf{N}, x^{n+r} = x^r) \Leftrightarrow x^{n+1} = x$.
En diagonalisant $\overline{H}_m$ (c'est possible d'après IV.15.(b)), on en déduit alors que

$$T_m = \min\{n \in \mathbf{N}^* \mid \overline{H}_m^{n+1} = \overline{H}_m\}.$$

(e) *Une deuxième expression*

i. Pour tout $i \in [\![1,m]\!]$, $f(\Delta(\overline{e}_i^m)) = f(\overline{e}_i^m + \overline{e}_{i+1}^m) = \overline{0}_{(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^m}$.
D'où, par linéarité : $\forall x \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^m,\ f(\Delta(x)) = \overline{0}_{(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^m}$.
Ainsi, $\mathrm{Im}\Delta \subset \mathrm{Ker}f$.
Par ailleurs, les $n-1$ dernières colonnes de $\overline{H}_m$ sont libres (car échelonnées), donc Δ est de rang au moins $m-1$.
Enfin, $\dim \mathrm{Ker}f = m-1$ (car f est une forme linéaire non nulle), donc $\mathrm{Im}\Delta = \mathrm{Ker}f$.

ii. Soit $u = (\overline{1}, \dots, \overline{1}) \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^m$: alors $\Delta(u) = 0_{(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^m}$, c-à-d. que $u \in \mathrm{Ker}\Delta$.
Or $\dim \mathrm{Ker}\Delta = m - \mathrm{rg}\Delta = 1$ (d'après le théorème du rang et IV.15.(e)i.), donc (u) est une base de $\mathrm{Ker}\Delta$.

iii. Tout d'abord, $\mathrm{Im}\Delta$ est stable par Δ et $\mathrm{Im}\Delta = \mathrm{Ker}f$ (d'après IV.15.(e)i.), donc $\mathrm{Ker}f$ est stable par Δ.
Ainsi, Δ induit bien un endomorphisme $\hat{\Delta}$ de $\mathrm{Ker}f$.
Soit $x \in \mathrm{Ker}\hat{\Delta}$: alors $\Delta(x) = 0_{(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^m}$ et $x \in \mathrm{Ker}f$.
Supposons $x \neq 0_{(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^m}$: d'après IV.15.(e)ii., $x = (\overline{1}, \dots, \overline{1})$.
Donc $\overline{0} = f(x) = f(\overline{1}, \dots, \overline{1}) = \overline{m} = \overline{1}$ (car m est impair).
C'est absurde, donc $x = 0_{(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^m}$.
Finalement, $\hat{\Delta}$ est un endomorphisme injectif de $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^m$ qui est de dimension finie, donc $\hat{\Delta}$ est un isomorphisme.

iv. Tout d'abord, remarquons que $\forall i \in [\![1, m-1]\!],\ \varepsilon_i^m = \Delta(\overline{e}_{i+1}^m)$.
On en déduit alors que $(\varepsilon_1^m, \dots, \varepsilon_{m-1}^m)$ est une base de $\mathrm{Ker}f$ (en reprenant les arguments donnés en IV.15.(e)i.).
Ensuite, remarquons que
- $\forall i \in [\![2, m]\!],\ \Delta(\overline{e}_i^m) = \overline{e}_{i-1}^m + \overline{e}_i^m = \varepsilon_{i-1}^m$;
- $\Delta(\overline{e}_1^m) = \overline{e}_1^m + \overline{e}_m^m$.

Ainsi,
- $\forall i \in [\![2, m-1]\!],\ \Delta(\varepsilon_i^m) = \Delta(\overline{e}_i^m + \overline{e}_{i+1}^m) = \Delta(\overline{e}_i^m) + \Delta(\overline{e}_{i+1}^m) = \varepsilon_{i-1}^m + \varepsilon_i^m$;
- $\Delta(\varepsilon_1^m) = \Delta(\overline{e}_1^m + \overline{e}_2^m) = \Delta(\overline{e}_1^m) + \Delta(\overline{e}_2^m) = \overline{e}_1^m + \overline{e}_m^m + \overline{e}_1^m + \overline{e}_2^m = \overline{e}_2^m + \overline{e}_m^m$
$= \overline{e}_2^m + \overline{e}_3^m + \overline{e}_3^m + \dots + \overline{e}_{m-1}^m + \overline{e}_{m-1}^m + \overline{e}_m^m = \varepsilon_2^m + \dots + \varepsilon_{m-1}^m$.

D'où
$$\Gamma_m = \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{0} & \dots & \dots & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{1} & \overline{1} & \overline{0} & \dots & \dots & \overline{0} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} & \dots & \dots & \overline{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \overline{1} & \overline{0} & \dots & \dots & \overline{0} & \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} & \dots & \dots & \overline{0} & \overline{0} & \overline{1} \end{bmatrix}.$$

v. $T_m = \min\{n \in \mathbf{N}^* \mid \overline{H}_m^{n+1} = \overline{H}_m\}$ (d'après IV.15.(d))
$= \min\{n \in \mathbf{N}^* \mid \Delta^{n+1} = \Delta\}$
$= \min\{n \in \mathbf{N}^* \mid \forall x \in (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^d,\ \Delta^n(\Delta(x)) = \Delta(x)\}$
$= \min\{n \in \mathbf{N}^* \mid \forall y \in \mathrm{Im}\Delta,\ \Delta^n(y) = y\}$
$= \min\{n \in \mathbf{N}^* \mid \hat{\Delta}^n = \mathrm{Id}_{\mathrm{Im}\Delta}\}$
$= \min\{n \in \mathbf{N}^* \mid \Gamma_m^n = I_{m-1}\}$
$= \mathrm{ord}(\Gamma_m)$.

Problème d'analyse

I. Quelques exemples et premières propriétés

1. Supposons que r soit une résolvante de f.
Soit $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$ (il en existe car f n'est pas identiquement nulle).

En appliquant $(\mathscr{R}_r)$ à $n \in \mathbf{N}^*$ et à $\dfrac{x_0}{n}$, on obtient :

$$r_n = \frac{1}{f(x_0)} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_0}{n} + \frac{k}{n}\right),$$

donc f a une unique résolvante.

Enfin, avec $n = 1$, on a : $r_1 = \dfrac{f(x_0)}{f(x_0)} = 1$.

2. Soient $k \in \mathbf{R}$ et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ constante égale à k.

   Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$: alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) = nk = nf(nx)$.

   Ainsi, en posant $(r_n)_{n\in\mathbf{N}^*} = (n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, alors

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall x \in \mathbf{R},\ \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) = r_n f(nx),$$

   donc f est dans E.

   Les fonctions constantes sont donc dans $\mathscr{E}$.

   Soient $c \in \mathbf{R}$, $f : x \mapsto x + c$, $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$: alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(x + \frac{k}{n} + c\right) = nx + nc + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k,$$

   puis, en utilisant le fait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) = nx + nc + \frac{n-1}{2} \quad (\star).$$

   Supposons que $f \in \mathscr{E}$ et soit r une résolvante de f.

   Alors (en utilisant $(\star)$) $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall x \in \mathbf{R},\ nx + nc + \dfrac{n-1}{2} = r_n(nx + c)$, c-à-d. :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall x \in \mathbf{R},\ n(1 - r_n)x + nc + \frac{n-1}{2} - r_n c = 0.$$

   En remarquant que le membre de gauche est affine (en x), on obtient :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ n(1 - r_n) = 0 \text{ et } nc + \frac{n-1}{2} - r_n c = 0,$$

   d'où :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ r_n = 1 \text{ et } c = -\frac{1}{2}.$$

   Réciproquement, si $c = -\dfrac{1}{2}$, alors $(\star)$ donne directement que f est dans $\mathscr{E}$ (de résolvante la suite constante égale à 1).

   Ainsi, $f \in \mathscr{E}$ si et seulement si $c = -\dfrac{1}{2}$.

3. Supposons que $\mathscr{E}$ soit un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

   Posons $f : x \mapsto x - \dfrac{1}{2}$, $g : x \mapsto \dfrac{1}{2}$ et $h = f + g$: alors d'après I.2., $h \in \mathscr{E}$.

   Soit r la résolvante de h.

Alors $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall x \in \mathbf{R},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} h\left(x+\frac{k}{n}\right) = r_n h(nx)$.

Donc $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall x \in \mathbf{R},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(x+\frac{k}{n}\right) = nr_n x$.

Avec $x=0$, on en déduit que $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n} = 0$.

C'est absurde (en prenant par exemple $n=2$), donc $\mathscr{E}$ n'est pas un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

4. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$: alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\left(x+\frac{k}{n}\right)} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\right)^k$.

   - Si $n=1$, alors $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}} = 1$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\right)^k = n$.
   - Si $n \geqslant 2$, alors $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}} \neq 1$, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\right)^k = \frac{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}}{1-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}} = 0$.

   Donc
$$\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\left(x+\frac{k}{n}\right)} = \begin{cases} n\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x} & \text{si } n=1\ ;\\ 0 & \text{si } n \geqslant 2.\end{cases}$$
   On obtient alors, en prenant les parties réelles :
$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(2\pi\left(x+\frac{k}{n}\right)\right) = \begin{cases} n\cos(2\pi x) & \text{si } n=1\ ;\\ 0 & \text{si } n \geqslant 2.\end{cases}$$
   Ainsi,
$$\sum_{k=0}^{n-1} C\left(x+\frac{k}{n}\right) = \begin{cases} C(x) & \text{si } n=1\ ;\\ 0 & \text{si } n \geqslant 2.\end{cases}$$
   En posant $r_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1\ ;\\ 0 & \text{si } n \geqslant 2,\end{cases}$ on a alors :
$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall x \in \mathbf{R},\ \sum_{k=0}^{n-1} C\left(x+\frac{k}{n}\right) = r_n C(nx)\,,$$
   donc $C \in \mathscr{E}$.

   On montre de même (en prenant les parties imaginaires) que $S \in \mathscr{E}$.

5. *Exemple de solution continue non dérivable*

   (a) Remarquons que
$$\forall j \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbf{R},\ \left|\frac{1}{2^j}\sin(2^{j+1}\pi x)\right| \leqslant \frac{1}{2^j}.$$
   Ainsi, φ est la somme d'une série de fonctions continues normalement convergente, donc φ est bien définie et continue.

   (b) Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$: alors
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\left(x+\frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j}\sin\left(2^{j+1}\pi\left(x+\frac{k}{n}\right)\right)\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2^j}\sin\left(2^{j+1}\pi\left(x+\frac{k}{n}\right)\right)\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^j}\sum_{k=0}^{n-1}\sin\left(2^{j+1}\pi\left(x+\frac{k}{n}\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Or pour tout $j \in \mathbf{N}$ (en procédant comme dans I.4.),

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(2^{j+1}\pi\left(x+\frac{k}{n}\right)\right) = \begin{cases} n\sin\left(2^{j+1}\pi x\right) & \text{si } 2^j \text{ est multiple de } n\ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Supposons que n ne soit pas une puissance de 2.
  Alors pour tout $j \in \mathbf{N}$, 2^j n'est pas multiple de n, donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(x+\frac{k}{n}\right) = 0$.
- Supposons que n soit une puissance de 2.
  Alors il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que $n = 2^r$.
  Donc pour tout $j \in \mathbf{N}$, 2^j est multiple de n si et seulement si $j \geqslant r$, donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(x+\frac{k}{n}\right) &= \sum_{j=r}^{\infty} \left(\frac{1}{2^j} 2^r \sin\left(2^{j+1}\pi x\right)\right) \\ &= \sum_{j'=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{j'}} \sin\left(2^{r+j'+1}\pi x\right)\right) \quad \text{(en posant } j' = j-r\text{)} \\ &= \varphi(nx)\,. \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(x+\frac{k}{n}\right) = \begin{cases} \varphi(nx) & \text{si } n \text{ est une puissance de 2}\ ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En posant $r_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est une puissance de 2}\ ; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$ on a alors :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall x \in \mathbf{R},\ \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(x+\frac{k}{n}\right) = r_n \varphi(nx)\,,$$

donc $\varphi \in \mathscr{E}$.

(c) Soit $k \in \mathbf{N}$: alors

$$2^k \varphi(2^{-k}) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j-k}} \sin(2^{j+1-k}\pi) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2^{j-k}} \sin(2^{j+1-k}\pi).$$

En changeant d'indice dans la dernière somme ($j \leftarrow k-1-j$), on obtient :

$$2^k \varphi(2^{-k}) = \sum_{j=0}^{k-1} 2^{j+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^j}\right).$$

Or $2^{j+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^j}\right) \underset{j\to\infty}{\sim} 2\pi$, donc $\displaystyle\sum_{j\geqslant 0} 2^{j+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^j}\right)$ diverge, puis $2^k\varphi(2^{-k}) \underset{k\to\infty}{\rightarrow} +\infty$.

Ainsi,

$$\frac{\varphi(2^{-k}) - \varphi(0)}{2^{-k}} = 2^k \varphi(2^{-k}) \underset{k\to\infty}{\rightarrow} +\infty.$$

Supposons φ dérivable : alors φ est dérivable en 0, donc

$$\frac{\varphi(2^{-k}) - \varphi(0)}{2^{-k}} \underset{k\to\infty}{\rightarrow} \varphi'(0).$$

C'est absurde, donc φ n'est pas dérivable.

6. Soit r la résolvante de f.

Alors $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall x \in \mathbf{R},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x+\frac{k}{n}\right) = r_n f(nx)$.

On dérive (par rapport à x) et on obtient : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall x \in \mathbf{R},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(x+\frac{k}{n}\right) = nr_n f'(nx)$.

Donc $f' \in \mathscr{E}$ et sa résolvante est $(nr_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

7. *Exemple de solution non continue*

(a) Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$.
Tout d'abord, posons $d = \lfloor nx \rfloor$: alors

$$d \leqslant nx < d+1.$$

Ensuite, notons q le quotient et r le reste de la division euclidienne de d par n : alors

$$d = qn + r \quad \text{et} \quad 0 \leqslant r < n.$$

On a alors, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dfrac{d+k}{n} \leqslant x + \dfrac{k}{n} < \dfrac{d+k+1}{n}$, d'où :

$$q + \frac{r+k}{n} \leqslant x + \frac{k}{n} < q + \frac{r+k+1}{n}.$$

Ainsi, $\left\lfloor x+\dfrac{k}{n} \right\rfloor = \begin{cases} q & \text{si } k \in [\![0, n-r-1]\!] \ ; \\ q+1 & \text{si } k \in [\![n-r, n-1]\!] \,, \end{cases}$ donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x+\frac{k}{n} \right\rfloor = q(n-r) + (q+1)r = qn + r = d = \lfloor nx \rfloor .$$

Ceci montre que $\psi \in \mathscr{E}$ (et que sa résolvante est $(1)_{n\in\mathbf{N}^*}$).

(b) Notons δ_x la masse de Dirac en un réel x : alors $\psi' = \displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} \delta_n$.
Notons, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, $\psi_a : x \mapsto \psi(x+a)$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\Psi_n : x \mapsto \psi(nx)$.
Alors $\psi'_a = \displaystyle\sum_{t\in\mathbf{Z}-a} \delta_t$ et $\Psi'_n = \displaystyle\sum_{t\in\frac{1}{n}\mathbf{Z}} \delta_t$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \psi'_{\frac{k}{n}} = \Psi'_n$, ce qui peut être vu comme le fait que ψ' vérifie $(\mathscr{R}_r)$ avec $r = (1)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

II. Étude des solutions $\mathscr{C}^\infty$ et 1-périodiques

8. *Préliminaires*

(a) Soit $n \in \mathbf{Z}$: alors (par intégration par parties)

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}nc_n(f).$$

Puis (par récurrence), pour tout $k \in \mathbf{N}$, $c_n(f^{(k)}) = (\mathrm{i}n)^k c_n(f)$.

(b) D'après le lemme de Riemann-Lebesgue, $c_n(f^{(k)}) \underset{n\to\infty}{\to} 0$ (car $f^{(k)}$ est continue).
On en déduit alors, d'après II.8.(a), que $n^k c_n(f) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

9. (a) Tout d'abord, $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, donc est somme de sa série de Fourier, c-à-d. que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \tilde{f}(x) = \sum_{N\in\mathbf{Z}} c_N \mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx}.$$

Or $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \tilde{f}(2\pi x)$, donc

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = \sum_{N\in\mathbf{Z}} c_N \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi Nx}.$$

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$: alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x+\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{N\in\mathbf{Z}} c_N \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi N\left(x+\frac{k}{n}\right)} = \sum_{N\in\mathbf{Z}} c_N \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi Nx}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi N}{n}}\right)^k.$$

Or pour tout $N \in \mathbf{Z}$ (en procédant comme dans I.4.),

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi N}{n}}\right)^k = \begin{cases} n & \text{si } N \text{ est multiple de } n\ ; \\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

d'où (avec $N \leftarrow pn$) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x+\frac{k}{n}\right) = \sum_{p\in\mathbf{Z}} nc_{pn}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi pnx}.$$

Par ailleurs, $f(nx) = \sum_{p\in\mathbf{Z}} c_p\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi pnx}$, donc

$$\sum_{p\in\mathbf{Z}} nc_{pn}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi pnx} = \sum_{p\in\mathbf{Z}} r_n c_p \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi pnx}.$$

Enfin, ces deux séries sont normalement convergentes (car d'après II.8.(b), $p^2 c_p \underset{p\to\infty}{\to} 0$, d'où (en calculant leurs coefficients de Fourier), pour tout $p \in \mathbf{Z}$, $nc_{pn} = r_n c_p$.

(b) Supposons $c_1 = 0$.
Alors d'après II.9.(a) (appliqué avec $p = 1$), $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ c_n = 0$.
En outre, $c_{-1} = \overline{c_1} = 0$, donc, d'après II.9.(a) (appliqué avec $p = -1$), $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ c_{-n} = 0$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbf{Z}^*,\ c_n = 0$, donc $f = c_0$ (après décomposition en série de Fourier).
C'est absurde (car f est supposée non constante), donc $c_1 \neq 0$.

(c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N},\ c_{q^n} = c_1\left(\frac{c_q}{c_1}\right)^n,$$

et en déduire que $c_q = 0$.
D'après II.9.(a), $\forall p \in \mathbf{Z},\ qc_{pq} = r_q c_p$.
En particulier (avec $p = 1$), $qc_q = r_q c_1$.
Or $c_1 \neq 0$ (d'après II.9.(b)), donc $\forall p \in \mathbf{Z},\ qc_{pq} = q\dfrac{c_q}{c_1}c_p$, d'où : $\forall p \in \mathbf{Z},\ c_{pq} = \dfrac{c_q}{c_1}c_p$.
On en déduit (en appliquant cette égalité avec $p = q^n$) que $\forall n \in \mathbf{N},\ c_{q^{n+1}} = \dfrac{c_q}{c_1}c_{q^n}$.
Ainsi, la suite $(c_{q^n})_{n\in\mathbf{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{c_q}{c_1}$, donc $\forall n \in \mathbf{N},\ c_{q^n} = c_1\left(\dfrac{c_q}{c_1}\right)^n$.
Enfin, d'après II.8.(b), pour tout $k \in \mathbf{N}$, $n^k c_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
Donc $q^{nk}c_{q^n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, puis $c_1 q^{nk}\left(\dfrac{c_q}{c_1}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ et $\left(\dfrac{c_q q^k}{c_1}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
Supposons $c_q \neq 0$: on obtient alors une absurdité en prenant k tel que $|c_q q^k| > 1$.
Donc $c_q = 0$.

10. Supposons $f \in \mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$, 1-périodique et non constante.
Alors (en conservant les notations de II.9.) $\forall q \geqslant 2,\ c_q = 0$, puis $\forall q \geqslant 2,\ c_{-q} = \overline{c_q} = 0$.
En outre, on a montré en II.9.(c) que $\forall q \geqslant 2,\ \forall p \in \mathbf{Z},\ c_{pq} = \dfrac{c_q}{c_1} c_p$.
On en déduit (avec $p = 0$) que $\forall q \geqslant 2,\ c_0 = \dfrac{c_q}{c_1} c_0$.
Supposons $c_0 \neq 0$: alors $\forall q \geqslant 2,\ c_q = c_1$, ce qui est absurde d'après II.9.(c), donc c_0.
En décomposant f en série de Fourier, on en déduit alors que $f \in \mathrm{Vect}(C, S)$ (où C et S sont les fonctions introduites en I.4.).
Réciproquement, toute $f \in \mathrm{Vect}(C, S)$ est dans $\mathscr{E}$ (car C et S ont même résolvante, toujours d'après I.4.).
Enfin, les fonctions constantes sont $\mathscr{E}$ (d'après I.2.) et sont bien $\mathscr{C}^\infty$ et 1-périodiques.
On conclut donc les éléments de $\mathscr{E}$ qui sont $\mathscr{C}^\infty$ et 1-périodiques sont les éléments de $\mathrm{Vect}(C, S) \cup \mathrm{Vect}(1)$.

III. Polynômes de Bernoulli

11. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{t}{n} + \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{t}{n} + \frac{k}{n}\right)\right) \mathrm{d}x,$$
donc
$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{t}{n} + \frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left|f(x) - f\left(\frac{t}{n} + \frac{k}{n}\right)\right| \mathrm{d}x.$$
En outre,
$$\forall k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ \forall x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right],\ \left|x - \left(\frac{t}{n} + \frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \left|x - \frac{k}{n}\right| + \left|\frac{t}{n}\right| \leqslant \frac{1 + |t|}{n}.$$
Fixons désormais $\varepsilon > 0$.
Alors d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $I = [-|t|, |t| + 1]$, d'où l'existence de $\delta > 0$ tel que
$$\forall (x, y) \in I^2,\ |x - y| \leqslant \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$
Donnons-nous $r \in \mathbf{N}^*$ tel que $\forall n \geqslant r,\ \dfrac{1 + |t|}{n} \leqslant \delta$: alors
$$\forall n \geqslant r,\ \left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{t}{n} + \frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \underbrace{\left|f(x) - f\left(\frac{t}{n} + \frac{k}{n}\right)\right|}_{\leqslant \varepsilon} \mathrm{d}x \leqslant \varepsilon.$$
On en conclut que
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{t}{n} + \frac{k}{n}\right) \underset{n \to \infty}{\to} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

12. Soit r la résolvante de f : alors d'après II.8., pour tout $t \in \mathbf{R}$,
$$\frac{r_n}{n} f(t) \underset{n \to \infty}{\to} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \quad (\star).$$
Or f est non constante, donc il existe deux réels s et t tels que $f(s) \neq f(t)$.

On déduit de $(\star)$ que $\dfrac{r_n}{n}(f(t)-f(s)) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, puis que $\dfrac{r_n}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

En utilisant à nouveau $(\star)$, on obtient que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

13. (a) Soit φ une primitive de f sur $\mathbf{R}$ (φ est donc $\mathscr{C}^1$).

    Supposons que $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $\mathscr{C}^1$ vérifie $F' = f$ et $\displaystyle\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

    Alors il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $F = \varphi + c$ et $\displaystyle\int_0^1 (\varphi(x)+c)\,\mathrm{d}x = 0$, donc $c = -\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

    Réciproquement, si on pose $F = \varphi - \displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x$, alors F est $\mathscr{C}^1$, $F' = f$ et $\displaystyle\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

    Il existe donc une unique $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $\mathscr{C}^1$ telle que $F' = f$ et $\displaystyle\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

    (b) • $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} G_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\frac{1}{n}} F\left(x+\frac{k}{n}\right)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = 0$;

    • $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} H_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{n}} F(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

    (c) Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $s_n = \dfrac{r_n}{n}$ et $\Phi_n = G_n - s_n H_n$.

    Soit $n \in \mathbf{N}^*$: $\forall x \in \mathbf{R}$, $\Phi_n'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x+\frac{k}{n}\right) - r_n f(nx) = 0$, donc Φ_n est constante.

    Or d'après III.13.(b), $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{n}} \Phi_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$, donc $\Phi_n = 0$.

    Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall x \in \mathbf{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} F\left(x+\frac{k}{n}\right) = s_n F(nx)$, donc $F \in \mathscr{E}$ (de résolvante s).

14. On montre par récurrence que pour tout $p \in \mathbf{N}$, B_p est de degré p et de coefficient dominant 1.
    Par ailleurs, B_0 est de résolvante $(n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ (d'après I.2.)
    On montre alors par récurrence (en utilisant III.13.(c)) que pour tout $p \in \mathbf{N}$, B_p est de résolvante $\left(\dfrac{1}{n^{p-1}}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

IV. Étude des solutions $\mathscr{C}^\infty$ et non 1-périodiques

15. Tout d'abord, remarquons que

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{p} a_k (X+1)^k = \sum_{k=0}^{p} a_k \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^j\right) = \sum_{j=0}^{p}\left(\sum_{k=j}^{p} a_k \binom{k}{j} X^j\right).$$

Ainsi,

- le coefficient de X^p dans $\Delta(P)$ est $a_p\dbinom{p}{p} - a_p = 0$;
- le coefficient de X^{p-1} dans $\Delta(P)$ est $a_{p-1}\dbinom{p-1}{p-1} + a_p\dbinom{p}{p-1} - a_{p-1} = pa_p \neq 0$.

Donc $\Delta(P)$ est de degré $p-1$ et de coefficient dominant pa_p.

16. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$: alors

$$r_n(\Delta(f))(nx) = r_n(f(nx+1) - f(nx)) = r_n f\left(n\left(x + \frac{1}{n}\right)\right) - r_n f(nx).$$

En utilisant $(\mathscr{R}_r)$, on obtient :

$$r_n(\Delta(f))(nx) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{1}{n} + \frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right).$$

Enfin, en remarquant que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{1}{n} + \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} f\left(x + \frac{k}{n}\right)$ puis en simplifiant, on a :

$$r_n(\Delta(f))(nx) = f(x+1) - f(x) = (\Delta(f))(x).$$

17. (a) Soient $x \in \mathbf{R}$ et $\mathscr{P}(k)$: « $\alpha^k g(x) = g\left(\frac{x}{2^k}\right)$ ».
   - $\mathscr{P}(0)$.
   - Soit $k \geqslant 0$, supposons $\mathscr{P}(k)$.
     Alors $\alpha^{k+1} g(x) = \alpha \cdot \alpha^k g(x) = \alpha g\left(\frac{x}{2^k}\right) = \alpha g\left(2\frac{x}{2^{k+1}}\right) = g\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)$, donc $\mathscr{P}(k+1)$.

   Donc, par récurrence, $\forall k \geqslant 0,\ \mathscr{P}(k)$.
   Ainsi,
   $$\forall x \in \mathbf{R},\ \forall k \in \mathbf{N},\ \alpha^k g(x) = g\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

   (b) Soit $x \in \mathbf{R}$: alors d'après IV.17.(a), $\forall k \in \mathbf{N},\ g(x) = \frac{1}{\alpha^k} g\left(\frac{x}{2^k}\right)$.
   Or $g\left(\frac{x}{2^k}\right) \underset{k\to\infty}{\to} g(0)$ (car g est continue) et $\frac{1}{\alpha^k} \underset{k\to\infty}{\to} 0$ (car $|\alpha| > 1$).
   Donc, par passage à la limite quand $k \to \infty$, $g(x) = 0$.
   Donc $g = 0$.

   (c) Par hypothèse,
   $$\forall x \in \mathbf{R},\ \alpha g(2x) = g(x).$$
   En dérivant p fois cette égalité (par rapport à x), on obtient :
   $$\forall p \in \mathbf{N},\ \forall x \in \mathbf{R},\ 2^p \alpha g^{(p)}(2x) = g^{(p)}(x).$$
   Or $2^p |\alpha| \underset{p\to\infty}{\to} +\infty$ (car $|\alpha| > 0$), donc il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $2^p |\alpha| > 1$.
   En posant $\beta = 2^p \alpha$, on a alors :
   $$|\beta| > 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbf{R},\ \beta g^{(p)}(2x) = g^{(p)}(x).$$
   En utilisant IV.17.(b), on en déduit que $g^{(p)} = 0$.

   (d)
   - Si $\alpha = 0$, alors $\forall x \in \mathbf{R},\ g(x) = \alpha g(2x) = 0$.
   - Si $|\alpha| > 1$, alors $g = 0$ (d'après IV.17.(b)).
   - Si $0 < |\alpha| \leqslant 1$, alors $g^{(p)} = 0$ (d'après IV.17.(c)).

   Dans tous les cas, g est polynomiale.

18. (a) D'après IV.16. (avec $n = 2$), on a : $\forall x \in \mathbf{R},\ r_2(\Delta(f))(2x) = (\Delta(f))(x)$.
   Donc d'après IV.17.(d), $\Delta(f)$ est une fonction polynomiale.
   Or f n'est pas 1-périodique, donc $\Delta(f)$ n'est pas identiquement nulle.

(b) D'après IV.16.,

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall x \in \mathbf{R},\ r_n(\Delta(f))(nx) = (\Delta(f))(x).$$

En identifiant les coefficients dominants, on obtient : $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ r_n n^q = 1$, donc

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ r_n = \frac{1}{n^q}.$$

D'après IV.18.(a), il existe des réels $a_0, \dots, a_q$, avec $a_q \neq 0$, tels que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ (\Delta(f))(x) = \sum_{k=0}^{q} a_k x^k.$$

En outre, $\forall x \in \mathbf{R},\ r_2(\Delta(f))(2x) = (\Delta(f))(x)$ et $r_2 = \dfrac{1}{2^q}$, donc

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \frac{1}{2^q} \sum_{k=0}^{q} a_k 2^k x^k = \sum_{k=0}^{q} a_k x^k.$$

En identifiant les coefficients, on obtient alors : $\forall k \in [\![0, q]\!],\ a_k 2^k = a_k 2^q$, puis

$$\forall k \in [\![0, q-1]\!],\ a_k = 0.$$

Enfin, en posant $a = a_q$, on a :

$$a \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbf{R},\ (\Delta(f))(x) = a x^q.$$

(c) D'après III.14., B_p est de degré p et de coefficient dominant 1.
Donc, d'après IV.15., $\Delta(B_p)$ est de degré $p-1$ et de coefficient dominant p.
Or $B_p \in \mathscr{E}$, donc d'après IV.18.(b) (appliqué à B_p),

$$\forall x \in \mathbf{R},\ (\Delta(B_p))(x) = p x^{p-1}.$$

(d) D'après IV.18.(b) et IV.18.c), pour tous $\lambda \in \mathbf{R}$ et $p \in \mathbf{N}^*$,

$$\forall x \in \mathbf{R},\ (\Delta(f - \lambda B_p))(x) = (\Delta(f))(x) - \lambda(\Delta(B_p))(x) = a x^q - \lambda p x^{p-1}.$$

Ainsi, en posant $\lambda = \dfrac{a}{p}$ et $p = q+1$, on a :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ (\Delta(f - \lambda B_p))(x) = 0.$$

- $f - \lambda B_p$ est $\mathscr{C}^\infty$ (comme somme de fonctions $\mathscr{C}^\infty$).
- $\Delta(f - \lambda B_p) = 0$, donc $f - \lambda B_p$ est 1-périodique.
- Pour tous $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) &= \frac{1}{n^q} f(nx) \quad \text{(d'après IV.18.(b))}, \\ \sum_{k=0}^{n-1} B_p\left(x + \frac{k}{n}\right) &= \frac{1}{n^q} B_p(nx) \quad \text{(d'après III.14.)}. \end{aligned}$$

On en déduit (en effectuant $L_1 - \lambda L_2$) que $f - \lambda B_p \in \mathscr{E}$ (de résolvante $\left(\dfrac{1}{n^q}\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$).

19. Soit $f \in \mathscr{E}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et non 1-périodique.
Alors d'après IV.18.(d), il existe $\lambda \in \mathbf{R}^*$ et $p \in \mathbf{N}^*$ tels que $f - \lambda B_p$ est dans $\mathscr{E}$, $\mathscr{C}^\infty$ et 1-périodique.
Donc d'après II.10., $f - \lambda B_p \in \mathrm{Vect}(C, S) \cup \mathrm{Vect}(1)$.
Supposons $f - \lambda B_p$ non nulle.
Alors la résolvante de $f - \lambda B_p$ obtenue en IV.18.(d) n'est pas compatible avec celles obtenues en I.2. et I.4. : c'est absurde, donc $f - \lambda B_p = 0$, c-à-d. que $f = \lambda B_p$.
Réciproquement, s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}^*$ et $p \in \mathbf{N}^*$ tels que $f = \lambda B_p$, alors $f \in \mathscr{E}$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ et non 1-périodique.

V. Étude des solutions L^1

20. Tout d'abord,

$$\forall \xi \in \mathbf{R}, \quad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi} \, \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| \, \mathrm{d}x,$$

donc $\widehat{f}$ est (bien définie et) bornée.
Ensuite,
- $\forall \xi \in \mathbf{R}, \ \forall x \in \mathbf{R}, \ \left| f(x) \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi} \right| \leqslant |f(x)|$;
- f est intégrable ;
- pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\xi \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi}$ est continue sur $\mathbf{R}$.

Donc, d'après le théorème de convergence dominée, $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbf{R}$.

21. (a) • $$\begin{aligned} \widehat{g}_n(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right) \right) \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi} \, \mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x + \frac{k}{n}\right) \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi} \, \mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\left(x - \frac{k}{n}\right)\xi} \, \mathrm{d}x \quad \text{(par changement de variable } x \leftarrow x - \frac{k}{n}\text{)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi\xi k}{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi} \, \mathrm{d}x \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi\xi}{n}} \right)^k \right) \widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

• $$\begin{aligned} \widehat{h}_n(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(nx) \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x\xi} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi x\xi}{n}} \, \mathrm{d}x \quad \text{(par changement de variable } x \leftarrow \frac{x}{n}\text{)} \\ &= \frac{1}{n} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{n}\right). \end{aligned}$$

(b) • Supposons $\xi \neq 0$: alors pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n > 2\pi|\xi|$, $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi\xi}{n}} \neq 1$, donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi\xi}{n}} \right)^k = \frac{1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\xi}}{1 - \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi\xi}{n}}}.$$

Or $1 - \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi\xi}{n}} \underset{n\to\infty}{\sim} -\frac{2\mathrm{i}\pi\xi}{n}$, donc (d'après V.21.(a)),

$$\frac{1}{n} \widehat{g}_n(\xi) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\xi} - 1}{2\mathrm{i}\pi\xi} \widehat{f}(\xi).$$

Si $\xi = 0$, alors (toujours d'après V.21.(a))

$$\frac{1}{n}\widehat{g}_n(\xi) \underset{n\to\infty}{\to} \widehat{f}(\xi).$$

- D'après I.1., $\widehat{f}$ est continue, donc d'après V.21.(a),

$$n\widehat{h}_n(\xi) \underset{n\to\infty}{\to} \widehat{f}(0).$$

22. (a) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $g_n = r_n h_n$, donc $\widehat{g}_n = r_n \widehat{h}_n$, d'où (d'après V.21.(a)) :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \forall \xi \in \mathbf{R},\ \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi\xi}{n}}\right)^k\right)\widehat{f}(\xi) = \frac{r_n}{n}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{n}\right) \quad (\star).$$

Supposons $\widehat{f}(0) \neq 0$: alors l'égalité précédente (appliquée avec $\xi = 0$) donne

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ n\widehat{f}(0) = \frac{r_n}{n}\widehat{f}(0),$$

donc $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ r_n = n^2$.
Or pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\widehat{g}_n = r_n\widehat{h}_n$, donc $\frac{1}{n}\widehat{g}_n = n\widehat{h}_n$, puis (en utilisant V.21.(b))

$$\forall \xi \in \mathbf{R}^*,\ \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\xi} - 1}{2\mathrm{i}\pi\xi}\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(0).$$

On obtient alors une absurdité en prenant $\xi = 1$, donc $\widehat{f}(0) = 0$.

(b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$: en utilisant $(\star)$ (établi en V.22.(a)),

$$\forall \xi \in \mathbf{R},\ \frac{|r_n|}{n}\left|\widehat{f}\left(\frac{\xi}{n}\right)\right| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1}\left|\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi\xi}{n}}\right|^k\right)|\widehat{f}(\xi)| \leqslant n\,\|\widehat{f}\|_\infty\,.$$

On en déduit que $\frac{|r_n|}{n}\,\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant n\,\|\widehat{f}\|_\infty$, puis (comme $\|\widehat{f}\|_\infty \neq 0$) que $|r_n| \leqslant n^2$.

(c) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\left|\frac{1}{n}\widehat{g}_n\right| = \left|\frac{r_n}{n}\widehat{h}_n\right| \leqslant \left|n\widehat{h}_n\right|$ (d'après V.22.(b)), donc (en utilisant V.21.(b))

$$\forall \xi \in \mathbf{R}^*,\ \left|\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\xi} - 1}{2\mathrm{i}\pi\xi}\widehat{f}(\xi)\right| \leqslant |\widehat{f}(0)|.$$

D'après V.22.(a) $\widehat{f}(0) = 0$, donc

$$\forall \xi \in \mathbf{R}^*,\ \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\xi} - 1}{2\mathrm{i}\pi\xi}\widehat{f}(\xi) = 0.$$

Enfin, $\forall \xi \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z},\ \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\xi} - 1 \neq 0$, donc

$$\forall \xi \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z},\ \widehat{f}(\xi) = 0,$$

puis $\widehat{f} = 0$ (car $\widehat{f}$ est continue d'après V.20.).

23. Soit $\chi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ \chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbf{Z}\ ; \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$.

- Supposons $nx \in \mathbf{Z}$.

  Alors $nx, nx+1, \dots, nx+n-1$ sont n entiers consécutifs, donc un et un seul d'entre eux est multiple de n.

  Ainsi, parmi les nombres $x, x+\dfrac{1}{n}, \dots, x+\dfrac{n-1}{n}$, un et un seul d'entre eux est entier.

  Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \chi\left(x+\frac{k}{n}\right) = 1$.

- Supposons $nx \notin \mathbf{Z}$.

  Alors pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $x+\dfrac{k}{n} \notin \mathbf{Z}$ (en effet, si $x+\dfrac{k}{n} \in \mathbf{Z}$, alors (en multipliant par n) $nx+k \in \mathbf{Z}$ puis (en soustrayant k) $nx \in \mathbf{Z}$, ce qui est absurde).

  Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \chi\left(x+\frac{k}{n}\right) = 0$.

Dans tous les cas, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \chi\left(x+\frac{k}{n}\right) = \chi(nx)$.

Ainsi, $\chi \in \mathscr{E}$ (de résolvante $(1)_{n\in\mathbf{N}^*}$).

Chapitre 3

Épreuves orales

Note préliminaire. Les compétences techniques sont au cœur de l'épreuve de leçons de mathématiques et de l'épreuve de modélisation mathématique. La première consiste à construire une leçon sur un thème donné. Le candidat doit proposer un plan argumenté précisant l'agencement et l'enchaînement des concepts clefs de la notion abordée, les illustrer par des exemples, en donner des applications et être en mesure de développer au tableau des résultats représentatifs de cette leçon. C'est au candidat qu'il incombe de sélectionner de tels résultats représentatifs (au moins deux), d'expliquer ces choix, et d'en proposer le développement au jury, dans un temps imparti. Dans la seconde épreuve, le candidat doit mettre en valeur ses connaissances techniques à partir d'un texte d'environ six pages qui lui est fourni. Il s'agit alors de mettre des mathématiques en action dans un contexte applicatif. Le candidat est invité à présenter et discuter, de manière structurée, les hypothèses qui conduisent à la description mathématique proposée dans le texte et à expliquer comment les énoncés du programme s'appliquent dans le contexte qui y est décrit. Le propos doit, de plus, être illustré en exploitant l'outil informatique.

Le jury rappelle que s'écarter du programme n'est en aucun cas une exigence pour prétendre à des notes très satisfaisantes ; le jury encourage surtout les préparations et les candidats à se concentrer sur la maîtrise des bases.

3.1 Épreuve orale de mathématiques (Analyse-Probabilités & Algèbre-Géométrie)

Les thèmes des leçons proposées au concours docteurs sont une sélection de l'ensemble des leçons d'algèbre-géométrie et d'analyse-probabilités du concours standard. On trouvera en annexe la liste des leçons qui seront utilisées en 2022. Le format de cette épreuve de leçons, ainsi que ses attendus, sont en tous points identiques à ceux des épreuves d'Analyse-Probabilités et d'Algèbre-Géométrie du concours standard. Aussi, les candidats sont invités à se reporter aux indications fournies dans le rapport du concours standard pour cette épreuve.

Proposer un plan de leçon et réaliser le développement d'une démonstration précise et détaillée d'un résultat substantiel sélectionné dans le plan proposé, dans un temps limité, sans recours à des notes, constituent des exercices difficiles qui ne s'improvisent pas et auxquels les candidats doivent impérativement s'entraîner. Il est recommandé de s'y exercer au sein d'une préparation universitaire, où les candidats docteurs, forts d'une plus grande maturité scientifique, peuvent d'ailleurs jouer un rôle d'émulation très positif sur l'ensemble de la promotion. Le jury attire l'attention des candidats sur le fait que les tirages peuvent combiner deux leçons orientées analyse et probabilités ou deux leçons orientées algèbre et géométrie ou deux leçons prises dans chacun de ces champs. Le candidat choisit laquelle de ces deux leçons il va exposer au jury. Le jury recommande une lecture minutieuse du rapport du concours standard, qui donne des indications détaillées sur les attendus de ces leçons. On y trouvera notamment une description des notions de base qui devraient constituer le cœur des leçons.

Il est toujours conseillé aux candidats de chercher à rassurer le jury quant à la maîtrise de ces bases plutôt que de tenter de l'éblouir par un exposé potentiellement inspiré de leurs thèmes de recherche mais débordant largement du programme. Le jury estime que le programme du concours contient un matériel technique suffisamment étoffé pour évaluer les capacités à remplir les missions du professeur agrégé. Les résultats contrastés sont surtout le reflet de niveaux de préparation hétérogènes.

3.2 Épreuve orale de modélisation (options A, B, C et D)

Pour cette épreuve, le jury renvoie là encore aux recommandations faites dans le rapport du concours standard. La plupart d'entre eux a su éviter les écueils suivants :

— se lancer dans un hors sujet, caractérisé par une tentative de replacer le contenu d'une leçon au détriment de l'analyse du texte ;

— négliger l'illustration informatique, parfois par manque d'entraînement sur les logiciels du concours.

Les candidats docteurs peuvent tirer profit de leur recul scientifique dans cette épreuve qui nécessite des qualités de synthèse et une capacité à balayer le programme de manière transverse.

Le jury encourage les futurs candidats à bien se préparer à cette épreuve en s'exerçant sur les textes rendus publics et en se familiarisant avec l'environnement informatique du concours accessibles sur le site agreg.org.

3.3 Épreuve orale de mise en perspective didactique d'un dossier recherche

Cette épreuve est spécifique au concours spécial ; sa matière est fournie par un document PDF de 12 pages maximum envoyé par les candidats dix jours avant le début des épreuves d'admission (en l'espèce la date butoir était donc le 9 juin à 23h59). Ce document consiste en un dossier scientifique présentant le parcours, les travaux de recherche et, le cas échéant, les activités d'enseignement et/ou de valorisation de la recherche. Il n'y a pas de format type puisque ce document a pour vocation de décrire l'expérience *personnelle* du candidat ; il doit surtout s'attacher à décrire le parcours du candidat, la place qu'occupent les mathématiques dans les principales étapes de celui-ci et comment cette expérience, quelle qu'en soit la nature, sera réinvestie dans la pratique enseignante. La description de l'exploitation d'outils mathématiques au cours d'une expérience professionnelle, comme ingénieur par exemple, est tout à fait bienvenue. Des candidats déjà enseignants peuvent aussi expliquer comment leur expérience de recherche s'exprime dans les classes.

Chaque dossier est confié au préalable à deux membres du jury, avec mission d'en être rapporteurs devant la commission d'interrogation. L'affectation des dossiers prend garde à ne pas confier cette part de l'évaluation à un expert du sujet de thèse du candidat. L'appréciation du document fourni fait partie des éléments de la grille de notation. Les deux autres membres du jury sont réputés avoir un regard plus « candide » sur la présentation orale de ce dossier. Un débat préparatoire réunissait les membres de la commission avant les épreuves afin d'échanger sur les dossiers et d'organiser une interrogation personnalisée, adaptée aux profils des candidats.

Les dossiers fournis étaient pour la plupart soignés et de qualité, montrant un investissement incontestable des candidats pour mettre en valeur leur parcours. Le jury conseille aux candidats de penser dans un même élan le document écrit et la présentation orale, en ayant bien présent à l'esprit que le document fournit la base de la présentation et qu'il sera disponible tout au long de celle-ci. Le jury recommande aux candidats d'inclure dans leur dossier un minimum d'éléments biographiques (notamment en y faisant apparaître clairement leur nom) : des informations sur la mobilité géographique et thématique, le parcours académique et/ou professionnel, les évolutions après thèse... donnent du relief à la discussion. De manière générale, la rédaction du dossier doit être guidée par une réflexion sur la question « En quoi une expérience dans la recherche peut-elle être un plus pour un enseignant ? ». La dimension de mise en perspective didactique du dossier occupe une place importante de son évaluation : on attend des candidats qu'ils mettent en lumière leurs savoirs, les méthodes et démarches présentes dans leurs travaux et qu'ils expliquent comment elles pourraient être réinvesties dans un enseignement sur l'éventail « lycée - L3 ». Le jury fait observer que la description d'une démarche de recherche et son explication didactique peuvent s'appuyer sur des sujets différents de ceux abordés durant la thèse, si le candidat juge un tel choix plus pertinent (cela peut être le cas pour des candidats ayant une expérience post-thèse assez longue). Davantage que les travaux proprement dits du candidat, c'est son expérience de recherche, son parcours qu'il convient de valoriser dans cette épreuve. L'objet de cette épreuve esr que les candidats puissent faire preuve d'une véritable plus-value, les distinguant des candidats du concours standard.

Bien que cette demande puisse être légitime au regard des pratiques de la communauté mathématique, les textes régissant le concours interdisent l'exploitation de matériel auxiliaire : les candidats ne peuvent donc pas appuyer leur présentation sur un support projeté préparé à cette fin. Pour compenser en partie cette difficulté, le jury a décidé de projeter le document de 12 pages fourni par les candidats en amont du concours. Il recommande donc vivement aux candidats de prendre en compte cette disposition, afin d'exploiter au mieux cette ressource pour leur exposé. Ce document peut notamment contenir des images ou des figures en illustrant le contenu, qui peuvent même être organisées sous forme d'animation à l'intérieur du fichier PDF. (Il doit bien s'agir d'images ou de figures sous forme d'animation ; cette option ne doit pas permettre d'ajouter du texte et de contourner ainsi la limitation imposée de 12 pages. Si un candidat utilise cette opportunité, il lui est conseillé de l'indiquer dans le document). Il est aussi possible d'insérer des liens hypertextes pour naviguer à l'intérieur du document. Il n'est toutefois pas permis d'exploiter des liens vers des sites web. De même, il n'est pas autorisé de se munir de son manuscrit de thèse, d'articles de recherche, ou, évidemment, de notes personnelles, ni pendant l'épreuve proprement dite, ni pendant la préparation ; seuls sont autorisés les mêmes documents que pour les autres épreuves, à savoir des livres dont la diffusion commerciale est avérée.

Il était rappelé en début de préparation que l'épreuve a pour objectif « d'apprécier l'aptitude du candidat à rendre ses travaux accessibles à un public de non-spécialistes ». Typiquement il était recommandé de construire un discours à destination d'un auditoire de niveau au plus M2 de mathématiques ; l'épreuve n'est pas un séminaire réservé à un public de chercheurs sur le sujet de thèse du candidat. Une grande attention avait été apportée à la composition des commissions pour justement éviter la présence d'experts des thèmes de recherche du candidat. L'aptitude à se faire comprendre par des non-spécialistes, à la fois dans le dossier écrit et durant la prestation orale, la capacité à s'adapter à des questions de niveaux variés, occupent une part très substantielle de la grille de notation.

L'arrêté du 28 juin 2016 stipule que le candidat doit, lors de cette épreuve, répondre « [...] à une question [...] communiquée par le jury au début de l'heure de préparation ». Chaque candidat reçoit donc une question spécifique l'invitant à développer sa réflexion sur la dimension didactique qui pourrait être donnée à son expérience de recherche et à expliquer comment cette expérience pourrait rejaillir dans ses fonctions d'enseignant. Lors de cette session, la question portait sur la proposition d'une ou plusieurs activités en classe :

- Proposer une activité en classe illustrant une notion mathématique à l'aide de l'ordinateur. Cette activité pourra se situer au niveau lycée, L1 ou L2. On précisera le niveau choisi.
- Proposer un ou plusieurs exemples montrant l'intérêt d'un dessin, d'une illustration graphique ou de la manipulation d'un objet matériel afin d'éclairer un concept mathématique. Ces exemples pourront se situer au niveau lycée, L1 ou L2. On précisera le niveau choisi.
- Proposer une activité en classe illustrant la notion de calcul approché. Ces exemples pourront se situer au niveau lycée, L1 ou L2. On précisera le niveau choisi.

Le jury souligne qu' il n'y a pas de réponse « type » attendue. Néanmoins, le jury apprécie sa pertinence et attend une description assez précise et concrète de la séance qui pourrait être proposée à des élèves ou des étudiants, avec des exemples et des exercices le cas échéant. Certains candidats ont fait cet effort de réfléchir à leur séance de cours ou TD et ont décrit en détail la séquence, en mettant bien en avant une démarche, bâtie sur une question, un calcul, une simulation, et conduisant à des déductions. Si ces propositions ont été plus ou moins pertinentes, avec un niveau plus ou moins bien identifié/adapté, elles ont toujours été valorisées par rapport aux affirmations laconiques « cette notion pourrait être présentée à des étudiants de L1-L2 », « telle partie pourrait être comprise par des étudiants de L1-L2 »... Le dialogue s'est systématiquement attaché à clarifier les modalités de mise en œuvre pratique et concrète de la séquence proposée.

L'épreuve proprement dite comprend deux parties distinctes. Dans un premier temps, durant 30 minutes, le candidat organise librement la présentation de son dossier (durant au moins 20 minutes) et la réponse à la question posée (durant au moins 5 minutes). La suite de l'interrogation est consacrée à un dialogue avec le jury. Ce dialogue, personnalisé suivant le parcours du candidat, explore divers aspects du dossier. On peut y distinguer

- des questions en lien direct avec la question posée pour la préparation de l'épreuve. L'objectif est ici de discuter du contenu mathématique de la démarche proposée et de sa mise en perspective didactique.
- des questions sur les mathématiques, les démarches et les méthodes présentées par le candidat lors de son exposé ou présents dans son dossier. Il ne s'agit pas de questions spécialisées d'experts, et encore moins de questions « pièges ». En particulier, pour des docteurs ayant soutenu leur thèse dans d'autres disciplines que les mathématiques, ces questions visent à mettre en relief les aspects mathématiques qui peuvent être en rapport avec leurs travaux de leur recherche. Le but est de tester la capacité à expliquer des points élémentaires des travaux de recherche et de discuter des possibilités de réinvestir les démarches utilisées ou les savoir-faire acquis dans un enseignement de niveau lycée, ou L1-L2.
- le jury peut proposer un exercice niveau lycée (ou L1 mais en restant dans des domaines très classiques) dans un domaine disjoint de celui de la thèse en demandant de le « faire vivre » dans une classe. Ces questions sortent les candidats de leur zone de confort en les faisant réfléchir à des questions en lien avec le programme du secondaire qui ne sont pas reliées à leur domaine de recherche.
- enfin, le jury pose des questions plus ouvertes dont le thème général peut se résumer à évaluer l'apport d'une expérience dans la recherche pour un enseignant.

Ces questions, dont le niveau est généralement assez élémentaire, arrivent au débotté durant la discussion. La capacité à rebondir pour resituer la question dans le cadre de l'expérience de recherche et/ou d'une réflexion à mener en classe, à reformuler des notions pour les rendre accessibles à un public non averti sont particulièrement évaluées dans cette phase de l'épreuve.

Cette épreuve permet de faire ressortir un véritable signal, discriminant et pertinent quant à l'objectif de recrutement d'enseignants et de valorisation d'une expérience de recherche. Elle joue pleinement son rôle dans la sélection des candidats. L'épreuve permet à des profils variés, issus d'autres disciplines ou dont la thèse est ancienne, d'exprimer des qualités et une motivation pour les carrières d'enseignants en mathématiques. Pour tirer plein profit de leur expérience et bien mettre en valeur leur parcours, les candidats doivent préparer cette épreuve spécifique avec soin. Une prestation improvisée, purement descriptive des résultats doctoraux, sans réflexion de mise en perspective et sans anticipation de la discussion, ne conduira qu'à un résultat médiocre.

Chapitre 4

La bibliothèque de l'agrégation

En 2021, les candidats ont pu utiliser une bibliothéque numérique pendant la préparation de l'épreuve de modélisation. La liste des livres disponibles est décrite ci-dessous. Cette liste sera actualisée en 2022, en tenant compte de la disparition de l'option D. La liste 2022 sera disponible sur le site du concours agreg.org.

— Serge Abiteboul, Benjamin Nguyen, Yannick Le Bras : Introduction aux Bases de Données Relationnelles
— Grégoire Allaire : Analyse numerique et optimisation (Éditions de l'École polytechnique)
— Gilles Bailly-Maitre : Arithmétique et cryptologie (Ellipses, 2e édition)
— Philippe Barbe et Michel Ledoux - Probabilité (EDP Sciences)
— Danièle Beauquier, Jean Berstel, Philippe Chrétienne : Eléments d'algorithmique (Masson)
— Sylvie Benzoni-Gavage : Calcul différentiel et équations différentielles (Dunod, 2e édition)
— Florent Berthelin : Équations différentielles (Cassini)
— Frédéric Bertrand, Myriam Maumy Bertrand : Initiation à la statistique avec R (Dunod)
— Alin Bostan et al. : Algorithmes efficaces en calcul formel (Hal.inria.fr)
— Richard Brent, Paul Zimmermann : Modern Computer Arithmetic (Cambridge University Press)
— Hervé Carrieu : Probabilité (EDP Sciences)
— Alexandre Casamayou-Boucau, Pascal Chauvin et Guillaume Connan : Programmation en Python pour les mathématiques (Dunod, 2e édition)
— Alexandre Casamayou et al. : Calcul mathématique avec Sage
— Marie-Line Chabanol, Jean-Jacques Ruch : Probabilités et statistiques (Ellipses)
— Djalil Chafai, Pierre-André Zitt : Probabilités, préparation à l'agrégation interne
— Djalil Chafai, Florant Malrieu : Recueil de modèles aléatoires (HAL Id : hal-01897577, version 3)
— Jean-Pierre Demailly - Analyse numérique et équations différentielles (EDP Sciences, 4e édition)
— Michel Demazure : Cours d'algèbre (Cassini)
— Laurent di Menza : Analyse numérique des équations aux dérivées partielles (Cassini)
— Gilles Dowek : Les démonstrations et les algorithmes (Éditions de l'École polytechnique)
— Gilles Dowek : Introduction à la théorie des langages de programmation (Éditions de l'École polytechnique)
— Christoph Dürr, Jill-Jenn Vie : Programmation efficace. 128 algorithmes qu'il faut avoir compris et codés en Python au cours de sa vie (Ellipses)
— Jérôme Escoffier : Probabilités et statistiques (Ellipses, 3e édition)
— Francis Filbet : Analyse numérique (Dunod, 2e édition)
— Loïc Foissy et Alain Ninet : Algèbre et calcul formel (Ellipses)
— Christine Froidevaux ,Marie-Claude Gaudel,Michèle Soria : Types de données et algorithmes Broché de (MC-Graw Hill)
— Olivier Garet et Aline Kurtzmann : De l'intégration aux probabilités (Ellipses, 2e édition)

- Thierry Goudon : Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique (ISTE)
- Thérèse Hardin et al. : Concepts et sémantique des langages de programmation 1. Constructions fonctionnelles et impératives avec OCaml, Python, C et C++ (ISTE)
- Jean-Baptiste Hiriart-Urruty : Optimisation et analyse convexe (EDP Sciences)
- John Hubbard, Beverly West : équations différentielles et systèmes dynamiques (Cassini)
- Mathieu Jaume, Matthieu Journault, Marie-Jeanne Lesot, Pascal Manoury, Isabelle Mounier : Logique pour l'informatique (Ellipses)
- Pascal Lafourcade, Levy Michel , Dewismes Stéphane : Logique et démonstration automatique - Introduction à la logique propositionnelle et à la logique du premier ordre (Ellipses)
- Laurent Le Floch et Frédéric Testard : Probabilités 1 (Calvage et Mounet)
- Thierry Meyre : Probabilités, cours et exercices corrigés. Tome 1 (Calvage et Mounet
- Thierry Meyre : Probabilités, cours et exercices corrigés. Tome 2 (Calvage et Mounet)
- Denis Monasse : Cours d'option informatique MPSI (Spartacus IDH)
- Denis Monasse : Cours d'option informatique MP/MP* (Spartacus IDH)
- Jean-Yves Ouvrard : Probabilités. tome 1 (Cassini, 2e édition)
- Jean-Yves Ouvrard : Probabilités. tome 2 (Cassini, 2e édition)
- Sylvain Perifel : Complexité Algorithmique (Ellipses)
- Jean-Étienne Rombaldi : Analyse matricielle (EDP Sciences, 2e édition)
- François Rouvière : Petit guide de calcul différentiel (Cassini, 4e édition)
- Patrice Séébold : Fondamentaux de la théorie des automates (Ellipses)
- Victor Shoup : Computational introduction to number theory and algebra (Cambride University Press)
- Damien Vergnaud : Exercices et problèmes de cryptographie (Dunod, 3e édition)

Annexe A

Liste des leçons de mathématiques pour le concours spécial 2022

101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

121 Nombres premiers. Applications.

123 Corps finis. Applications.

126 Exemples d'équations en arithmétique.

141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

142 PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

152 Déterminant. Exemples et applications.

153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

156 Exponentielle de matrices. Applications.

157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

191 Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

203 Utilisation de la notion de compacité.

208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

213 Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

215 Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

219 Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

220 Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

222 Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires.

226 Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

228 Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

234 Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

235 Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

236 Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

241 Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

245 Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.

246 Séries de Fourier. Exemples et applications.

250 Transformation de Fourier. Applications.

262 Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

265 Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

266 Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.