

Concours : Agrégation externe spéciale

Section : Mathématiques

Session 2022

Rapport de jury présenté par : Claudine Picaronny
Présidente du jury

Table des matières

1	Déroulement du concours et statistiques	5
1.1	Déroulement du concours 2022	5
1.2	Commentaires généraux et statistiques sur la session 2022	6
1.2.1	Commentaires généraux	6
1.2.2	Données statistiques diverses	7
2	Épreuve écrite de mathématiques	10
2.1	Énoncé	10
2.2	Commentaires sur l'épreuve écrite d'admissibilité	10
2.3	Proposition de corrigé	11
2.3.1	Exercices	11
2.3.2	Problème d'algèbre : diagonale et spectre	16
2.3.3	Problème d'analyse : centralisateurs des difféomorphismes de la demi-droite	25
3	Épreuves orales	33
3.1	Épreuve orale de mathématiques (Analyse-Probabilités & Algèbre-Géométrie)	33
3.2	Épreuve orale de modélisation (options A, B et C)	34
3.3	Épreuve orale de mise en perspective didactique d'un dossier recherche	34
4	La bibliothèque de l'agrégation	37
A	Liste des leçons de mathématiques pour le concours spécial 2023	38

Introduction

La session 2022 est la sixième édition de ce concours spécial réservé aux docteurs. Les exigences scientifiques de ce concours spécial sont les mêmes que celles qui régissent le concours externe standard, sans aucune concession quant aux connaissances mathématiques et leur maîtrise. Cependant, son format original et son public réservé donnent l'occasion de mettre en valeur la maturité liée à une expérience professionnelle et les qualités spécifiques résultant d'une pratique des mathématiques par la recherche. Ce concours permet ainsi de recruter des professeurs agrégés ayant un parcours professionnel déjà établi, une expérience de recherche, des compétences pluridisciplinaires, éventuellement marqués par la confrontation à un environnement international. Ce vécu est appelé à s'exprimer au concours et ne peut que rejaillir positivement sur la pratique enseignante. L'expérience montre que cette voie de recrutement est très ouverte et permet de valoriser — moyennant un indispensable effort de préparation — des candidats aux parcours et profils variés, incluant des titulaires d'une thèse dans une autre discipline que les mathématiques.

Ce rapport vise deux objectifs. D'une part il établit un bilan de la session 2022, notamment en présentant les données statistiques du concours et en discutant les éléments saillants des productions des candidats.

D'autre part il se veut un document *utile* pour les futurs candidats afin de les aider à se préparer au mieux pour les épreuves qui les attendent. Ainsi, il fournit :

- un corrigé commenté de l'épreuve écrite d'admissibilité, en indiquant quelques erreurs parmi les plus fréquentes et les défauts de rédaction observés ;
- des recommandations précises pour les épreuves orales d'admission.

Le jury invite les candidats de tous profils, ainsi que les centres de préparation et leurs intervenants, à en faire une lecture attentive et à bien tenir compte des prescriptions qui y sont faites. La consultation du rapport du concours standard, plus détaillé sur les attentes des épreuves d'admission peut s'avérer utile.

On trouve sur le site officiel de l'agrégation externe de mathématiques agreg.org nombre d'informations utiles : des archives (sujets d'écrit, textes de modélisation, rapports) et des renseignements pratiques concernant les sessions à venir. En particulier, les futurs candidats peuvent trouver sur ce site la **ClefAgreg** qui leur permettra de se familiariser avec l'environnement informatique qu'ils rencontreront pour l'épreuve de modélisation. Se préparer suffisamment tôt à cette épreuve permet d'en bien comprendre les attendus, mais aussi peut aider à renforcer les capacités de synthèse sur l'ensemble du programme. Enfin, le jury rappelle qu'une réunion publique, ouverte aux préparateurs et aux candidats, est traditionnellement organisée en début d'année universitaire sous l'égide des sociétés savantes de mathématiques pour évoquer le bilan et les perspectives du concours.

Le jury recommande aux candidats de se préoccuper suffisamment tôt des questions liées à la gestion de leur carrière auxquelles ils seront confrontés en cas de succès au concours. Les lauréats de ce concours spécial sont considérés comme devant être immédiatement opérationnels et ne devraient donc pas être concernés par les procédures de report de stage. Notamment, les possibilités d'être nommé stagiaire en qualité d'ATER ou affecté dans l'enseignement supérieur sur un emploi de professeur du second degré (PRAG) ne sont pas offertes aux lauréats du concours spécial (note de service n°. 2019-064 du 25 avril 2019, https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=141354). Il est à

noter que les reçus bénéficient d'une bonification d'ancienneté de deux ans au titre de la période de préparation du doctorat ; lorsque la période de préparation du doctorat a été accomplie sous contrat de travail, les services accomplis dans ce cadre sont pris en compte pour la part de leur durée excédant deux ans (article 6 du décret n°. 72-580 du 4 juillet 1972 relatif au statut particulier des professeurs agrégés de l'enseignement du second degré, modifié par le décret n°. 2016-656 du 20 mai 2016).

Chapitre 1

Déroulement du concours et statistiques

1.1 Déroulement du concours 2022

Le concours spécial docteur, création de la campagne de recrutement 2017, est un concours « jeune », instauré par le décret n°. 2016-656 du 20 mai 2016. En 2019, six disciplines étaient concernées par l'ouverture de postes à ce concours spécial : mathématiques (seize postes), langues vivantes étrangères : anglais (dix postes), lettres modernes (douze postes), physique-chimie option chimie (cinq postes), physique-chimie option physique (douze postes) et sciences de la vie-sciences de la Terre et de l'Univers (cinq postes). Les modalités des épreuves sont décrites par l'arrêté du 28 juin 2016, accessible sur le site <https://www.legifrance.gouv.fr/>. Le concours comprend une seule épreuve écrite d'admissibilité et trois épreuves orales d'admission : une épreuve de leçon de mathématiques qui couvre l'intégralité du programme (sans distinction des thèmes d'algèbre-géométrie et ceux d'analyse-probabilités), une épreuve de modélisation et une épreuve de mise en perspective didactique d'un dossier de recherche qui est spécifique à ce concours. Les candidats ont le choix parmi trois options :

- probabilités et statistiques,
- calcul scientifique,
- algèbre et calcul formel,

qui ne diffèrent que par l'épreuve de modélisation.

Ce concours spécial est réservé aux titulaires d'un doctorat, le diplôme devant être acquis à la date de publication de la liste des admissibles. Les mères ou pères d'au moins trois enfants ainsi que les sportifs de haut niveau sont dispensés de cette condition de diplôme, mais ils seront bien sûr confrontés aux mêmes épreuves. En particulier candidater à ce concours n'a de sens que pour une personne qui, sans être forcément titulaire d'un doctorat, peut justifier d'un parcours et d'une expérience pouvant être mis en valeur dans l'épreuve sur dossier. Tout en rappelant que le référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat de l'éducation (arrêté du 1er Juillet 2013) indique que la maîtrise de la langue française est un attendu premier, il est important de souligner que ce concours est ouvert à tout ressortissant d'un État membre de l'Union européenne, d'un État faisant partie de l'accord sur l'Espace économique européen, de la principauté d'Andorre, de la Confédération suisse ou de la Principauté de Monaco. Ainsi, ce concours peut être une opportunité pour des docteurs ressortissants de ces pays, intéressés pour exercer en France, mais dont le parcours académique initial, par exemple effectué à l'étranger, ne donnait pas d'inclination particulière pour passer le concours de l'agrégation externe standard dans la lignée de leur cursus. Enfin, cette session le prouve encore, le format de l'épreuve permet d'attirer des candidats qui seraient titulaires d'une thèse dans une autre discipline : ils ont l'occasion d'expliquer comment des outils mathématiques sont intervenus au cours de leur expérience de recherche ou professionnelle, comment ils ont été exploités au service d'applications concrètes et comment cette expérience pourra enrichir leur pratique d'enseignant en mathématiques.

L'épreuve écrite d'admissibilité s'est déroulée le jeudi 22 février 2022. Les candidats sont libres de s'inscrire à la fois au concours standard et au concours spécial ; toutefois, les épreuves écrites ayant lieu

au même moment, il leur faut déterminer finalement à quel concours ils souhaitent se présenter. Le jury conseille aux candidats d'effectuer ce choix en évaluant quelles épreuves leur permettent de mieux se mettre en valeur, en fonction de leur parcours et de leur préparation, toute autre considération, par exemple liée à la gestion des carrières, paraissant particulièrement hypothétique.

La liste des candidats admissibles a été publiée le 10 mai 2022. Les épreuves orales du concours spécial étaient organisées en parallèle de celles du concours standard de l'agrégation externe à Strasbourg, au lycée Kléber. Le jury et les candidats y ont trouvé d'excellentes conditions de travail, et ont profité d'un accueil chaleureux et dévoué. Les jurys, les délibérations et les classements du concours spécial et du concours standard sont distincts.

1.2 Commentaires généraux et statistiques sur la session 2022

1.2.1 Commentaires généraux

Le nombre d'inscrits au concours spécial s'élève à 165 et 56 candidats se sont présentés à l'épreuve écrite. À l'issue de la délibération d'écrit, 26 candidats ont été déclarés admissibles ; le premier admissible avait une note de 20/20 et le dernier une note de 3,5/20. Avec toutes les précautions d'usage sur la comparaison entre deux concours différents, le jury estime que tous ces candidats auraient probablement eu leur place parmi les admissibles du concours standard et que les meilleures copies du concours spécial s'y seraient placées à un très bon, voire excellent, rang. À l'issue des épreuves orales, les délibérations du jury ont conduit à retenir les 9 candidats qui avaient franchi la note moyenne de 8,5/20 ; le premier du concours présente une moyenne de 17,94/20 et le premier candidat non admis a une moyenne de 8,2.

Le jury renouvelle sa principale recommandation qui consiste à s'assurer de bases solides et à faire preuve de la maîtrise de ces bases, que ce soit par une rédaction efficace et convaincante à l'écrit, par des leçons calibrées et soignées ou une présentation à l'épreuve de modélisation qui inspirent toute confiance quant à la solidité de ces bases. La consultation du rapport du concours standard confortera ces priorités.

Admissibilité. L'épreuve écrite, unique, se présente sous un format légèrement différent de celui du concours standard. Le site agreg.org présente les archives du concours afin que les futurs candidats puissent se familiariser avec ce format. Le sujet était constitué

- d'une série d'exercices, qui balaient plutôt le niveau L1-L3,
- de deux problèmes **au choix**, l'un plutôt orienté sur la partie algèbre-géométrie du programme, l'autre orienté sur la partie analyse-probabilités.

Cette formulation permet d'une part de tester les candidats sur les bases du programme, et d'autre part de leur donner l'occasion de s'exprimer au mieux sur ce qui pourrait être leur terrain de prédilection. L'en-tête du sujet invitait très clairement les candidats à répartir leur temps, dont au moins la moitié devait être dévolue au problème et au moins un tiers à la partie exercices. Le barème correspondait à une telle répartition de l'effort. Les candidats doivent convaincre d'une compétence suffisante sur l'ensemble du programme : si le problème invite les candidats à s'exprimer sur leurs thèmes de prédilection, les exercices préliminaires ont précisément la vocation de vérifier les connaissances de base sur un éventail large. Les candidats ne doivent pas se focaliser sur les seuls exercices relevant du même thème que le problème choisi. Une telle stratégie est pénalisée.

Un tel format « exercices (imposés) + problème au choix », avec la même clef de répartition du temps et du barème, sera reconduit en 2023.

Admission. Bien que le concours comporte une épreuve sur dossier, impliquant ainsi une connaissance du parcours et du profil du candidat, le jury travaille de manière étanche : les commissions

des épreuves de leçons et de modélisation ne reçoivent aucune indication sur les candidats (sujet de thèse, provenance, situation professionnelle...). Les commissions n'ont par ailleurs aucune information quant aux résultats à l'écrit ou aux autres épreuves orales avant la phase de délibération. Ces épreuves obéissent donc au même fonctionnement et aux mêmes critères d'évaluation que pour le concours standard.

Le programme Le concours externe de l'agrégation a pour vocation de recruter des professeurs agrégés destinés à exercer dans l'enseignement secondaire (lycées d'enseignement général et technologique et, exceptionnellement, collèges) ou dans l'enseignement supérieur (universités, instituts universitaires de technologie, grandes écoles, classes préparatoires aux grandes écoles, sections de techniciens supérieurs). Le jury estime donc que le niveau visé devrait permettre au professeur agrégé d'intervenir sereinement et efficacement sur le créneau « bac-3/bac+3 » ; cet objectif calibre la conception du programme et les critères d'évaluation.

Le programme et la nature des épreuves, écrites et orales, font l'objet de publications sur le site officiel de ministère de l'Éducation nationale <http://www.devenirenseignant.gouv.fr>. Le [programme 2023](#) est identique au programme 2022.

Le jury s'engage, bien sûr, à respecter le programme. Ce programme n'est pas exhaustif, il résulte d'un compromis et des résultats mathématiques « importants » manquent au programme. Il est tout à fait possible que des candidats aient connaissance de ces notions avancées, souhaitent en faire mention et proposer des excursions hors des limites du programme. Le jury saura s'adapter et apprécier de telles propositions. Toutefois, elles ne sont absolument pas nécessaires pour prétendre aux notes maximales.

1.2.2 Données statistiques diverses

Ce paragraphe regroupe quelques indications sur la répartition des candidats suivant l'académie, l'âge, le genre et la profession.

Répartition des candidats selon le genre On trouvait 21 % de femmes parmi les inscrits puis 16 % parmi les présents à l'épreuve d'admissibilité. Avec 3 candidates admissibles sur 26 (soit 11,5 %), et une unique candidate présente et admise à l'oral.

Le jury regrette les faibles pourcentages associés à la participation féminine à tous les niveaux du concours, ce qu'il ne peut que constater. C'est l'occasion de rappeler que les procédures de correction des épreuves écrites étant totalement anonymisées, il est difficile d'imaginer quel biais pourrait jouer à ce niveau.

Répartition des candidats selon l'âge La majeure partie des admissibles et des admis a moins de 40 ans.

Age	< 27	28 - 30	31- 40	41-50	>50
Inscrits	4	20	61	42	38
Présents	1	7	23	15	10
Admissibles	1	6	10	7	2
Admis	0	4	4	1	0

Répartition des candidats suivant l'âge aux différentes étapes du concours

Répartition selon l'académie.

Académies	Inscrits	Présents	Admissible	Admis
AIX-MARSEILLE	6	3	-	-
AMIENS	1	-	-	-
BESANCON	1	-	-	-
BORDEAUX	4	-	-	-
CAEN	2	1	1	1
CLERMONT-FERRAND	1	1	-	-
CRETEIL-PARIS-VERSAIL.	47	16	9	3
DIJON	2	-	-	-
GRENOBLE	5	1	1	-
GUADELOUPE	2	1	-	-
LA REUNION	4	1	-	-
LILLE	11	4	3	2
LIMOGES	2	1	-	-
LYON	9	5	3	-
MAYOTTE	1	-	-	-
MONTPELLIER	4	1	-	-
NANCY-METZ	7	5	1	1
NANTES	10	1	1	1
NICE	7	1	1	-
ORLEANS-TOURS	3	-	-	-
POITIERS	8	4	3	-
REIMS	1	1	1	-
RENNES	5	3	2	1
ROUEN	4	1	-	-
STRASBOURG	8	4	-	-
TOULOUSE	10	1	-	-

Tableau de répartition des candidats par académie

Répartition selon la profession Ces données sont issues des déclarations faites par les candidats lors de l'inscription et sont peu précises.

	Inscrits	Présents	admissibles	admissibles présents	admis
CERTIFIE	67	25	7	5	1
CONTRACT ENSEIGNANT SUPERIEUR	9	4	3	2	2
SANS EMPLOI	22	5	3	2	1
PLP	3				
ENSEIGNANT DU SUPERIEUR	9	4	4	2	1
SALARIES SECTEUR INDUSTRIEL	4				
MAITRE AUXILIAIRE	2				
CADRES SECT PRIVE CONV COLLECT	6	2	1	1	1
ETUD. HORS ESPE (SANS PREPA)	1				
AGREGE	4	2	1	1	
VACATAIRE ENSEIGNANT DU SUP.	5	1	1	1	1
PERS ENSEIG TIT FONCT PUBLIQUE	3	2			
ARTISANS / COMMERCANTS	1	1	1	1	1
PROFESSEUR ECOLES	1				
MAITRE CONTR. ET AGREE REM TIT	2	2	1	1	
PROFESSIONS LIBERALES	4	1	1		
PERS FONCTION PUBLIQUE	3	1	1	1	1
ENS. STAGIAIRE 2E DEG. COL/LYC	4	2			
MAITRE DELEGUE	1				
ETUD. HORS ESPE (PREPA MO. UNIV)	1				
AG NON TITULAIRE FONCT PUBLIQ	3	1			
FORMATEURS DANS SECTEUR PRIVE	2	1	1		
CONTRACTUEL 2ND DEGRE	5	1			
SALARIES SECTEUR TERTIAIRE	2	1	1		
PERS ENSEIG NON TIT FONCT PUB	1				

Répartition suivant la profession aux différentes étapes du concours

Les doctorats des candidats admissibles et présents aux épreuves orales se répartissent sur des champs des mathématiques très variés (combinatoire, géométrie algébrique, géométrie différentielle, logique, probabilités) ou relèvent d'autres disciplines (mécanique, automatique, physique, informatique).

Chapitre 2

Épreuve écrite de mathématiques

2.1 Énoncé

Le [sujet](#) est aussi disponible sur le site agreg.org.

2.2 Commentaires sur l'épreuve écrite d'admissibilité

L'exercice 1 n'a pas posé de difficultés majeures. Toutes les copies admissibles l'ont traité significativement. L'exercice 2 a montré des faiblesses de rédaction, notamment de rigueur. C'est principalement cette rigueur qui distingue les copies admissibles des autres. L'exercice 3 s'est avéré déroutant et seules les bonnes copies s'en sont bien saisi. L'exercice 4 a occasionné de nombreux refus d'obstacle. Il faut à cette occasion rappeler qu'on ne saurait enseigner les mathématiques aujourd'hui sans une connaissance solide en probabilités, et notamment du vocabulaire et des concepts de base. L'exercice 5 a été rarement abordé de façon convaincante. En général, on constate des lacunes importantes en topologie et en probabilités.

Les parties I des deux problèmes étaient assez classiques, chacune dans leur genre, mais étaient écrites de façon abstraite. Il fallait en prendre la mesure et ne pas se jeter dans le problème sans réfléchir. En analyse, par exemple en question 3, λ est fixé. En algèbre, nul n'est besoin de revenir systématiquement à la définition des morphismes de K -algèbres : la multiplication est par nature un tel morphisme.

On regrette pour de nombreuses copies une rédaction trop souvent lapidaire : Il faut citer toutes les hypothèses des théorèmes que l'on utilise. Par exemple le théorème de continuité et celui de dérivation sous le signe intégral sont très majoritairement non ou mal justifiés. Les objets quantifiés doivent l'être avant toute utilisation. Ainsi la plupart des quantificateurs se trouve en début de phrase mathématique.

10% des copies se sont bien saisies d'un des deux problèmes. Sans grande surprise, ces copies ont été admissibles, puis admises. 20% supplémentaires ont avancé significativement dans les problèmes. Le reste des admissibles ont couvert une grande partie du sujet, sans sacrifier à la rigueur.

Les copies des personnes admises avaient déjà démontré à l'écrit une rigueur et une maîtrise de bon niveau, comparable à ce qui est attendu à l'agrégation standard.

2.3 Proposition de corrigé

2.3.1 Exercices

Exercice 1

Cet exercice montrait que tout endomorphisme de la \mathbf{C} -algèbre $M_n(\mathbf{C})$ est un automorphisme intérieur, ce qui est un cas très particulier du théorème de Skolem-Noether (1927). On y exploitait notamment l'existence de racines n -ièmes de l'unité dans le corps \mathbf{C} .

1. (a) Les endomorphismes u et v annulent le polynôme $X^n - 1 \in \mathbf{C}[X]$, qui est scindé à racines simples, donc ils sont diagonalisables, et leurs valeurs propres sont racines de ce polynôme, c'est-à-dire sont des racines n -ièmes de l'unité.
- (b) Soit $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$. On a alors $u(v(x)) = \omega v(u(x)) = \omega v(\lambda x) = \omega \lambda v(x)$. Comme $v^n = \text{id}_E$, l'endomorphisme v est un automorphisme (d'inverse v^{n-1}), donc le vecteur $v(x)$ n'est pas nul : il s'agit bien d'un vecteur propre pour u , associé à la valeur propre $\omega \lambda$.
- (c) On a déjà vu l'inclusion $\text{Sp}(u) \subset U_n$. Soit $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Montrons $\omega^p \in \text{Sp}(u)$. Soit $\lambda \in U_n$ une valeur propre de u . On peut trouver $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $\lambda = \omega^k$. D'après la deuxième question, appliquée $n-k+p$ fois, $\omega^{n-k+p} \lambda = \omega^{n+p} = \omega^p$ est encore valeur propre de u , ce qui conclut.
- (d) Soit e_0 un vecteur propre pour u associé à la valeur propre 1 et, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, notons $e_p = v^p(e_0)$, qui est un vecteur propre pour u , associé à la valeur propre ω^p (en suivant le raisonnement mené à la deuxième question).

En particulier, puisqu'il s'agit de vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes, les vecteurs e_0, \dots, e_{n-1} forment une famille libre, et donc une base \mathcal{B} de E , qui est de dimension n .

Par construction, on a déjà $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \Delta$.

En outre, pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, on a $v(e_k) = v^{k+1}(e_0) = e_{k+1}$ et $v(e_{n-1}) = v^n(e_0) = e_0$. Cela montre que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \Sigma$, et conclut.

2. (a) La matrice Δ est diagonale. On en déduit $\text{Vect}(\Delta^k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} \subset D_n(\mathbf{C})$ car $D_n(\mathbf{C})$ est une sous-algèbre de $M_n(\mathbf{C})$ et donc stable par produit et combinaison linéaire. Par ailleurs, le polynôme caractéristique de Δ a pour racines les n éléments de U_n , qui sont différents. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on en déduit que ce polynôme est également le polynôme minimal de Δ , ce qui montre que ce dernier est de degré n . La sous-algèbre $\mathbf{C}[\Delta]$ engendrée par Δ est donc de dimension n et égale à $\text{Vect}(\Delta^k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$, ce qui montre $\text{Vect}(\Delta^k)_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} = D_n(\mathbf{C})$ par inclusion et égalité des dimensions.
- (b) À partir de maintenant, on notera $E_{a,b}$ la matrice élémentaire habituelle de $M_n(\mathbf{C})$, avec la convention que les indices sont à prendre modulo n . Par exemple, $E_{3n+1, n+1} = E_{1,1}$. On a ainsi, pour tous a, b entiers, que $\Sigma E_{a,b} = E_{a+1,b}$ et donc $\forall k \in \mathbf{Z}, \Sigma^k E_{a,b} = E_{a+k,b}$. Fixons donc $a, b \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On peut trouver $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $a+j$ et b soient congrus modulo n , si bien que $E_{a,b} = \Sigma^j E_{a,a}$. D'après la question (a), on peut trouver des scalaires $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbf{C}$ tels que $E_{a,a} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \Delta^k$, d'où $E_{a,b} = \Sigma^j E_{a,a} = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \Sigma^j \Delta^k$. On a donc montré que toutes les matrices élémentaires appartiennent à $\text{Vect}(\mathcal{F})$. Cela montre que \mathcal{F} engendre $M_n(\mathbf{C})$, puis qu'elle en est une base car elle est constituée de $n^2 = \dim M_n(\mathbf{C})$ éléments.
3. (a) Notons u et v les endomorphismes associés à $\phi(\Delta)$ et $\phi(\Sigma)$ dans la base canonique \mathcal{C} de \mathbf{C}^n . On vérifie facilement que $\Delta^n = \Sigma^n = I_n$ et que $\Delta \Sigma = \omega \Sigma \Delta$.

Ainsi, $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u^n) = \phi(\Delta)^n = \phi(\Delta^n) = \phi(I_n) = I_n$, donc $u^n = \text{id}_{\mathbf{C}^n}$. Exactement pour la même raison, $v^n = \text{id}_{\mathbf{C}^n}$.

De même, $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u \circ v - \omega(v \circ u)) = \phi(\Delta)\phi(\Sigma) - \omega\phi(\Sigma)\phi(\Delta) = \phi(\Delta\Sigma - \omega\Sigma\Delta) = 0$, donc on a également la relation $u \circ v = \omega(v \circ u)$.

D'après la première question de l'exercice, on peut trouver une base \mathcal{B} de \mathbf{C}^n telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \Delta$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) = \Sigma$. En notant P la matrice de passage de \mathcal{C} à \mathcal{B} , on a $\phi(\Delta) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = P\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)P^{-1} = P\Delta P^{-1}$ et, de même, $\phi(\Sigma) = P\Sigma P^{-1}$.

- (b) Comme ϕ et $\psi : M \mapsto PMP^{-1}$ sont des morphismes d'algèbres, la question précédente entraîne $\forall j, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \phi(\Sigma^j \Delta^k) = \psi(\Sigma^j \Delta^k)$. Tous les éléments de la famille \mathcal{F} appartiennent donc au sous-espace vectoriel $\ker(\phi - \psi)$, d'où $\ker(\phi - \psi) \supset \text{Vect}(\mathcal{F}) = M_n(\mathbf{C})$, c'est-à-dire $\phi = \psi$, ce qui conclut.

Exercice 2

Cet exercice proposait le calcul de l'intégrale de Dirichlet (1829) via l'étude d'intégrales à paramètres. Le corrigé utilise les théorèmes de la théorie de Lebesgue mais, les fonctions étant régulières, il était tout à fait possible d'utiliser ceux de la théorie de Riemann.

1. Remarquons que ϕ est lisse par opérations et que $\forall k \in \mathbf{N}, \forall (x, t) \in \mathbf{R}^2, \frac{\partial^k \phi}{\partial x^k}(x, t) = \frac{(-1)^k t^k e^{-xt}}{1+t^2}$.

- (a) Le caractère lisse de ϕ entraîne notamment que $t \mapsto \phi(x, t)$ est mesurable pour tout $x \in \mathbf{R}_+$ et $x \mapsto \phi(x, t)$ est continue pour tout $t \in \mathbf{R}_+$. On a $\forall (x, t) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+, |\phi(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$, et la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur \mathbf{R}_+ . Le théorème de continuité des intégrales à paramètres entraîne que f est définie et continue sur \mathbf{R}_+ .

Par ailleurs, on a la convergence simple $\forall t \in \mathbf{R}_+, \phi(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \mathbf{1}_{\{0\}}(t)$. Grâce à la domination ci-dessus, le théorème de convergence dominée entraîne $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{0\}}(t) dt = 0$.

- (b) Le caractère lisse de ϕ entraîne que $x \mapsto \phi(x, t)$ est de classe C^2 , pour tout $t \in \mathbf{R}$, et que $u_{k,x} : t \mapsto \frac{\partial^k \phi}{\partial x^k}(x, t)$ est mesurable, pour tout $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$. L'intégrabilité de $u_{0,x}$, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, est une conséquence de la domination de la question précédente. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, l'intégrabilité de $u_{1,x} : t \mapsto \frac{-te^{-xt}}{1+t^2}$ provient de la convergence $\frac{te^{-xt}}{1+t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ et de la relation $\frac{te^{-xt}}{1+t^2} = O(t^{-2})$, obtenue par croissances comparées.

Il reste à obtenir l'hypothèse cruciale de domination de la dérivée seconde, que nous allons établir sur tout intervalle de la forme $[x_0, +\infty[$, où $x_0 > 0$ est fixé.

On a alors $\forall (x, t) \in [x_0, +\infty[\times \mathbf{R}_+, \left| \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} \right| \leq e^{-x_0 t}$, et $t \mapsto e^{-x_0 t}$ est intégrable sur \mathbf{R}_+ .

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, la fonction f est de classe C^2 sur \mathbf{R}_+^* , et l'on obtient, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*, f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x, t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt$, d'où $f(x) + f''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$.

2. Remarquons que ψ est lisse et que $\forall k \in \mathbf{N}, \forall (x, t) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^*, \frac{\partial^k \psi}{\partial x^k}(x, t) = (-1)^k (k+1)! \frac{1-\cos(t)}{(x+t)^{k+2}}$.

- (a) Comme à la question précédente, les hypothèses de régularité et la convergence simple $\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \psi(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ ne posent pas de problème. Par ailleurs, on a la domination $\forall (x, t) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+^*, |\psi(x, t)| \leq \frac{1-\cos t}{t^2}$, et la fonction $t \mapsto \frac{1-\cos t}{t^2}$ est intégrable sur \mathbf{R}_+^* (elle tend vers $1/2$ en 0 et est $O(t^{-2})$ en $+\infty$).

Le théorème de continuité des intégrales à paramètres et le théorème de convergence dominée entraînent alors que g est continue sur \mathbf{R}_+ et que $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

- (b) Là encore, les hypothèses de régularité ne posent pas de problème. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t) = -2 \frac{1 - \cos t}{(x+t)^3}$ est intégrable sur \mathbf{R}_+^* car elle converge vers 0 en 0, et est $O(t^{-3})$ en $+\infty$.

Reste la domination de la dérivée seconde, que nous allons établir sur tout intervalle de la forme $[x_0, +\infty[$, où $x_0 \in \mathbf{R}_+^*$ est fixé. On a $\forall (x, t) \in [x_0, +\infty[\times \mathbf{R}_+^*$, $\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{6}{(x_0+t)^4}$, et on obtient l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{6}{(x_0+t)^4}$ comme précédemment.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, g est de classe C^2 sur \mathbf{R}_+^* , et l'on a, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $g''(x) = 6 \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{(x+t)^4} dt$.

En intégrant deux fois par parties (les termes tout intégrés sont bien définis et nuls à chaque fois), on en déduit $g''(x) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(x+t)^3} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^2} dt$.

Ainsi, $g(x) + g''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+t)^2} dt = - \left[\frac{1}{x+t} \right]_{t=0}^{+\infty} = \frac{1}{x}$.

3. (a) Soit $x \in \mathbf{R}_+$. Par intégration par parties, en choisissant $t \mapsto 1 - \cos t$ comme primitive du sinus, on obtient, pour tous $0 < T_- < T_+$, $\int_{T_-}^{T_+} \frac{\sin t}{x+t} dt = \left[\frac{1 - \cos t}{x+t} \right]_{t=T_-}^{T_+} + \int_{T_-}^{T_+} \frac{1 - \cos t}{(x+t)^2} dt$.

Le terme tout intégré tend vers 0 quand $T_- \rightarrow 0$ et $T_+ \rightarrow +\infty$, alors que la fonction $t \mapsto \frac{1 - \cos t}{(x+t)^2}$ est intégrable sur \mathbf{R}_+ (la justification de ces deux affirmations utilise l'équivalent $1 - \cos t \sim \frac{t^2}{2}$ dans le cas $x = 0$). On en déduit que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$ est bien définie et vaut $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{(x+t)^2} dt = g(x)$.

- (b) Avec les notations de l'exercice, il s'agit de calculer $g(0)$. Comme f et g sont toutes les deux solutions de l'équation différentielle linéaire $y'' + y = \frac{1}{x}$ sur l'intervalle \mathbf{R}_+^* , on en déduit que $f - g$ y est solution de l'équation de l'oscillateur harmonique $y'' + y = 0$. Ainsi, on peut trouver $A \in \mathbf{R}_+$ et $\phi \in \mathbf{R}$ tels que $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $f(x) - g(x) = A \cos(x + \phi)$.

Or, les renseignements sur les limites montrent également que $f(x) - g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Comme la fonction $x \mapsto A \cos(x + \phi)$ vaut A pour des valeurs arbitrairement grandes de x , on en déduit $A = 0$, puis $f = g$ sur \mathbf{R}_+^* . Les deux fonctions étant continues en 0, cela entraîne $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = g(0) = f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 3

1. Supposons par l'absurde que la suite u admette une unique valeur d'adhérence ℓ , mais qu'elle ne converge pas vers ℓ .

On peut donc trouver $\varepsilon > 0$ tel que $\forall N \in \mathbf{N}, \exists n \geq N : |u_n - \ell| \geq \varepsilon$. Autrement dit, l'ensemble d'indices $I = \{n \in \mathbf{N} \mid |u_n - \ell| \geq \varepsilon\}$ est infini. On peut ainsi trouver une extractrice ϕ à valeurs dans I , c'est-à-dire telle que $\forall n \in \mathbf{N}, |u_{\phi(n)} - \ell| \geq \varepsilon$.

Comme la suite $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée, le théorème de Bolzano-Weierstrass entraîne l'existence d'une extractrice ψ telle que $(u_{\phi(\psi(n))})_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers une limite ℓ' , qui est donc une valeur d'adhérence de la suite u . Par passage à la limite dans les inégalités larges, on obtient $|\ell' - \ell| \geq \varepsilon$, ce qui entraîne $\ell \neq \ell'$ et fournit la contradiction souhaitée.

2. Puisque V est non vide, on peut trouver $v_0 \in V$. L'hypothèse de stabilité sous $x \mapsto 3x + 2$ entraîne que la suite récurrente v définie par $\forall n \in \mathbf{N}, v_{n+1} = 3v_n + 2$ est à valeurs dans V . Comme V est borné, on en déduit que la suite arithmético-géométrique v est également bornée.

L'unique point fixe de $x \mapsto 3x + 2$ étant -1 , on a $v = (3^n(v_0 + 1) - 1)_{n \in \mathbf{N}}$. Le fait que cette suite soit bornée entraîne $v_0 + 1 = 0$, donc $v_0 = -1$. On a ainsi montré que $V \subset \{-1\}$. Comme V est non vide, on a même $V = \{-1\}$.

3. Considérons l'ensemble V des valeurs d'adhérence de u . Comme u est bornée, elle prend ses valeurs dans un certain segment $[a, b]$. Par passage à la limite dans les inégalités larges, on en déduit que $V \subset [a, b]$, donc V est borné.

Soit $v \in V$. On peut trouver une extractrice $\phi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ telle que $u_{\phi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} v$. D'après l'hypothèse, on en déduit que $u_{\phi(n)^2} - 3u_{\phi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 2$, d'où l'on tire $u_{\phi(n)^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 3v + 2$.

Comme $n \mapsto n^2$ est une application strictement croissante $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$, la fonction ϕ^2 est encore une extractrice, d'où $3v + 2 \in V$. Ainsi, V est stable sous l'application affine $x \mapsto 3x + 2$.

D'après la question précédente, on en déduit $V = \{-1\}$, puis $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -1$ d'après la première question.

Exercice 4

Cet exercice montre qu'une marche aléatoire à pas symétriques et L^2 dans le plan est récurrente, ou plutôt le montrerait si l'on invoquait le lemme de Borel-Cantelli, une fois que l'on sait la série $\sum_n P(S_n = 0)$ divergente.

- On donne à chaque fois les arguments pour X , qui se transfèrent aussitôt à Y .
 - Soit $x \in \mathbf{Z}$. On a, en utilisant la formule des probabilités totales et l'hypothèse de symétrie, $P(X = -x) = \sum_{y \in \mathbf{Z}} P(X = -x, Y = -y) = \sum_{y \in \mathbf{Z}} P(X = x, Y = y) = P(X = x)$.
 - Comme $\forall x \in \mathbf{Z}, |x| \leq x^2$, on a l'inégalité $|X| \leq X^2 \leq X^2 + Y^2$, ce qui montre que X possède une espérance. Par linéarité, $\mathbb{E}(-X) = -\mathbb{E}(X)$ et vaut d'après la formule du transfert $\sum_{x \in \mathbf{Z}} P(X = x) (-x) = \sum_{x' \in \mathbf{Z}} P(X = -x') x' = \sum_{x' \in \mathbf{Z}} P(X = x') x' = \mathbb{E}(X)$, ce qui conclut.
- Pour tout $t \in \mathbf{Z}^2$, notons $\Delta(t) = \{(z_1, \dots, z_n) \in (\mathbf{Z}^2)^n \mid z_1 + \dots + z_n = t\}$. Remarquons d'ores et déjà que $(b_1, \dots, b_n) \mapsto (-b_1, \dots, -b_n)$ induit une bijection $\Delta(t) \rightarrow \Delta(-t)$.

Soit $z \in \mathbf{Z}^2$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(S_n = -z) &= \sum_{(a_1, \dots, a_n) \in \Delta(-z)} P(Z_1 = a_1, \dots, Z_n = a_n) \\ &= \sum_{(a_1, \dots, a_n) \in \Delta(-z)} P(Z_1 = a_1) \cdots P(Z_n = a_n) && \text{(indépendance)} \\ &= \sum_{(b_1, \dots, b_n) \in \Delta(z)} P(Z_1 = -b_1) \cdots P(Z_n = -b_n) \\ &= P(S_n = z). && \text{(même raisonnement)} \end{aligned}$$

- Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(\|S_n\|^2)$ vaut (en calculant dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$) :

$$\mathbb{E} \left(\left(\sum_{k=1}^n X_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^n Y_k \right)^2 \right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k^2 + Y_k^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (\mathbb{E}(X_i X_j) + \mathbb{E}(Y_i Y_j)).$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(X_k, Y_k) \sim (X, Y)$, donc $\mathbb{E}(X_k^2 + Y_k^2) = \mathbb{E}(X^2 + Y^2) = \alpha$.

Par ailleurs, pour tous $i < j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\mathbb{E}(X_i X_j) = \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(X_j) = 0$ par indépendance (X_i et X_j sont déterminées par Z_i et Z_j , qui sont indépendantes).

On en déduit $\mathbb{E}(\|S_n\|^2) = n\alpha$ (et donc que $\|S_n\|^2$ possède une espérance finie).

- D'après l'inégalité de Markov, $P(\|S_n\|^2 \geq 2n\alpha) \leq \frac{\mathbb{E}(\|S_n\|^2)}{2n\alpha} = \frac{1}{2}$.

- Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a

$$P(S_{2n} = 0) = \sum_{z \in \mathbf{Z}^2} P(S_{2n} = 0, S_n = z) = \sum_{z \in \mathbf{Z}^2} P(Z_1 + \dots + Z_n = z, Z_{n+1} + \dots + Z_{2n} = -z).$$

L'indépendance de la famille $(Z_i)_{i=1}^{2n}$ entraîne l'indépendance des sommes $S_n = Z_1 + \dots + Z_n$ et $S'_n = Z_{n+1} + \dots + Z_{2n}$. Par ailleurs, le fait que les variables Z_i soient identiquement

distribuées entraîne que S_n et S'_n ont la même loi, donc la symétrie déjà démontrée de S_n entraîne celle de S'_n . On en déduit

$$P(S_{2n} = 0) = \sum_{z \in \mathbf{Z}^2} P(S_n = z, S'_n = -z) = \sum_{z \in \mathbf{Z}^2} P(S_n = z)P(S'_n = -z) = \sum_{z \in \mathbf{Z}^2} P(S_n = z)^2.$$

(b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} P(\|S_n\|^2 < 2n\alpha)^2 &= \left(\sum_{x \in B_n} P(S_n = x) \right)^2 \leq \sum_{x \in B_n} 1^2 \times \sum_{x \in B_n} P(S_n = x)^2 \\ &\leq |B_n| \sum_{x \in \mathbf{Z}^2} P(S_n = x)^2 = |B_n| P(S_{2n} = 0). \end{aligned}$$

5. (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Un point $(x, y) \in B_n$ vérifie $x^2 < 2n\alpha$ et $y^2 < 2n\alpha$. Comme il y a au plus $2t + 1$ points entiers dans l'intervalle $] -t, t[$, on en déduit la majoration (plutôt grossière) $|B_n| \leq (2\sqrt{2n\alpha} + 1)^2 = 8n\alpha + 4\sqrt{2n\alpha} + 1 \leq 12\alpha n + 3 \leq (12\alpha + 3)n$, en utilisant notamment l'inégalité arithmético-géométrique $\forall x \in \mathbf{R}_+, 2\sqrt{x} \leq 1 + x$. Ainsi, $C = 12\alpha + 3$ convient.
- (b) En combinant les questions précédentes, on a $\forall n \in \mathbf{N}^*, P(S_{2n} = 0) \geq \frac{1 - P(\|S_n\|^2 \leq 2n\alpha)}{|B_n|} \geq \frac{1}{2Cn}$. Cela montre que la série à termes positifs $\sum_{n > 0} P(S_{2n} = 0)$ diverge et, il en va *a fortiori* de même de la série $\sum_n P(S_n = 0)$.

Exercice 5

- Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $I(\llbracket 1, n \rrbracket) \subset \mathfrak{S}(n)$, donc $\frac{t_n}{n!} \leq 1$. On en déduit $R \geq 1$ par comparaison avec la série entière $\sum_n z^n$.
- Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour tout $F \subset \llbracket 1, n+2 \rrbracket$, $I(F)$ s'identifie à l'ensemble des éléments de $I(\llbracket 1, n+2 \rrbracket)$ qui fixent tous les éléments de $\llbracket 1, n+2 \rrbracket \setminus F$. Dans la suite de la question, on fait cette identification. Par ailleurs, en notant $m = |F|$, il est clair que toute bijection $\llbracket 1, m \rrbracket \rightarrow F$ induit une bijection $I(\llbracket 1, m \rrbracket) \rightarrow I(F)$, ce qui montre $|I(F)| = t_m$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n+2 \rrbracket$, on note $A_k = \{\sigma \in I(\llbracket 1, n+2 \rrbracket) \mid \sigma(n+2) = k\}$. Il est clair que l'on a $I(\llbracket 1, n+2 \rrbracket) = \bigsqcup_{k=1}^{n+2} A_k$ et que le cardinal de $A_{n+2} = I(\llbracket 1, n+1 \rrbracket)$ est t_{n+1} . Par ailleurs, pour tout $k \leq n+1$, les éléments de A_k échangent k et $n+2$: l'application $\sigma \mapsto (k \ n+2) \circ \sigma$ induit alors une bijection $A_k \rightarrow I(\llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus \{k\})$, ce qui montre $|A_k| = t_n$. En passant au cardinal, on en déduit $t_{n+2} = \sum_{k=1}^{n+1} t_n + t_{n+1} = (n+1)t_n + t_{n+1}$.
- Soit $z \in \Delta$. On a, d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbf{N}, \frac{t_{n+2}}{(n+1)!} z^{n+1} = \frac{t_n}{n!} z^{n+1} + \frac{t_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1}$. Puisque ce sont les termes de trois séries entières de rayon de convergence $R \geq 1$, on en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_{n+2}}{(n+2)!} (n+2) z^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n}{n!} z^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1},$$

ce qui donne $f'(z) - 1 = z f(z) + (f(z) - 1)$, puis $f'(z) = (1+z)f(z)$.

- En déduire que $\forall z \in \Delta, f(z) = \exp\left(z + \frac{z^2}{2}\right)$, puis $R = +\infty$.

Par composition, la fonction $g : z \mapsto \exp\left(z + \frac{z^2}{2}\right)$ est holomorphe sur \mathbf{C} , donc elle admet un développement en série entière de rayon de convergence $+\infty$. Un calcul direct montre en outre que $\forall z \in \mathbf{C}, g'(z) = (1+z)g(z)$.

Par ailleurs, le problème de Cauchy linéaire $y'(z) = (1+z)y(z)$, $y(0) = 1$ admet une unique solution sur l'intervalle $] -1, 1[$, ce qui montre que f et g coïncident sur $] -1, 1[$.

D'après le principe des zéros isolés, on a donc $f = g$ sur Δ .

Cela montre en particulier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\frac{t_n}{n!} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$: la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n}{n!} z^n$ n'est autre que la série entière développant la fonction g , ce qui montre $R = +\infty$.

5. Soit $\rho \in \mathbf{R}_+^*$ et $n \in \mathbf{N}$. La série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t_k}{k!} z^k$ a un rayon de convergence infini, donc elle converge normalement sur le disque fermé de centre 0 et de rayon ρ . On en déduit que pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$, $g(\rho e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t_k}{k!} (\rho e^{i\theta})^k$ et donc $g(\rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t_k}{k!} \rho^k e^{i(k-n)\theta}$, la convergence étant à chaque fois normale sur le segment $[-\pi, \pi]$. En intégrant sur ce segment, il vient alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\rho e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t_k}{k!} \rho^k \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)\theta} d\theta}_{=\delta_{k,n}} = \frac{t_n}{n!} \rho^n,$$

ce qui est équivalent à la formule demandée.

6. La fonction $t \mapsto t + t^2$ est un homéomorphisme strictement croissant de \mathbf{R}_+ sur lui-même, ce qui montre l'existence et l'unicité de la suite ρ_n , ainsi que la divergence $\rho_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Par ailleurs, en résolvant l'équation du second degré, on obtient $\forall n \in \mathbf{N}, \rho_n = \frac{\sqrt{4n+1}-1}{2}$, à partir de quoi on obtient facilement le développement asymptotique $\rho_n = \sqrt{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

7. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $\rho > 0$. On a, pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, $\operatorname{Re}\left(\rho e^{i\theta} + \frac{\rho^2}{2} e^{i2\theta}\right) \leq \rho + \frac{\rho^2}{2}$, donc

$$\left| \exp\left(\rho e^{i\theta} + \frac{\rho^2}{2} e^{i2\theta}\right) e^{-in\theta} \right| = \exp\left(\operatorname{Re}\left(\rho e^{i\theta} + \frac{\rho^2}{2} e^{i2\theta}\right)\right) \leq \exp\left(\rho + \frac{\rho^2}{2}\right).$$

En appliquant la formule intégrale pour t_n à $\rho_n > 0$, l'estimation précédente et l'inégalité triangulaire, on en déduit $t_n = |t_n| \leq \frac{n!}{\rho_n^n} \exp\left(\rho_n + \frac{\rho_n^2}{2}\right) = M_n$, si bien qu'il reste simplement à obtenir l'équivalent demandé de $(M_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

On a

$$\begin{aligned} \rho_n^n &= \exp(n \ln \rho_n) = \exp\left(n \ln\left(\sqrt{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(n \ln \sqrt{n} + n \ln\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp(n/2 \ln n) \exp\left(n\left(-\frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{8n} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= n^{n/2} \exp\left(-\frac{\sqrt{n}}{2} + o(1)\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^{n/2} e^{-\sqrt{n}/2}. \end{aligned}$$

Un calcul plus facile montre de même $\exp\left(\rho_n + \frac{\rho_n^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{n}{2} + \frac{\rho_n}{2}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \exp\left(\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{1}{4}\right)$.

Combinés à l'équivalent de Stirling, ces deux équivalents donnent le résultat de l'énoncé :

$$M_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{n^{n/2} e^{-\sqrt{n}/2}} \exp\left(\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{1}{4}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^{n/2} \exp\left(-\frac{n}{2} + \sqrt{n} - \frac{1}{4}\right) \sqrt{2\pi n}.$$

Remarque. On a en fait l'équivalent $t_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^{n/2} \exp\left(-\frac{n}{2} + \sqrt{n} - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{\sqrt{2}}$, qui montre que la majoration de l'exercice est plutôt précise. Il s'agit d'une illustration de la *méthode du col*.

2.3.2 Problème d'algèbre : diagonale et spectre

Le sujet abordait sous plusieurs angles les liens entre la diagonale et le spectre d'une matrice ou d'un opérateur. La partie I est consacrée au cadre linéaire, dans lequel le théorème de Mirsky (1957) affirme que la seule contrainte est celle donnée par la trace, qui doit être à la fois la somme des valeurs propres et celle des éléments diagonaux. Le cœur du problème est la deuxième partie, qui étudie le

cadre hermitien (ou symétrique). Dans celui-ci, le théorème de Schur (1923) montre que la diagonale est « dominée » par le spectre (question 8) et le théorème de Horn (1954) montre que c'est la seule contrainte (question 10). La partie III explore à l'aide de ces résultats deux thèmes classiques d'analyse matricielle : le principe du maximum et les inégalités de Ky Fan (1949) et l'inégalité de Fischer (1907). Enfin, la partie IV s'intéresse à des projecteurs orthogonaux en dimension infinie, et démontre un cas particulier du « théorème du charpentier » de Kadison (2002).

Partie I.

1. (a) La multiplication par R est un endomorphisme de $\mathbf{K}[X]$. Composée avec π (qui est même un morphisme d'algèbres), on obtient que $\text{Mul}_R : \mathbf{K}[X] \rightarrow E_P$ est une application linéaire. Clairement, si Q est un multiple de P , il en va de même de RQ . L'idéal (P) , qui est automatiquement un sous- \mathbf{K} -espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$, est donc inclus dans le noyau de Mul_R , ce qui induit donc un endomorphisme $E_P \rightarrow E_P$ par passage au quotient.
- (b) La division euclidienne dans $\mathbf{K}[X]$ montre que (P) et le sous-espace vectoriel $\mathbf{K}_{n-1}[X]$ sont supplémentaires. D'après le théorème du rang, la surjection canonique π , dont le noyau est (P) , induit donc un isomorphisme d'espaces vectoriels $\mathbf{K}_{n-1}[X] \rightarrow E_P$. Via cet isomorphisme, la base canonique $(1, X, \dots, X^{n-1})$ de $\mathbf{K}_{n-1}[X]$ est envoyée sur \mathcal{B} , qui est donc bien une base de E_P .

Quel que soit $j \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, on a simplement $\text{mul}_X(\pi(X^j)) = \pi(X^{j+1})$. Pour la dernière colonne, $\text{mul}_X(\pi(X^{n-1})) = \pi(X^n) = b_0\pi(1) + b_1\pi(X) + \dots + b_{n-1}\pi(X^{n-1})$. Ainsi,

$$C(P) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{mul}_X) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n-1} \end{pmatrix}.$$

- (c) On vérifie sans difficulté que $R \mapsto \text{mul}_R$ est un morphisme d'algèbres, et que mul_R est l'endomorphisme nul dès que R est multiple de P , ce qui montre $(P) \subset \ker \varphi$. Pour l'inclusion réciproque, il suffit de remarquer que, si mul_R est l'endomorphisme nul, alors $\text{mul}_R([1]_P) = \pi(R) = 0$, (où $[1]_P \in E_P$ est la classe du polynôme 1 modulo (P)) ce qui montre que $R \in (P)$.
- (d) Soit $R \in \mathbf{K}[X]$. On a la chaîne d'équivalences

$$R(C(P)) = 0_{M_n(\mathbf{K})} \Leftrightarrow R(\text{mul}_X) = 0_{\mathcal{L}(E_P)} \Leftrightarrow \text{mul}_R = 0_{\mathcal{L}(E_P)} \Leftrightarrow R \in \ker \varphi \Leftrightarrow R \in (P).$$

L'idéal des polynômes annulateurs de $C(P)$ est donc (P) . Comme P est unitaire, on en déduit qu'il s'agit du polynôme minimal de $C(P)$.

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique $\chi_{C(P)}$ est donc un multiple unitaire et de degré n de $\mu_{C(P)} = P$, qui ne peut donc être que P lui-même.

- (e) Rappelons d'abord qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{F}_p[X]$, unitaire, de degré 2, sans racine dans \mathbb{F}_p . En effet, pour tout $\alpha \in \mathbb{F}_p^\times$, le polynôme $X^2 - \alpha$ possède une racine dans \mathbb{F}_p si et seulement si α possède une racine carrée (non nulle) dans \mathbb{F}_p , c'est-à-dire si et seulement si il appartient à l'image du morphisme de groupes $q : \mathbb{F}_p^\times \rightarrow \mathbb{F}_p^\times$ défini par $x \mapsto x^2$. Si p est impair, $\ker q = \{\pm 1\}$ possède deux éléments, donc $\text{im } q$ est un sous-groupe de \mathbb{F}_p^\times de cardinal $\frac{p-1}{2} < p-1$. En particulier, l'ensemble $\mathbb{F}_p^\times \setminus \text{im } q$ est non vide, et il suffit de prendre α dans cet ensemble pour que $X^2 - \alpha$ ne soit pas scindé. Si $p = 2$, le polynôme $X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ n'a ni 0, ni 1 comme racine, donc il n'a pas de racine sur \mathbb{F}_2 .

Dans tous les cas, d'après ce qui précède, la matrice $C(P) \in M_2(\mathbb{F}_p)$ a un polynôme caractéristique non scindé, et on en déduit qu'elle n'est pas trigonalisable dans \mathbb{F}_p .

2. Le sens direct est automatique. Supposons donc que tout vecteur non nul de \mathbf{K}^n est un vecteur propre de A . En appliquant cette propriété aux vecteurs e_1, \dots, e_n de la base canonique, on trouve $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{K}$ tels que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, Ae_i = \lambda_i e_i$. On a donc $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Comme $e_1 + \dots + e_n$ doit être vecteur propre de A , on a également une valeur propre $\lambda_0 \in \mathbf{K}$ telle que $\lambda_0 e_1 + \dots + \lambda_0 e_n = A(e_1 + \dots + e_n) = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$. Par liberté de la base canonique, on en déduit $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n$, donc $A = \lambda_0 I_n$, ce qui conclut.

3. (a) Si D n'est pas scalaire, il suffit de prendre $L = 0$, donc on suppose dans la suite D scalaire. L'application $L \mapsto LC$ est une forme linéaire dont le domaine est de dimension $n \geq 2$, donc son noyau est non trivial : on peut trouver $L \neq 0$ tel que $LC = 0$. Comme C et L sont non nulles, la matrice CL est de rang exactement 1, donc elle ne peut pas être scalaire (les matrices scalaires sont de rang 0 ou $n \geq 2$). On en déduit que $D + CL \notin \text{Vect}(I_n)$.

- (b) La matrice $\tilde{A} = A - aI_{n+1}$ n'est pas scalaire. D'après la question 2, on peut donc trouver un vecteur $v_1 \in \mathbf{K}^{n+1}$ non nul qui ne soit pas un vecteur propre de \tilde{A} .

La famille $(v_1, \tilde{A}v_1)$ est donc libre, et on peut la compléter en une base de \mathbf{K}^{n+1} .

Après avoir effectué le changement de bases depuis la base canonique vers cette nouvelle

base, on obtient des matrices $B \in M_{1,n}(\mathbf{K})$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbf{K})$ et $\tilde{D} \in M_n(\mathbf{K})$ telles

que \tilde{A} soit semblable à $\tilde{A}' = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline C & \tilde{D} \end{array} \right)$. On en déduit que $A = \tilde{A} + aI_{n+1}$ est semblable à

$A' = \tilde{A}' + aI_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} a & B \\ \hline C & \tilde{D} + aI_n \end{array} \right)$, ce qui répond à la première partie de la question.

Supposons maintenant $n \geq 2$. On vient de trouver $B \in M_{1,n}(\mathbf{K})$, $C \in M_{n,1}(\mathbf{K})$ **non nul** et $D \in M_n(\mathbf{K})$ tels que A soit semblable à $A' = \left(\begin{array}{c|c} a & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$. D'après la question précédente, on peut trouver $L \in M_{1,n}(\mathbf{K})$ tel que $LC = 0$ et $D + CL \notin \text{Vect}(I_n)$.

La matrice par blocs $P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & L \\ \hline 0 & I_n \end{array} \right)$ est alors inversible et on obtient après calcul que A est

semblable à $P^{-1}A'P = \left(\begin{array}{c|c} a & (*) \\ \hline C & D + CL \end{array} \right)$, qui est bien de la forme voulue.

4. (a) L'inclusion directe est claire, la trace étant un invariant de similitude.

On va montrer l'inclusion réciproque par récurrence. Pour tout $n \geq 1$, on note $P(n)$ l'assertion « quels que soient $A \in M_n(\mathbf{K})$ non scalaire et $\alpha \in \mathbf{K}^n$ tels que $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \text{tr } A$, on peut trouver une matrice A' semblable à A , de diagonale $\Delta(A') = \alpha$. » Montrons $\forall n \geq 1, P(n)$ par récurrence.

Initialisations. Le cas $n = 1$ est tautologique, car il n'existe pas de matrice non scalaire

dans $M_1(\mathbf{K})$. Traitons le cas $n = 2$. Soit $A \in M_2(\mathbf{K})$ et $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^2$ tels que

$\alpha_1 + \alpha_2 = \text{tr } A$. D'après la question précédente, on peut trouver $b, c, d \in \mathbf{K}$ tels que

A soit semblable à $\begin{pmatrix} \alpha_1 & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Comme la trace est un invariant de similitude, on a

$\alpha_1 + d = \text{tr } A$, donc $d = \alpha_2$, ce qui conclut la démonstration de $P(2)$.

Hérédité. Soit $n \geq 2$ tel que $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.

D'après la question précédente, on peut trouver $B \in M_{1,n}(\mathbf{K})$, $C \in M_{n,1}(\mathbf{K})$, $D \in M_n(\mathbf{K})$ non scalaire telle que A soit semblable à $A' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & B \\ C & D \end{pmatrix}$. On a $\text{tr } A' = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n+1}$, donc $\text{tr } D = \alpha_2 + \dots + \alpha_{n+1}$. Notons $\beta = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbf{K}^n$. D'après $P(n)$, on peut donc trouver $D' \in M_n(\mathbf{K})$ telle que $\Delta(D') = \beta$. On peut donc trouver une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que $P^{-1}DP = D'$. La matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ est inversible et A est semblable à $Q^{-1}A'Q = \begin{pmatrix} \alpha_1 & (*) \\ (*) & D' \end{pmatrix}$, de diagonale $\Delta(Q^{-1}A'Q) = \alpha$. Cela montre $P(n+1)$ et clôt la récurrence.

- (b) Notons $P = \prod_{i=1}^n (X - \beta_i)$. L'inclusion directe est claire, car toute matrice de polynôme caractéristique P aura pour trace $\sum_{i=1}^n \beta_i$. L'inclusion réciproque est par ailleurs tautologique dans le cas $n = 1$, donc on peut supposer $n \geq 2$.

Soit maintenant $\alpha \in \mathbf{K}^n$ tel que $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \dots + \beta_n$. D'après la question 1(d), la matrice $C(P)$ a pour polynôme caractéristique P , et la question 1(b) montre que $C(P)$ n'est pas une matrice scalaire (car $n \geq 2$). En appliquant la question précédente à $C(P)$, on obtient l'existence de $M \in \mathcal{O}(C(P))$ telle que $\Delta(M) = \alpha$. Comme le polynôme caractéristique est un invariant de similitude, on a $\chi_M = P$, donc $M \in M_n(\mathbf{K})[\beta]$, ce qui conclut.

Partie II.

5. Si $n = 1$, \leq est la relation d'égalité, qui est tautologiquement une relation d'ordre sur \mathbf{R}^1 . En revanche, si $n \geq 2$, la relation \leq n'est pas antisymétrique. Par exemple, en notant $(e_i)_{i=1}^n$ la base canonique de \mathbf{R}^n , on a $e_1 \leq e_2$ et $e_2 \leq e_1$, mais $e_1 \neq e_2$.
6. (a) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^n [A]_{i,j} = \sum_{i=1}^k \left(\underbrace{\sum_{j=1}^n [A]_{i,j}}_{=1} - \sum_{j=1}^k [A]_{i,j} \right) = k - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k [A]_{i,j}$$

et

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=k+1}^n [A]_{i,j} = \sum_{j=1}^k \left(\underbrace{\sum_{i=1}^n [A]_{i,j}}_{=1} - \sum_{i=1}^k [A]_{i,j} \right) = k - \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k [A]_{i,j}.$$

- (b) Soit $\alpha \in \mathbf{R}^n$. On note $\alpha = A\beta$. Montrons que $\alpha \leq \beta$.

Commençons par supposer que α et β sont des n -uplets décroissants. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \beta_j - \sum_{i=1}^k \alpha_i &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n [A]_{i,j} \beta_j - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n [A]_{i,j} \beta_j \\ &= \sum_{\substack{i,j \leq k}} [A]_{i,j} \beta_j + \sum_{\substack{i > k \\ j \leq k}} [A]_{i,j} \beta_j - \sum_{\substack{i,j \leq k}} [A]_{i,j} \beta_j - \sum_{\substack{i \leq k \\ j > k}} [A]_{i,j} \beta_j \\ &= \sum_{\substack{i > k \\ j \leq k}} [A]_{i,j} (\beta_j - \beta_k) + \sum_{\substack{i \leq k \\ j > k}} [A]_{i,j} (\beta_k - \beta_j). \end{aligned}$$

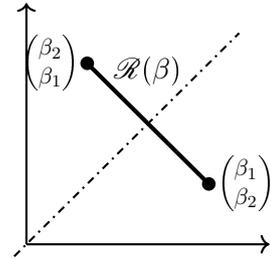
La décroissance de β rend tous les termes positifs, donc $\sum_{i=1}^k \alpha_i \leq \sum_{j=1}^k \beta_j$. Par ailleurs, si $k = n$, les deux sommes sont vides, donc $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{j=1}^n \beta_j$.

Traisons maintenant le cas général. On peut trouver deux permutations $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}(n)$ telles que $\tilde{\alpha} = P_\sigma \alpha$ et $\tilde{\beta} = P_\tau \beta$, où l'on note $P_\rho \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$ la matrice de permutation associée à un élément $\rho \in \mathfrak{S}(n)$. On en déduit que $\tilde{\alpha} = P_\sigma^{-1} A P_\tau \beta$. Or, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a $[P_\sigma^{-1} A P_\tau]_{i,j} = [A]_{\sigma(i), \tau(j)}$. Ainsi, la matrice $A' = P_\sigma^{-1} A P_\tau$ a bien tous ses coefficients positifs et, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\sum_{i=1}^n [A']_{i,k} = \sum_{i=1}^n A_{\sigma(i), \tau(k)} = \sum_{i=1}^n A_{i, \tau(k)} = 1$ et on a de même la condition sur les sommes colonne par colonne. Cela montre donc que A' est bistochastique, et le premier point de la démonstration montre $\alpha \leq \beta$.

7. Le spectre de toute matrice hermitienne est réel, donc $\text{Her}_n[\beta] = \emptyset$.
8. D'après le théorème spectral, on peut trouver $\tilde{\beta} \in \mathbf{R}^n$ et $U \in \text{U}(n)$ tels que $H = U^* \text{diag}(\tilde{\beta}) U$. En particulier, H et $\text{diag}(\tilde{\beta})$ sont semblables, ce qui montre $\chi_H = \prod_{i=1}^n (X - \tilde{\beta}_i) = \prod_{i=1}^n (X - \beta_i)$: $\tilde{\beta}$ est simplement un réarrangement de β . Quitte à multiplier U par une matrice de permutation (ce qui ne change pas son caractère unitaire), on peut donc supposer $\beta = \tilde{\beta}$, ce que l'on fera désormais. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a alors $[H]_{i,i} = \sum_{k=1}^n \bar{u}_{k,i} \beta_k u_{k,i} = \sum_{k=1}^n |u_{k,i}|^2 \beta_k$, ce qui montre que $\Delta(H) = \left(|u_{k,i}|^2 \right)_{1 \leq k, i \leq n} \beta$. Comme $U = (u_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est unitaire, on a en particulier $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^n |u_{i,k}|^2 = \sum_{j=1}^n |u_{k,j}|^2 = 1$: la matrice $\left(|u_{k,i}|^2 \right)_{1 \leq k, i \leq n}$ est bistochastique. La question 6(b) entraîne alors $\Delta(H) \leq \beta$.

9. (a) Soit $\alpha \in \mathbf{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} \alpha \in \mathcal{R}(\beta) &\Leftrightarrow \begin{cases} \max(\alpha_1, \alpha_2) \leq \beta_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \delta \in \mathbf{R} : \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 - \delta \text{ et } \beta_1 - \delta \leq \beta_1 \\ \alpha_2 = \beta_2 + \delta \text{ et } \beta_2 + \delta \leq \beta_1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \delta \in [0, \beta_1 - \beta_2] : \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 - \delta \\ \alpha_2 = \beta_2 + \delta. \end{cases} \end{aligned}$$



- (b) Les inclusions directes sont claires : la première est tautologique et la seconde est une conséquence directe de la question 8. Les ensembles $\text{Sym}_2[\beta]$, $\text{Her}_2[\beta]$ et $\mathcal{R}(\beta)$ ne dépendent que de $\tilde{\beta}$, on peut supposer β décroissant, ce que l'on fera. Reste à montrer $\mathcal{R}(\beta) \subset \{\Delta(S) \mid S \in \text{Sym}_2[\beta]\}$. Soit $\alpha \in \mathcal{R}(\beta)$.

D'après la question précédente, on peut trouver $\delta \in [0, \beta_1 - \beta_2]$ tel que $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 - \delta \\ \beta_2 + \delta \end{pmatrix}$.

On peut trouver $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $\delta = (\beta_1 - \beta_2) \sin^2(\theta)$. En notant R_θ la matrice de rotation $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \text{O}(2)$, on a $R_\theta^{-1} \text{diag}(\beta) R_\theta \in \text{Sym}_2[\beta]$ et

$$R_\theta^{-1} \text{diag}(\beta) R_\theta = \begin{pmatrix} \beta_1 \cos^2(\theta) + \beta_2 \sin^2(\theta) & * \\ * & \beta_1 \sin^2(\theta) + \beta_2 \cos^2(\theta) \end{pmatrix},$$

donc $\Delta(R_\theta^{-1} \text{diag}(\beta) R_\theta) = \begin{pmatrix} \beta_1 - (\beta_1 - \beta_2) \sin^2(\theta) \\ \beta_2 + (\beta_1 - \beta_2) \sin^2(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 - \delta \\ \beta_2 + \delta \end{pmatrix} = \alpha$, ce qui conclut.

10. (a) Comme $\alpha \leq \beta$, on a $\delta \geq 0$. Cela entraîne notamment que $\gamma \in \mathbf{R}^n$ est décroissant. On a alors $\sum_{i=1}^n \gamma_i = \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i = \sum_{i=1}^n \beta_i$ et, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a $\sum_{i=1}^k \gamma_i = \delta + \sum_{i=1}^k \tilde{\alpha}_i$. La définition de δ entraîne directement que $\min \left\{ \sum_{i=1}^k (\beta_i - \gamma_i) \mid k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \right\} = 0$. On a donc $\gamma \leq \beta$ et on peut trouver $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\sum_{i=1}^k \gamma_i = \sum_{i=1}^k \beta_i$.

On pose alors $\gamma' = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^k$ et $\gamma'' = \begin{pmatrix} \gamma_{k+1} \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n-k}$, et on définit de même $\beta' \in \mathbf{R}^k$

et $\beta'' \in \mathbf{R}^{n-k}$. La définition de k montre que $\gamma' \leq \beta'$ et $\gamma'' \leq \beta''$. Comme $k, n-k < n$, les hypothèses $\mathcal{H}(k)$ et $\mathcal{H}(n-k)$ garantissent l'existence de $S' \in \text{Sym}_k[\gamma']$ et $S'' \in \text{Sym}_{n-k}[\gamma'']$.

La matrice par blocs $\tilde{S} = \begin{pmatrix} S' & 0 \\ 0 & S'' \end{pmatrix}$ est alors symétrique et vérifie $\chi_{\tilde{S}} = \chi_{S'}\chi_{S''}$, donc $\tilde{S} \in \text{Sym}_n[\beta]$. Sa construction rend claire que $[\tilde{S}]_{1,n} = 0$. Comme $\Delta(S') = \gamma'$ et $\Delta(S'') = \gamma''$, on a $\Delta(\tilde{S}) = \gamma$.

(b) Pour $\theta \in \mathbf{R}$, on définit une matrice $P_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \cdots & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cdots & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \in \text{O}(n)$. La matrice

$S_\theta = P_\theta^{-1}\tilde{S}P_\theta$ est symétrique, de même polynôme caractéristique que \tilde{S} , donc elle appartient à $\text{Sym}_n[\beta]$.

On vérifie que $\forall i \in [1, n], [S_\theta]_{i,i} = \begin{cases} \check{\alpha}_1 + f(\theta) & \text{si } i = 1 \\ \check{\alpha}_i & \text{si } 2 \leq i \leq n-1 \text{ (en utilisant le fait que} \\ \check{\alpha}_n - f(\theta) & \text{si } i = n \end{cases}$

$[\tilde{S}]_{1,n} = [\tilde{S}]_{n,1} = 0$), où $f : \theta \mapsto \delta \cos(2\theta) - \sin^2(\theta)(\check{\alpha}_1 - \check{\alpha}_n)$. Cette fonction est continue, vérifie $f(0) = \delta \geq 0$ et $f(\frac{\pi}{2}) = -\delta - (\check{\alpha}_1 - \check{\alpha}_n) \leq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on peut trouver $\theta_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(\theta_0) = 0$. Si l'on pose $S = S_{\theta_0} \in \text{Sym}_n[\beta]$, on a donc $\Delta(S) = \check{\alpha}$. En conjuguant S par une matrice de permutation (ce qui ne change pas son polynôme caractéristique, et donc son appartenance à $\text{Sym}_n[\beta]$), on peut permuter les coefficients diagonaux, et on obtient $\Delta(S) = \alpha$. On a donc montré $\alpha \in \{\Delta(S) \mid S \in \text{Sym}_n[\beta]\}$, c'est-à-dire $\mathcal{R}(\beta) \subset \{\Delta(S) \mid S \in \text{Sym}_n[\beta]\}$.

L'inclusion $\{\Delta(S) \mid S \in \text{Sym}_n[\beta]\} \subset \{\Delta(H) \mid H \in \text{Her}_n[\beta]\}$ est une conséquence directe de l'inclusion $\text{Sym}_n \subset \text{Her}_n$, et la dernière inclusion a été démontrée à la question 8.

Cela montre $\mathcal{H}(n)$ et clôt la récurrence.

11. (a) L'inclusion réciproque ayant été montrée à la question 6(b) il ne reste qu'à montrer l'inclusion directe. Soit $\alpha \in \mathcal{R}(\beta)$. D'après la question 10, on peut trouver $S \in \text{Sym}_n[\beta]$ telle que $\Delta(S) = \alpha$. D'après la démonstration de la question 8, on peut alors trouver une matrice bistochastique $A \in \Sigma_n$ telle que $\alpha = A\beta$, ce qui conclut.
- (b) L'ensemble Σ_n est défini par des égalités et inégalités linéaires. Il s'agit donc d'un ensemble fermé et convexe. Par ailleurs, Σ_n est borné, donc il est compact. L'ensemble $\mathcal{R}(y)$ est alors l'image du convexe compact Σ_n par l'application linéaire et continue $\begin{cases} \Sigma_n \rightarrow \mathbf{R}^n \\ A \mapsto Ay, \end{cases}$ donc $\mathcal{R}(y)$ est convexe et compact.
- (c) i. Soit $\alpha, \beta \in I^n$ tels que $\alpha \leq \beta$. D'après la question (a), on peut trouver $A \in \Sigma_n$ tel que $\alpha = A\beta$. On a alors, par convexité,

$$\sum_{i=1}^n f(\alpha_i) = \sum_{i=1}^n f\left(\sum_{j=1}^n [A]_{i,j}\beta_j\right) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [A]_{i,j}f(\beta_j) \leq \sum_{j=1}^n f(\beta_j) \underbrace{\sum_{i=1}^n [A]_{i,j}}_{=1} \leq \sum_{j=1}^n f(\beta_j).$$

- ii. Soit $\alpha, \beta \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ tels que $\alpha \leq \beta$. La fonction $t \mapsto -\ln t$ est convexe sur \mathbf{R}_+^* (elle est deux fois dérivable, et $f'' : t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est positive). D'après la question précédente, on a donc $-\sum_{i=1}^n \ln(\alpha_i) \leq -\sum_{i=1}^n \ln(\beta_i)$ donc $\ln \prod_{i=1}^n \alpha_i \geq \ln \prod_{i=1}^n \beta_i$, et la croissance de l'exponentielle conclut.

Partie III.

12. Notons $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbf{C}^n . Soit $k \in [1, n]$.

Commençons par montrer la première égalité. D'après le théorème spectral, on peut trouver une base orthonormée (w_1, \dots, w_n) de vecteurs propres. Quitte à renuméroter les vecteurs, on peut supposer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, w_i est vecteur propre pour la valeur propre $\lambda_i(H)$. On a donc déjà $\sum_{i=1}^k \langle w_i | H w_i \rangle = \sum_{i=1}^k \langle w_i | \lambda_i(H) w_i \rangle = \sum_{i=1}^k \lambda_i(H) \underbrace{\langle w_i | w_i \rangle}_{=1} = \sum_{i=1}^k \lambda_i(H)$. Récipro-

quement, soit (v_1, \dots, v_k) une famille orthonormée. En la concaténant avec une base orthonormée de $\text{Vect}(v_1, \dots, v_k)^\perp$, on la complète en une base orthonormée $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{C}^n$. Notons P la matrice de passage (unitaire) de \mathcal{C} vers \mathcal{B} et $H' = P^{-1}HP = P^*HP$ la matrice (hermitienne) de H dans la base \mathcal{B} . On a alors $\sum_{i=1}^k \langle v_i | H v_i \rangle = \sum_{i=1}^k [H']_{i,i} \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i(H') \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i(H)$, l'avant dernière inégalité utilisant la question 8.

La deuxième inégalité est une conséquence directe de la première, en notant que les matrices $U \in M_{n,k}(\mathbf{C})$ telles que $U^*U = I_k$ sont exactement les matrices dont les colonnes forment une

famille orthonormée de k vecteurs et que, pour une telle matrice $U = \left(\begin{array}{c|ccc} v_1 & & & \\ \hline & \cdots & & \\ & & & v_k \end{array} \right)$, on a

$$\text{tr}(U^*HU) = \sum_{i=1}^k \langle e_i | U^*HU e_i \rangle = \sum_{i=1}^k \langle U e_i | H U e_i \rangle = \sum_{i=1}^k \langle v_i | H v_i \rangle.$$

13. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $H_1, H_2 \in \text{Her}_n$. Soit, d'après la question précédente, $U \in M_{n,k}(\mathbf{C})$ telle que $U^*U = I_k$ et $\text{tr}(U^*(H_1 + H_2)U) = \sum_{i=1}^k \lambda_i(H_1 + H_2)$. On a alors

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i(H_1 + H_2) = \text{tr}(U^*(H_1 + H_2)U) = \text{tr}(U^*H_1U) + \text{tr}(U^*H_2U) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i(H_1) + \sum_{i=1}^k \lambda_i(H_2).$$

14. Notons $\|\cdot\|_{\text{op}}$ la norme d'opérateur sur $M_n(\mathbf{C})$ associée à la norme hermitienne $\|\cdot\|$. Si $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et que v est un vecteur propre associé à $\lambda_i(H)$, on en déduit $|\lambda_i(H)| \|v\| = \|Hv\| \leq \|H\|_{\text{op}} \|v\|$, donc $|\lambda_i(H)| \leq \|H\|_{\text{op}}$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Notons $\Lambda_{\leq k} = \sum_{i=1}^k \lambda_i : \text{Her}_n \rightarrow \mathbf{R}$. D'après la remarque précédente, on a $\forall H \in \text{Her}_n, |\Lambda_{\leq k}(H)| \leq k \|H\|_{\text{op}}$. Soit maintenant $H_1, H_2 \in \text{Her}_n$. D'après la question précédente, $\Lambda_{\leq k}(H_2) = \Lambda_{\leq k}(H_1 + (H_2 - H_1)) \leq \Lambda_{\leq k}(H_1) + \Lambda_{\leq k}(H_2 - H_1) \leq \Lambda_{\leq k}(H_1) + k \|H_2 - H_1\|_{\text{op}}$. Par symétrie, $\Lambda_{\leq k}(H_1) \leq \Lambda_{\leq k}(H_2) + k \|H_1 - H_2\|_{\text{op}} = \Lambda_{\leq k}(H_2) + k \|H_2 - H_1\|_{\text{op}}$ donc on a $\Lambda_{\leq k}(H_2) \geq \Lambda_{\leq k}(H_1) - k \|H_2 - H_1\|_{\text{op}}$.

On en déduit $|\Lambda_{\leq k}(H_2) - \Lambda_{\leq k}(H_1)| \leq k \|H_2 - H_1\|_{\text{op}}$ et la fonction $\Lambda_{\leq k}$ est k -lipschitzienne (si l'on munit par exemple \mathbf{R}^n de la norme uniforme), donc continue.

L'application $\Lambda : \begin{cases} \text{Her}_n \rightarrow & \mathbf{R}^n \\ H \mapsto & (\lambda_1(H), \lambda_1(H) + \lambda_2(H), \dots, \sum_{i=1}^n \lambda_i(H)) \end{cases}$ est donc continue. Comme $\sigma = u \circ \Lambda$, où u est un isomorphisme linéaire, on en déduit que σ est continue.

15. (a) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On réutilise la notation $\Lambda_{\leq k} = \sum_{i=1}^k \lambda_i$.

Considérons la matrice diagonale par blocs $U = \left(\begin{array}{c|ccc} I_{n_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & I_{n_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & -I_{n_r} \end{array} \right)$.

Elle vérifie $U^* = U^{-1} = U$ et est donc unitaire. On a alors

$$U^*HU = \left(\begin{array}{c|ccc} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & -A_{1,r} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & -A_{2,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline -A_{r,1} & -A_{r,2} & \cdots & A_{r,r} \end{array} \right) \text{ donc } \frac{H + U^*HU}{2} = \left(\begin{array}{c|ccc} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & 0 \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & \cdots & A_{r,r} \end{array} \right).$$

On a alors, en utilisant notamment la question 12,

$$\Lambda_{\leq k} \left(\frac{H + U^* H U}{2} \right) = \frac{\Lambda_{\leq k}(H + U^* H U)}{2} \leq \frac{\Lambda_{\leq k}(H) + \Lambda_{\leq k}(U^* H U)}{2} \leq \Lambda_{\leq k}(H).$$

En outre, $\Lambda_n \left(\frac{H + U^* H U}{2} \right) = \text{tr} \left(\frac{H + U^* H U}{2} \right) = \text{tr} H = \Lambda_n(H)$. Ainsi, $\sigma \left(\frac{H + U^* H U}{2} \right) \leq \sigma(H)$.

En répétant cette opération en remplaçant U par les matrices diagonales par blocs successives $\text{diag}(I_{n_1}, \dots, -I_{n_{r-1}}, I_n), \dots, \text{diag}(-I_{n_1}, \dots, I_{n_{r-1}}, I_n)$, on obtient la domination $\sigma(H^\#) \leq \sigma(H)$.

La domination $\Delta(H) \leq \sigma(H^\#)$ est une conséquence de la question 8, car $\Delta(H) = \Delta(H^\#)$.

- (b) Les déterminants $\det H^\#$ et $\det H$ sont les produits des coordonnées de $\sigma(H^\#)$ et $\sigma(H)$, respectivement. Puisque H est définie positive, $\sigma(H) \in (\mathbf{R}_+^*)^N$. En outre, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $[H]_{k,k} = \langle e_k | H e_k \rangle > 0$, donc $\Delta(H) \in (\mathbf{R}_+^*)^N$. De même, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $A_{i,i}$ est la matrice de la forme hermitienne $(v, w) \mapsto \langle v | H w \rangle$ restreinte au sous-espace de \mathbf{C}^n correspondant au i -ème bloc. En particulier, cette forme hermitienne restreinte est définie positive, donc le spectre de $A_{i,i}$ est inclus dans \mathbf{R}_+^* . Il en va alors de même de $\text{Sp}(H^\#) = \bigcup_{i=1}^r \text{Sp}(A_i)$, donc $\sigma(H^\#) \in (\mathbf{R}_+^*)^N$.

On conclut alors en appliquant la question 11(c) aux dominations de la question précédente.

Partie IV.

16. Soit $i \in \mathbf{N}^*$. On a $\langle p_V(e_i) | e_i \rangle = \langle p_V(e_i) | p_V(e_i) \rangle = \|p_V(e_i)\|^2 \in [0, 1]$, car p_V est 1-lipschitzien et e_i de norme 1. Montrons maintenant que V est de dimension finie si et seulement si $\Delta(p_V)$ est sommable.

Supposons V de dimension finie $d = \dim V$ et considérons une base orthonormée (v_1, \dots, v_k) de V . On a alors $\forall x \in E, p_V(x) = \sum_{k=1}^d \langle x | v_k \rangle v_k$. Pour tout $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$, la famille $(\langle e_i | v_k \rangle^2)_{i \in \mathbf{N}^*}$ est sommable, d'après le théorème de Parseval, de somme $\sum_{i \in \mathbf{N}^*} \langle e_i | v_k \rangle^2 = \|v_k\|^2 = 1$. On en déduit que $(\langle e_i | v_k \rangle^2)_{(i,k) \in \mathbf{N}^* \times \llbracket 1, d \rrbracket}$ est sommable, de somme $\sum_{k=1}^d \|v_k\|^2 = d$. On a alors

$$\sum_{i \in \mathbf{N}^*} \langle e_i | p_V(e_i) \rangle = \sum_{i \in \mathbf{N}^*} \left\langle e_i \left| \sum_{k=1}^d \langle e_i | v_k \rangle v_k \right. \right\rangle = \sum_{i \in \mathbf{N}^*} \sum_{k=1}^d \underbrace{\langle e_i | \langle e_i | v_k \rangle v_k \rangle}_{=\langle e_i | v_k \rangle^2} = d.$$

Réciproquement, supposons que V est de dimension infinie. On peut alors trouver une famille orthonormée infinie $(v_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ de V . Soit $k \in \mathbf{N}^*$. On note $V_k = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$, et W_k l'orthogonal de V_k dans V . On a alors $p = p_{V_k} + p_{W_k}$. On en déduit (par positivité de la suite $\Delta(p_{W_k})$) que $\Delta(p_V) = \Delta(p_{V_k}) + \Delta(p_{W_k}) \geq \Delta(p_{V_k})$. Ainsi, si $\Delta(p_V)$ était sommable, sa somme serait supérieure à la somme de $\Delta(p_{V_k})$ (c'est-à-dire k), et ce pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, ce qui est absurde. On en déduit que $\Delta(p_V)$ n'est pas sommable si V est de dimension infinie.

17. (a) Supposons $d = 1$. La suite $v = (\sqrt{s_1}, \sqrt{s_2}, \sqrt{s_3}, \dots) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{s_n} e_n$ est de carré sommable, donc $v \in E$. Remarquons que, par construction, $\|v\| = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n = 1$.

L'application $p : x \mapsto \langle x | v \rangle v$ est le projecteur orthogonal sur $V = \text{Vect}(v)$, qui est de dimension 1 et, pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, $\langle e_i | p(e_i) \rangle = \langle e_i | \langle e_i | v \rangle v \rangle = \langle e_i | v \rangle^2 = s_i$.

- (b) Supposons que s est à support fini. On peut donc trouver $N \in \mathbf{N}$ tel que $\forall n > N, s_n = 0$.

On applique alors la question 10(b) aux N -uplets

$$(s_1, s_2, \dots, s_{d-1}, s_d, \dots, s_N) \leq \underbrace{(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0)}_{d \text{ termes}}.$$

On trouve ainsi $S \in \text{Sym}_N$ de diagonale (s_1, \dots, s_N) et de spectre inclus dans $\{0, 1\}$ (avec 1 de multiplicité d et 0 de multiplicité $N - d$). Comme S est symétrique, elle est diagonalisable

en base orthonormée, donc la condition sur le spectre montre que S est la matrice dans (e_1, \dots, e_N) d'un projecteur orthogonal (sur un sous-espace vectoriel V de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_N)$, de dimension $\text{tr } S = d$). On peut alors voir V comme un sous-espace vectoriel de dimension d de E , et le projecteur orthogonal p_V comme un élément de $\mathcal{L}(E)$. Celui-ci vérifie

$$\forall i \in \mathbf{N}^*, \langle e_i | p_V(e_i) \rangle = \begin{cases} [S]_{i,i} = s_i & \text{si } i \leq N \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

c'est-à-dire $\Delta(p_V) = s$.

- (c) Montrer le résultat dans le cas où la suite s décroît et $s_1 \in]0, 1[$, puis dans le cas général.
- Supposons que la suite s décroisse et que $s_1 \in]0, 1[$ (ce qui entraîne $d \geq 1$). La suite $\left(\sum_{i=2}^k s_i\right)_{k \geq 2}$ croît et converge vers $d - s_1 > d - 1$. On peut donc trouver $k \geq 2$ tel que $\sum_{i=2}^{k-1} s_i < d - 1$ et $\sum_{i=2}^k s_i \geq d - 1$. Notons $\delta = \sum_{i=2}^k s_i - (d - 1)$ (par définition de k , on a $\delta \leq s_k$), et posons $s' = (s_1 + \delta, s_2, s_3, \dots, s_{k-1}, s_k - \delta, s_{k+1}, \dots)$. Comme $\delta = \sum_{i=2}^k s_i - (d - 1) = 1 - (s_1 + \sum_{i=k+1}^{+\infty} s_i) \leq 1 - s_1$, on a $s_1 + \delta \in]0, 1[$. On peut répéter le raisonnement de (a) : le vecteur $v = \sqrt{s_1 + \delta}e_1 + \sum_{i=k+1}^{+\infty} \sqrt{s_i}e_i$ est de norme 1, et le projecteur $p = p_{\text{Vect}(v)}$ vérifie

$$\forall i \in \mathbf{N}^*, \langle e_i | p(e_i) \rangle = \langle e_i | v \rangle^2 = \begin{cases} s_1 + \delta & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } 2 \leq i \leq k \\ s_i & \text{si } i > k. \end{cases}$$

D'après la question (b), on peut également trouver un sous-espace vectoriel V de $\text{Vect}(e_2, \dots, e_k)$ de dimension $d - 1$ tel que le projecteur orthogonal p_V vérifie

$$\forall i \in \mathbf{N}^*, \langle e_i | p_V(e_i) \rangle = \begin{cases} s_i & \text{si } i \in \llbracket 2, k-1 \rrbracket \\ s_k - \delta & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque que le vecteur v est orthogonal à V , donc $\pi = p + p_V$ est le projecteur orthogonal sur le sous-espace $\text{Vect}(v) \oplus V$. Par construction, on a

$$\Delta(\pi) = s' = (s_1 + \delta, s_2, \dots, s_{k-1}, s_k - \delta, s_{k+1}, \dots).$$

On va alors copier le raisonnement de la question 10(b). Pour tout $\theta \in \mathbf{R}$, on définit une isométrie u_θ par son image sur la base hilbertienne $(e_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$:

$$\begin{cases} u_\theta(e_1) = \cos(\theta) e_1 + \sin(\theta) e_k \\ u_\theta(e_k) = -\sin(\theta) e_1 + \cos(\theta) e_k \end{cases} \quad \text{et } \forall i \in \mathbf{N}^* \setminus \{1, k\}, u_\theta(e_i) = e_i.$$

On définit alors $\pi_\theta = u_\theta^{-1} \circ \pi \circ u_\theta$.

— Pour tout $i \in \mathbf{N}^* \setminus \{1, k\}$, on a $\langle e_i | \pi_\theta(e_i) \rangle = \langle u_\theta(e_i) | \pi(u_\theta(e_i)) \rangle = \langle e_i | \pi(e_i) \rangle = s_i$.

— On a

$$\begin{aligned} \langle e_1 | \pi_\theta(e_1) \rangle &= \langle u_\theta(e_1) | \pi(u_\theta(e_1)) \rangle \\ &= \langle \cos(\theta) e_1 + \sin(\theta) e_k | \pi(\cos(\theta) e_1 + \sin(\theta) e_k) \rangle \\ &= \cos^2(\theta) \langle e_1 | \pi(e_1) \rangle + \sin^2(\theta) \langle e_k | \pi(e_k) \rangle && \left(\begin{array}{l} \pi(e_k) = p_V(e_k) \in V \\ \text{donc } e_k, \pi(e_k) \perp e_1, v \end{array} \right) \\ &= \cos^2(\theta) (s_1 + \delta) + \sin^2(\theta) (s_k - \delta). \end{aligned}$$

— De même, $\langle e_k | \pi_\theta(e_k) \rangle = \sin^2(\theta) (s_1 + \delta) + \cos^2(\theta) (s_k - \delta)$.

La quantité $\cos^2(\theta)(s_1 + \delta) + \sin^2(\theta)(s_k - \delta)$ vaut $s_1 + \delta \geq 0$ quand $\delta = 0$, et $s_k - \delta \leq s_1$ quand $\delta = \frac{\pi}{2}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on peut trouver $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\langle e_1 | \pi_\theta(e_1) \rangle = s_1$. Comme $\langle e_1 | \pi_\theta(e_1) \rangle + \langle e_k | \pi_\theta(e_k) \rangle = s_1 + s_k$, on en déduit que $\langle e_1 | \pi_\theta(e_1) \rangle = s_k$. Le projecteur orthogonal π_θ , qui est le projecteur orthogonal sur $u_\theta^{-1}[\text{Vect}(v) \oplus V]$, vérifie donc $\Delta(\pi_\theta) = s$, ce qui conclut.

- Si maintenant s est décroissante, mais sans condition sur s_1 , on raisonne comme suit.
 - Si $s_1 = 0$, s est la suite nulle, donc $V = \{0\}$ convient clairement.
 - Si $s_1 = 1$, on peut trouver $h \in \mathbf{N}^*$ tel que $s = (s_1, s_2, \dots, s_h, s_{h+1}, \dots)$, avec $s_1 = s_2 = \dots = s_h = 1$ et $s_{h+1} < 1$. En utilisant le cas précédent (et en décalant les indices), on peut trouver un sous-espace vectoriel de dimension finie V de $\text{Vect}(e_i)_{i \geq h+1}$ tel que $\forall i \geq h+1, \langle e_i | p_V(e_i) \rangle = s_i$. En considérant la somme directe (orthogonale) $W = \text{Vect}(e_1, \dots, e_h) \oplus V$, le projecteur $p_W = p_{\text{Vect}(e_1, \dots, e_h)} + p_V$ vérifie $\Delta(p_W) = s$.
- Si maintenant s est une suite à valeurs dans $[0, 1]$, sommable, et de somme entière, la sommabilité de s entraîne que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{n \in \mathbf{N}^* \mid s_n \geq \varepsilon\}$ est fini, ce qui permet de construire, par récurrence, une permutation $\tau \in \mathfrak{S}(\mathbf{N}^*)$ telle que $s' = (s_{\tau(n)})_{n \in \mathbf{N}^*}$ décroisse. Elle reste évidemment à valeurs dans $[0, 1]$, sommable et de somme entière donc ce qui précède permet de construire un sous-espace vectoriel de dimension finie V tel que $\Delta(p_V) = s'$.

On peut alors définir l'unique isométrie $u \in \mathcal{L}(E)$ envoyant, pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, e_i sur $e_{\tau^{-1}(i)}$ puis considérer le projecteur orthogonal $u^{-1} \circ p_V \circ u$ sur $u^{-1}[V]$.

Pour tout $i \in \mathbf{N}$, on a alors

$$\langle e_i | (u^{-1} \circ p_V \circ u)(e_i) \rangle = \langle u(e_i) | p_V(u(e_i)) \rangle = \langle e_{\tau^{-1}(i)} | p_V(e_{\tau^{-1}(i)}) \rangle = s'_{\tau^{-1}(i)} = s_i,$$

donc $\Delta(u^{-1} \circ p_V \circ u) = s$, ce qui conclut.

2.3.3 Problème d'analyse : centralisateurs des difféomorphismes de la demi-droite

Le problème explorait le stabilisateur C^1 de difféomorphismes faiblement contractants de la demi-droite. Alors que le stabilisateur C^0 est de dimension infinie (question 5), un phénomène de rigidité se produit en régularité supérieure, et l'on montre que le stabilisateur C^1 est un groupe à un paramètre. Ce résultat repose sur le théorème de Szekeres (1958), appelé ici théorème B, qui montre qu'un difféomorphisme faiblement contractant f s'inscrit dans le flot d'un certain champ de vecteurs et sur le lemme de Kopell (1968), appelé ici théorème A, qui entraîne que seuls les difféomorphismes de ce flot commutent à f .

Partie I.

1. L'application f étant un homéomorphisme de l'intervalle \mathbf{R}_+ , elle doit être strictement monotone. Si f était strictement décroissante, on aurait $\forall x \in \mathbf{R}_+, f(x) \leq f(0)$, donc aucun nombre strictement positif n'aurait d'antécédent par f , ce qui contredit sa surjectivité. Ainsi, f est strictement croissant. On doit donc avoir $\forall x \in \mathbf{R}_+, f(x) \geq f(0)$. Puisque 0 doit avoir un f -antécédent, il faut en particulier que $0 \geq f(0)$, ce qui montre $f(0) = 0$.
2. On procède par contraposée. Supposons $\exists i \in \llbracket 1, r \rrbracket : f^{(i)}(0) \neq \delta_{i,1}$. Soit $i_0 \in \llbracket 1, r \rrbracket$ minimal possédant cette propriété. Notons $\lambda = \frac{f^{(i_0)}(0)}{i_0!} - \delta_{i_0,1}$, qui est donc non nul par construction. D'après le théorème de Taylor-Young à l'ordre i_0 (légitime ici, car $i_0 \leq r$ et que f est de classe C^r), on a $f(x) = x + \lambda x^{i_0} + o(x^{i_0})$ donc $f(x) - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \lambda x^{i_0}$. Deux fonctions équivalentes en 0 ayant le même signe au voisinage de 0, on en déduit que la différence $x \mapsto f(x) - x$ est du signe de λ sur un intervalle de la forme $]0, \eta[$, pour un certain $\eta > 0$. Comme λ est non nul, on en déduit que $x \mapsto f(x) - x$ ne s'annule pas sur $]0, \eta[$, ce qui montre que 0 est un point isolé de $\text{Fix}(f)$.

3. Soit $g \in Z^1(h_\lambda)$. On a en particulier $\forall n \in \mathbf{Z}, g \circ h_\lambda^n = h_\lambda^n \circ g$. Les fonctions $g \circ h_\lambda^n : x \mapsto g(\lambda^n x)$ et $h_\lambda^n \circ g : x \mapsto \lambda^n g(x)$ sont donc égales. Comme elles sont dérivables, leurs dérivées sont encore égales, ce qui donne l'égalité $\forall x \in \mathbf{R}_+, \lambda^n g'(\lambda^n x) = \lambda^n g'(x)$. Soit maintenant $x \in \mathbf{R}_+$. D'après ce qui précède (et la non-nullité de λ), on a $g'(x) = g'(\lambda^n x)$. Or, comme $\lambda < 1$, on a $\lambda^n x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Comme g' est continue, on en déduit $g'(x) = g'(0)$. On a donc montré que g' était constante, donc g est affine. Comme par ailleurs $g(0) = 0$, g est même linéaire : on peut trouver $\mu \in \mathbf{R}$ tel que $g : x \mapsto \mu x$. Pour qu'il s'agisse d'un difféomorphisme de \mathbf{R}_+ , il faut que $\mu > 0$, et $g = h_\mu$.

L'inclusion réciproque étant claire, on a montré $Z^1(h_\lambda) = \{x \mapsto \mu x \mid \mu \in \mathbf{R}_+^*\}$.

4. (a) Puisque $\text{Fix}(f) = \{0\}$, la fonction continue $x \mapsto f(x) - x$ ne s'annule pas sur \mathbf{R}_+^* . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle est donc partout < 0 , ou partout > 0 .

On a f^{-1} faiblement contractant $\Leftrightarrow \forall x > 0, f^{-1}(x) < x \Leftrightarrow \forall x > 0, x < f(x)$ par stricte croissance de f . On a alors que $f^{\pm 1}$ est faiblement contractant, suivant le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ (et les deux cas sont mutuellement exclusifs).

- (b) La suite $(f^n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ est la suite récurrente d'itératrice f , issue de x . Comme f est faiblement contractant, cette suite est strictement décroissante. D'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers $\ell \in [0, x]$. La continuité de f entraîne $f(\ell) = \ell$, d'où $\ell = 0$.

De même, la suite $(f^{-n}(x))_{n \in \mathbf{N}}$ est la suite récurrente d'itératrice f^{-1} , issue de x . Comme f est faiblement contractant, on a $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, f^{-1}(x) > x$, d'où l'on tire la stricte croissance de la suite. D'après le théorème de la limite monotone, la suite converge vers $\ell \in [x, +\infty[\cup \{+\infty\}$ (en particulier, $\ell > 0$). Si ℓ était un réel, on aurait $f^{-1}(\ell) = \ell$, c'est-à-dire $\ell = f(\ell)$ par continuité de f , ce qui est exclu. On a donc $\ell = +\infty$.

On vient de voir notamment la chaîne d'inégalités

$$0 < \dots < f^3(b) < f^2(b) < f^1(b) < f^0(b) < f^{-1}(b) < f^{-2}(b) < f^{-3}(b) < \dots$$

donc, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$, $(]f^{n+1}(b), f^n(b)])_{n=-p}^{p-1}$ est une partition de $]f^p(b), f^{-p}(b)[$, ce qui entraîne que $(]f^{n+1}(b), f^n(b)])_{n \in \mathbf{Z}}$ est une partition de $I = \bigsqcup_{p \in \mathbf{Z}}]f^p(b), f^{-p}(b)[$.

Il est clair que $I \subset \mathbf{R}_+^*$. Par ailleurs, pour tout $x \in]0, b]$ (resp. $]b, +\infty[$), on a $x \in]f^p(b), b]$ (resp. $x \in]b, f^{-p}(b)[$) dès que p est suffisamment grand, d'après la première partie de la question. Dans les deux cas, on en déduit $x \in I$, donc $I = \mathbf{R}_+^*$, ce qui conclut.

5. (a) On procède par analyse et synthèse.

Analyse. Soit $g \in Z^0(f)$ tel que $g|_{[f(1), 1]} = h$. Cela entraîne déjà (par croissance de h) que $g(1) = h(1) = 1$ et, d'après la question 1, que $g(0) = 0$. Comme $g \in Z^0(f)$, g commute à toutes les puissances de f . Pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a donc $g(f^n(1)) = f^n(g(1)) = f^n(1)$.

Soit maintenant $x \in \mathbf{R}_+^*$. D'après la question 4(b), on peut trouver $n \in \mathbf{N}$ tel que $x \in]f^{n+1}(1), f^n(1)[= f^n(]f(1), 1])$. On a donc $f^{-n}(x) \in]f(1), 1]$, ce qui entraîne $g(x) = g(f^n(f^{-n}(x))) = f^n(g(f^{-n}(x))) = f^n(h(f^{-n}(x)))$.

Autrement dit, g est l'unique application $\mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ telle que $g(0) = 0$ et coïncidant avec $f^n \circ h \circ f^{-n}$ sur $]f^{n+1}(1), f^n(1)[$, pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Synthèse. Soit $g : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ l'unique application telle que $g(0) = 0$ et coïncidant avec $f^n \circ h \circ f^{-n}$ sur $]f^{n+1}(1), f^n(1)[$, pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Toujours d'après la question 4(b), l'application g est ainsi bien définie.

Procédons aux différentes vérifications. Par construction, g coïncide avec h sur $]f(1), 1]$. Par ailleurs, $g(f(1)) = (f^1 \circ h \circ f^{-1})(f(1)) = f(h(1)) = f(1)$ car h étant un homéomorphisme croissant de $[f(1), 1]$, il vérifie $h(f(1)) = f(1)$. On a donc $g|_{[f(1), 1]} = h$.

Montrons $\forall x \in \mathbf{R}_+, (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$. Le cas $x = 0$ étant clair, on fixe $x \in \mathbf{R}_+^*$. On peut alors trouver un entier $n \in \mathbf{Z}$ tel que $x \in]f^{n+1}(1), f^n(1)[$, de telle sorte que

$f^{-n}(x) \in]f(1), 1]$. On a alors $f(g(x)) = f((f^n \circ h \circ f^{-n})(x)) = f^{n+1}(h(f^{-n}(x)))$ et $g(f(x)) = (f^{n+1} \circ h \circ f^{-(n+1)})(f(x)) = f^{n+1}(h(f^{-n}(x)))$ car $f(x) \in]f^{n+2}(1), f^{n+1}(1)]$.

Reste à montrer la continuité de g .

Par construction, g coïncide avec h sur $]f(1), 1]$, donc elle est continue en tout point de l'intervalle ouvert $]f(1), 1[$ et continue à gauche en 1. (On a $g(1) = h(1) = 1$.) Sur l'intervalle ouvert $]1, f^{-1}(1)[$, g coïncide avec $f^{-1} \circ h \circ f$, donc, par continuité des fonctions $f^{\pm 1}$ et h et parce que $f(1)$ est un point fixe de h , on a la limite à droite $g(x) \xrightarrow[x > 1]{x \rightarrow 1} f^{-1}(h(f(1))) = f^{-1}(f(1)) = 1 = g(1)$. Ainsi, g est continue à droite en 1, et donc continue en 1.

Soit $n \in \mathbf{Z}$ et $x \in]f(1), 1]$. Comme $f \circ g = g \circ f$, on a $g = f^n \circ g \circ f^{-n}$. La continuité de g en x entraîne alors sa continuité en $f^n(x)$. Ainsi, g est continue en tout point de \mathbf{R}_+^* .

Enfin, montrons la continuité en 0 de g . Soit $\varepsilon > 0$. On peut trouver $p \in \mathbf{Z}$ tel que $f^{p-1}(1) \leq \varepsilon$. Soit $x \leq f^p(1)$. On distingue alors deux cas : si $x = 0$, on a $g(x) = 0$; si $x > 0$, on peut trouver $n \in \mathbf{Z}$ tel que $x \in]f^{n+1}(1), f^n(1)]$. Comme $x \leq f^p(1)$ et que $k \mapsto f^k(1)$ décroît strictement, on en déduit $n + 1 \geq p$ (donc $n \geq p - 1$). On en déduit que $g(x) = f^n(h(f^{-n}(x))) \leq f^n(1) \leq f^{p-1}(x) \leq \varepsilon$, ce qui conclut.

- (b) Soit $h_1, h_2 \in \Gamma$. Comme $h_1^\#$ coïncide avec h_1 sur $[f(1), 1]$, on a $h_1^\#([f(1), 1]) \subset [f(1), 1]$. On a alors $(h_2^\# \circ h_1^\#)|_{[f(1), 1]} = \left(h_2^\#\right)_{|[f(1), 1]} \circ \left(h_1^\#\right)_{|[f(1), 1]} = h_2 \circ h_1$.

Par ailleurs, $h_2^\# \circ h_1^\# \circ f = h_2^\# \circ f \circ h_1^\# = f \circ h_2^\# \circ h_1^\#$ et $h_2^\# \circ h_1^\#$ est continue.

Par l'unicité montrée à la question précédente, on en déduit que $h_2^\# \circ h_1^\# = (h_2 \circ h_1)^\#$.

Comme il est par ailleurs clair que $\text{id}_{[f(1), 1]}^\# = \text{id}_{\mathbf{R}_+}$, on en déduit que pour tout $h \in \Gamma$, $(h^{-1})^\# \circ h^\# = h^\# \circ (h^{-1})^\#$, ce qui montre que $h^\#$ est bien un homéomorphisme et donc que $h^\# \in Z^0(f)$.

Cela montre que $h \mapsto h^\#$ définit bien une application $\psi : \Gamma \rightarrow Z^0(f)$.

Ce que l'on a déjà montré donne en outre que ψ est un morphisme de monoïdes, ce dont on déduit, puisque Γ est un groupe, que ψ est un morphisme de groupes. Ce morphisme est injectif car, pour tout $h \in \ker \psi$, on aura $h|_{[f(1), 1]} = \text{id}_{[f(1), 1]}$, donc $h = \text{id}_{[f(1), 1]}^\# = \text{id}_{\mathbf{R}_+}$. Ce morphisme n'est pas surjectif car, par construction, tout élément de $\text{im } \psi$ possède 1 comme point fixe. Or, f appartient évidemment à $Z^0(f)$ mais $f(1) < 1$, donc $f \in Z^0(f) \setminus \text{im } \psi$.

Partie II.

6. (a) C'est un calcul direct : on a $\ln((v \circ u)') = \ln(v' \circ u) + \ln(u')$ donc $\mathcal{L}(v \circ u)$ vaut

$$\frac{(v' \circ u)'}{v' \circ u} + \ln(u')' = \frac{(v'' \circ u) \times u'}{v' \circ u} + \mathcal{L}u = \left(\frac{v''}{v'} \circ u\right) \times u' + \mathcal{L}u = (\mathcal{L}v \circ u) \times u' + \mathcal{L}u.$$

- (b) On procède par récurrence, le cas $k = 0$ étant évident car $\mathcal{L}(f^0) = \mathcal{L}(\text{id}_{\mathbf{R}_+}) = 0$.

Supposons la formule montrée pour $\mathcal{L}(f^k)$. On a alors, en utilisant la question précédente puis l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f^{k+1}) &= \mathcal{L}(f \circ f^k) = (\mathcal{L}f \circ f^k) \times (f^k)' + \mathcal{L}(f^k) \\ &= (\mathcal{L}f \circ f^k) \times (f^k)' + \sum_{i=0}^{k-1} (\mathcal{L}f \circ f^i) \times (f^i)' \\ &= \sum_{i=0}^k (\mathcal{L}f \circ f^i) \times (f^i)', \end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence et conclut.

7. (a) Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Comme f est faiblement contractant, on a $f(x) < x$. Par stricte croissance de f , on en déduit $f^2(x) < f(x)$ et il s'ensuit que le quotient $\frac{f^2(x)-f(x)}{f(x)-x}$ est bien défini et strictement positif, d'où l'on tire que son logarithme est encore bien défini. Par opérations, la fonction θ_f est de classe C^1 sur \mathbf{R}_+^* .

On a alors, grâce au théorème fondamental du calcul intégral (f est au moins de classe C^1) et à un changement de variables affine :

$$\frac{f^2(x) - f(x)}{f(x) - x} = \frac{1}{f(x) - x} [f]_x^{f(x)} = \frac{1}{f(x) - x} \int_x^{f(x)} f'(t) dt = \int_0^1 f'((1-s)x + sf(x)) ds,$$

ce qui montre que $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \theta_f(x) = \ln \left(\int_0^1 f'((1-s)x + sf(x)) ds \right) - \ln(f'(x))$.

Par ailleurs, cette expression intégrale est bien définie et vaut 0 quand $x = 0$ (elle vaut alors $\ln(f'(0)) - \ln(f'(0)) = 0$). Pour conclure, il suffit de montrer $x \mapsto \int_0^1 f'((1-s)x + sf(x)) ds$ est bien continue en 0. On peut par exemple appliquer le théorème de convergence dominée : par continuité de f' , la famille de fonctions $\left(s \mapsto f'((1-s)x + sf(x)) \right)_{x \in [0,1]}$ converge simplement vers la constante $s \mapsto f'(0)$ quand $x \rightarrow 0$, tout en étant dominée par la constante $\max(1, \|f\|_\infty^{[0,1]})$, évidemment intégrable.

- (b) D'après le théorème des accroissements finis, on peut trouver $c_x \in]f(x), x[$ (et donc appartenant *a fortiori* à S) tel que $\int_0^1 f'((1-s)x + sf(x)) ds = f'(c_x)$.

On en déduit que $\theta_f(x) = \ln(f'(c_x)) - \ln(f'(x))$, et l'inégalité des accroissements finis, appliquée cette fois à la fonction $\ln f'$, montre que $|\theta_f(x)| \leq \|(\ln f')'\|_1^S = \|\mathcal{L}f\|_1^S$.

- (c) Soit $x \in [0, c]$. La quantité à majorer étant nulle si $x = 0$, on peut supposer $x > 0$. Comme le difféomorphisme f est faiblement contractant, la question précédente montre que $\forall i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, |\theta_f(f^i(x))| \leq \|\mathcal{L}f\|_1^{[f^{i+1}(x), f^i(x)]}$.

D'après la question 4(b), les segments formant la famille $([f^{i+1}(x), f^i(x)])_{i=0}^{k-1}$ sont d'intérieurs disjoints, et inclus dans $[0, c]$. D'après l'inégalité triangulaire et l'inégalité « de Chasles » rappelée en préambule, on a

$$\left| \sum_{i=0}^{k-1} \theta_f(f^i(x)) \right| \leq \sum_{i=0}^{k-1} |\theta_f(f^i(x))| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \|\mathcal{L}f\|_1^{[f^{i+1}(x), f^i(x)]} \leq \|\mathcal{L}f\|_1^{[0, c]}.$$

Partie III.

8. (a) Par continuité de h , $\text{Fix}(h)$ est un fermé de $[a, b]$. Comme $h(a) = a$ et $h(b) = b$ (par croissance), on en déduit que $[a, b] \setminus \text{Fix}(h)$ est un ouvert de $]a, b[$, et donc un ouvert. La composante connexe de $[a, b] \setminus \text{Fix}(h)$ contenant x_0 est donc un intervalle ouvert $]c, d[\ni x_0$. On a nécessairement $c, d \in \text{Fix}(h)$, ce qui montre, par croissance, que $[c, d]$ est stable par h . Si $h(x_0) > x_0$, pour tout $x \in]c, d[$, on a $h(x) > x$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, donc $h^n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} d$. Dans ce cas, la suite de fonctions $\left(h^n|_{[c, d]} \right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction constante à d sur $]c, d[$ et envoyant c sur c . Par exactement le même raisonnement, si $h(x_0) < x_0$, la même suite converge vers la fonction constante à c sur $]c, d[$ et envoyant d sur d . Dans les deux cas, la fonction limite est discontinue.
- (b) On reprend les notations de la question précédente. Si la suite de normes était bornée, il en irait de même de la suite $\left(\|h^n\|_\infty^{[c, d]} \right)_{n \in \mathbf{N}}$. Quitte à restreindre, on suppose $a = c$ et $b = d$. La suite de fonctions $(h^n)_{n \in \mathbf{N}}$, définie sur le compact $[c, d]$, serait donc uniformément bornée et, d'après l'inégalité des accroissements finis, uniformément équicontinue.

D'après le théorème d'Ascoli, la suite $(h^n)_{n \in \mathbf{N}}$ admet une valeur d'adhérence h_∞ pour la topologie de la norme uniforme : on peut trouver une extractrice ϕ telle que $(h^{\phi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers h_∞ .

Par unicité de la limite (appliquée aux différentes suites numériques $(h^n(x))_{n \in \mathbf{N}}$), on obtient que h_∞ est la limite simple trouvée à la question précédente. On a ainsi obtenu une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers une fonction discontinue, ce qui constitue une contradiction.

9. Soit $x, y \in [a, b]$. Soit $k \in \mathbf{N}$.

La quantité à majorer étant invariante si l'on échange x et y , on peut supposer $a \leq x \leq y \leq b$. D'après la question 4(b), $f^{k-1}(x) \leq f^{k-1}(y) \leq f^{k-2}(x) \leq f^{k-2}(y) \leq \dots \leq f(x) \leq f(y) \leq x \leq y$. On a alors

$$\ln \left(\frac{(f^k)'(y)}{(f^k)'(x)} \right) = \left[\ln(f^k)' \right]_x^y = \int_x^y \mathcal{L}(f^k) \stackrel{6(b)}{=} \sum_{i=0}^{k-1} \int_x^y (\mathcal{L}f \circ f^i) \times (f^i)' = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{f^i(x)}^{f^i(y)} \mathcal{L}f,$$

$$\text{donc } \left| \ln \left(\frac{(f^k)'(y)}{(f^k)'(x)} \right) \right| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \int_{f^i(x)}^{f^i(y)} |\mathcal{L}f| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \|\mathcal{L}f\|_1^{[f^i(x), f^i(y)]} \leq \|\mathcal{L}f\|_1^{[0, b]}.$$

10. L'affirmation de l'indication est claire. Soit $x \in [a, b]$. On note $y = \gamma(x)$.

Comme γ commute avec f et que $\gamma(b) = b$, on a $\forall k \in \mathbf{Z}, f^k(b) \in \text{Fix}(\gamma)$. Cela a deux conséquences. *Primo*, comme $\gamma(a) = a$ et $\gamma(b) = b$, on a (par croissance) que γ stabilise le segment $[a, b]$ et donc que $y = \gamma(x) \in [a, b]$. *Secundo*, comme $f^k(b) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$, 0 n'est pas un point isolé de $\text{Fix}(f)$, et la question 2 entraîne que $\gamma'(0) = 1$.

Soit maintenant $k \in \mathbf{N}$. L'égalité $\gamma = f^{-k} \circ \gamma \circ f^k$ donne

$$\begin{aligned} \gamma' &= (f^{-k} \circ \gamma \circ f^k)' = \left[(f^{-k})' \circ (\gamma \circ f^k) \right] \times (\gamma' \circ f^k) \times (f^k)' = \frac{(f^k)'}{(f^k)' \circ f^{-k} \circ (\gamma \circ f^k)} (\gamma' \circ f^k) \\ &= \frac{(f^k)'}{(f^k)' \circ \gamma} (\gamma' \circ f^k). \end{aligned}$$

Ainsi, $|\gamma'(x)| = \left| \frac{(f^k)'(x)}{(f^k)'(y)} \right| \times |\gamma'(f^k(x))| \leq \|\mathcal{L}f\|_1^{[0, b]} \times |\gamma'(f^k(x))|$.

Comme $f^k(x) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ et que γ est de classe C^1 , on a $\gamma'(f^k(x)) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \gamma'(0) = 1$. Par passage à la limite, on en déduit $|\gamma'(x)| \leq \|\mathcal{L}f\|_1^{[0, b]}$, ce qui conclut.

11. Quel que soit n , l'itérée g^n fixe b et appartient à $Z^1(f)$. D'après la question 10, on en déduit $\forall n \in \mathbf{N}, \|(g^n)'\|_\infty^{[a, b]} \leq \|\mathcal{L}f\|_1^{[0, b]}$.

En utilisant la contraposée du lemme démontré à la question 8(b), on en déduit que $g|_{[a, b]} = \text{id}_{[a, b]}$. Déduisons-en que $g = \text{id}_{\mathbf{R}_+}$. La question 1 montrant que 0 est fixe, on peut fixer $x > 0$. La question 4(b) montre alors qu'il existe un unique $n \in \mathbf{Z}$ tel que $x \in [f^n(a), f^n(b)]$. Ainsi, on a $g(x) = f^n(g(f^{-n}(x))) = f^n(f^{-n}(x)) = x$, ce qui conclut.

Partie IV.

12. Puisque $(f_t)_{t \in \mathbf{R}}$ est une famille d'éléments de \mathcal{D}^1 , on a déjà que $\forall t \in \mathbf{R}, f_t(0) = 0$ (d'après la question 1) et $\forall t \in \mathbf{R}, f_t[\mathbf{R}_+^*] = \mathbf{R}_+^*$. En particulier, pour tous $t, s \in \mathbf{R}$, f_{t+s} et $f_t \circ f_s$ coïncident nécessairement en 0. Soit maintenant $x \in \mathbf{R}_+^*$ et $s \in \mathbf{R}$. Les applications $h_1 : t \mapsto f_t(f_s(x))$ et $h_2 : t \mapsto f_{t+s}(x)$ valent toutes les deux $f_s(x)$ en 0 (pour la première, on a utilisé $f_0 = \text{id}_{\mathbf{R}_+}$). Par ailleurs, ces deux applications sont dérivables : $h_1' : t \mapsto \frac{\partial f_t(f_s(x))}{\partial t} = X(f_t(f_s(x))) = X(h_1(t))$ et $h_2' : t \mapsto \frac{\partial f_{t+s}(x)}{\partial t} = X(f_{t+s}(x)) \times 1 = X(h_2(x))$.

Autrement dit, ces deux fonctions sont toutes deux solutions du problème de Cauchy autonome (sur l'ouvert $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R} \subset \mathbf{R}^2$) $\begin{cases} h' = X(h) \\ h(0) = f_s(x). \end{cases}$ L'application X étant de classe C^1 , elle est notamment localement lipschitzienne (par l'inégalité des accroissements finis), donc le théorème de Cauchy-Lipschitz démontre que $h_1 = h_2$.

13. (a) Soit $X \in \mathcal{V}$. Déjà, comme $f \in \mathcal{D}^2$, f' est une fonction de classe C^1 qui ne s'annule pas, donc la formule pour $T_f(X)$ définit bien une application appartenant à $C^1(\mathbf{R}_+; \mathbf{R})$. Ensuite, $T_f(X)(0) = \frac{X(f(0))}{f'(0)} = \frac{X(0)}{f'(0)} = 0$. Enfin, soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Comme $f \in \mathcal{D}^2$, on a $f'(x) > 0$. Comme $X(f(x)) < 0$ (car $X \in \mathcal{V}$), on a bien $T_f(X)(x) = \frac{X(f(x))}{f'(x)} < 0$, ce qui montre que $T_f(X) \in \mathcal{V}$.
- (b) C'est un calcul direct. Soit $X \in \mathcal{V}$ et $x \in \mathbf{R}_+$. On a

$$T_g(T_f(X))(x) = \frac{T_f(X)(g(x))}{g'(x)} = \frac{X(f(g(x)))}{f'(g(x))} \frac{1}{g'(x)} = \frac{X((f \circ g)(x))}{(f \circ g)'(x)} = T_{f \circ g}(X)(x).$$

- (c) Supposons X complet. Par changement de variables de classe C^1 , on a alors pour tout $\varepsilon > 0$

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{du}{T_f(X)(u)} = \int_{\varepsilon}^1 \frac{f'(u) du}{X(f(u))} = \int_{f(\varepsilon)}^{f(1)} \frac{dv}{X(v)} = \underbrace{\int_{f(\varepsilon)}^1 \frac{dv}{X(v)}}_{\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\infty} - \underbrace{\int_{f(1)}^1 \frac{dv}{X(v)}}_{\in \mathbf{R}},$$

donc $\int_0^1 \frac{du}{T_f(X)(u)} = -\infty$ et $T_f(X)$ est complet.

14. (a) La fonction $\frac{1}{X}$ est bien définie et de classe C^1 sur \mathbf{R}_+^* . On en considère une primitive ξ . La fonction τ_{f_t} se réécrit alors $x \mapsto \xi(f_t(x)) - \xi(x)$. Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. La fonction $t \mapsto \tau_{f_t}(x)$ est ainsi dérivable, de dérivée $t \mapsto \frac{\partial f_t(x)}{\partial t} \xi'(f_t(x)) = \frac{X(f_t(x))}{X(f_t(x))} = 1$. Par ailleurs, $\tau_{f_0}(x) = \int_x^x \frac{du}{X(u)} = 0$. Cela montre que $\forall t \in \mathbf{R}, \tau_{f_t}(x) = t$. En particulier, la fonction τ_{f_t} est constante.
- (b) Notons τ_0 la valeur unique de la fonction τ_f . Puisque f est faiblement contractant et que $X \in \mathcal{V}$, on a nécessairement $\tau_0 > 0$.

Par constance de τ , $\forall k \in \mathbf{N}, \int_{f^k(1)}^{f^{k+1}(1)} \frac{du}{X(u)} = \tau_0$. D'après la relation de Chasles, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a $\int_{f^k(1)}^1 \frac{du}{X(u)} = -\int_1^{f^k(1)} \frac{du}{X(u)} = -\tau_0 k$. Comme f est faiblement contractant, on a $f^k(1) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$. Comme $\tau_0 > 0$, on en déduit $\int_0^1 \frac{du}{X(u)} = -\infty$, ce qui montre que X est complet.

On peut alors considérer le flot $(f_t)_{t \in \mathbf{R}}$ de X et notamment le difféomorphisme $f_{\tau_0} \in \mathcal{D}^2$. Par hypothèse et d'après la question précédente, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $\int_x^{f(x)} \frac{du}{X(u)} = \int_x^{f_{\tau_0}(x)} \frac{du}{X(u)}$ donc $\int_{f(x)}^{f_{\tau_0}(x)} \frac{du}{X(u)} = 0$. Comme $\frac{1}{X}$ est continue et à valeurs > 0 , on en déduit $f(x) = f_{\tau_0}(x)$. L'égalité étant automatique en 0, on a bien $f = f_{\tau_0}$, ce qui montre que f est associé à X .

- (c) La fonction $\tau_f : x \mapsto \int_x^{f(x)} \frac{du}{X(u)} = \xi(f(x)) - \xi(x)$ est dérivable et, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, on a

$$\tau_f'(x) = f'(x) \xi'(f(x)) - \xi'(x) = \frac{f'(x)}{X(f(x))} - \frac{1}{X(x)} = \frac{1}{T_f(X)(x)} - \frac{1}{X(x)} = 0,$$

ce qui montre que τ_f est constante, et conclut grâce à la question précédente.

15. (a) Commençons par remarquer que, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\frac{X_1(x)}{X_0(x)} = \frac{T_f(X_0)(x)}{f(x) - x} = \frac{f^2(x) - f(x)}{f'(x)} \times \frac{1}{f(x) - x},$$

donc $\ln\left(\frac{X_1}{X_0}\right) = \ln\left(\frac{f^2(x)-f(x)}{f(x)-x}\right) - \ln(f'(x)) = \theta_f(x)$. Ainsi, pour $i \in \mathbf{N}$, on a, sur \mathbf{R}_+^* :

$$\ln\left(\frac{X_{i+1}}{X_i}\right) = \ln\left(\frac{T_i(X_1)}{T_i(X_0)}\right) = \ln\left(\frac{X_1 \circ f^i}{(f^i)'} \times \frac{(f^i)'}{X_0 \circ f^i}\right) = \ln\left(\frac{X_1 \circ f^i}{X_0 \circ f^i}\right) = \theta_f \circ f^i.$$

Ainsi, pour tous $0 \leq k \leq \ell$, on a, sur \mathbf{R}_+^* , $\ln\left(\frac{X_\ell}{X_k}\right) = \sum_{i=k}^{\ell-1} \ln\left(\frac{X_{i+1}}{X_i}\right) = \sum_{i=k}^{\ell-1} \theta_f \circ f^i$.

(b) Quels que soient $0 \leq k \leq \ell$ et $x \in [0, b]$, on a, d'après la question 7(c) :

$$|\Theta_\ell(x) - \Theta_k(x)| = \left| \sum_{i=k}^{\ell-1} \theta_f(f^i(x)) \right| = \left| \sum_{i=0}^{\ell-k-1} \theta_f(f^i(f^k(x))) \right| \leq \|\mathcal{L}f\|_1^{[0, f^k(x)]}.$$

Or, $\mathcal{L}f$ est continue et $f^k(x) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$, donc $\|\mathcal{L}f\|_1^{[0, f^k(x)]} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$. On a donc montré que $\sup_{\ell \geq k} \|\Theta_\ell - \Theta_k\|_\infty^{[0, b]} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$, ce qui montre que la suite de fonctions $(\Theta_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy dans l'espace complet $C^0([0, b]; \mathbf{R})$, et donc qu'elle converge dans cet espace, c'est-à-dire uniformément.

(c) La question 15(a) entraîne l'égalité $\forall k \in \mathbf{N}, X_k = X_0 \exp(\Theta_k)$. (Plus exactement, elle entraîne cette égalité sur \mathbf{R}_+^* , et elle est par ailleurs évidente en 0, puisque tous les champs de vecteurs en présence appartiennent à \mathcal{V}).

Soit $b \in \mathbf{R}_+$. La suite de fonctions $(\Theta_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[0, b]$ vers une fonction Θ_∞ . En particulier, elle y est uniformément bornée : on peut trouver $M \in \mathbf{R}_+$ tel que $\forall x \in [0, b], \forall k \in \mathbf{N}, |\Theta_k(x)| \leq M$. D'après le théorème de Heine, la fonction \exp est uniformément continue sur le segment $[-M, M]$, ce qui entraîne la convergence uniforme sur $[0, b]$ de la suite de fonctions $(X_k)_{k \in \mathbf{N}} = (X_0 \exp(\Theta_k))_{k \in \mathbf{N}}$, vers une limite $Y_b = X_0 \exp(\Theta_\infty)$, nécessairement continue sur $[0, b]$. Notons que cette expression montre que Y_b est partout du signe de X_0 : on a $Y_b(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, Y_b(x) < 0$.

Par unicité de la limite, si $0 < b \leq b'$, la restriction de $Y_{b'}$ à $[0, b]$ n'est rien d'autre que Y_b , ce qui garantit l'existence de $Y \in C^0(\mathbf{R}_+; \mathbf{R})$ telle que $\forall b \in \mathbf{R}_+^*, Y_b = Y|_{[0, b]}$.

On a bien montré la convergence uniforme sur tous les segments de $(X_k)_{k \in \mathbf{N}}$ vers Y vérifiant $Y(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, Y(x) < 0$.

16. (a) Soit $k \in \mathbf{N}$. On a sur \mathbf{R}_+^*

$$\begin{aligned} X_k' &= \left(\frac{X_0 \circ f^k}{(f^k)'} \right)' \\ &= \frac{(X_0' \circ f^k) \times (f^k)' \times (f^k)' - (X_0 \circ f^k) \times (f^k)''}{(f^k)' \times (f^k)'} \\ &= X_0' \circ f^k - \frac{X_0 \circ f^k}{(f^k)'} \times \mathcal{L}(f^k) \\ &= X_0' \circ f^k - X_k \times \sum_{i=0}^{k-1} (\mathcal{L}f \circ f^i) \times (f^i)' && \text{(question 6(a))} \\ &= X_0' \circ f^k - X_k \times \sum_{i=0}^{k-1} (\mathcal{L}f \circ f^i) \times \frac{X_0 \circ f^i}{X_i} \\ &= X_0' \circ f^k - \sum_{i=0}^{k-1} (\mathcal{L}f \circ f^i) \times (f^{i+1} - f^i) \times \frac{X_k}{X_i}. && \text{(car } X_0 = f - \text{id}_{\mathbf{R}_+}) \end{aligned}$$

- (b) Notons $G_k = X'_0 \circ f^k - X'_k$, de telle sorte que $X'_k = X'_0 \circ f^k - G_k$. D'après cette définition, $(G_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est une suite de fonctions continues sur \mathbf{R}_+ et le calcul précédent montre que

$$G_k = \sum_{i=0}^{k-1} (\mathcal{L}f \circ f^i) \times (f^{i+1} - f^i) \times \frac{X_k}{X_i} \quad \text{sur } \mathbf{R}_+^*.$$

Sur le segment $[0, b]$, $(f^k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle, donc la suite $(X'_0 \circ f^k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers $X'_0(0) = f'(0) - 1$.

Sur l'intervalle semi-ouvert $]0, b]$, la quantité $\frac{X_k}{X_i}$ est l'exponentielle de $\ln\left(\frac{X_k}{X_i}\right)$, dont on a déjà vu qu'elle était bornée par $\|\mathcal{L}f\|_1^{[0,b]}$. En posant $M = \|\mathcal{L}f\|_\infty^{[0,b]} \exp\left(\|\mathcal{L}f\|_1^{[0,b]}\right)$, on a donc, pour tous $0 \leq k \leq \ell$ et tout $x \in]0, b]$,

$$\begin{aligned} |G_\ell(x) - G_k(x)| &= \left| \sum_{i=k}^{\ell-1} \mathcal{L}f(f^i(x)) \times (f^{i+1}(x) - f^i(x)) \times \frac{X_k(x)}{X_i(x)} \right| \\ &\leq M \sum_{i=k}^{\ell-1} (f^i(x) - f^{i+1}(x)) \\ &\leq M(f^k(x) - f^\ell(x)) \\ &\leq M f^k(x) \leq M \|f^k\|_\infty^{[0,b]}. \end{aligned}$$

Par continuité, cette majoration s'étend à $x = 0$, de telle sorte que l'on a, pour tous entiers $0 \leq k \leq \ell$, $\|G_\ell - G_k\|_\infty^{[0,b]} \leq M \|f^k\|_\infty^{[0,b]}$ donc la convergence uniforme de $(f^k)_{k \in \mathbf{N}}$ entraîne que $(G_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est uniformément de Cauchy, et converge donc uniformément.

Par somme, on obtient la convergence uniforme de $(X'_k)_{k \in \mathbf{N}}$ sur le segment $[0, b]$.

- (c) Soit $b \in \mathbf{R}_+^*$. D'après les questions 15(c) et 16(b), les suites de fonctions $(X_k)_{k \in \mathbf{N}}$ et $(X'_k)_{k \in \mathbf{N}}$ convergent toutes les deux uniformément. On en déduit que $Y_{|[0,b]}$ est de classe C^1 et que $(X'_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur Y' sur $[0, b]$. Ceci étant valable pour tout b , on a que Y est de classe C^1 , et que sur tout segment $(X_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge en norme C^1 vers Y . Joint aux propriétés démontrées à la question 15(c), le caractère continûment dérivable de Y montre que $Y \in \mathcal{V}$. Par construction (et grâce à la question 14(b)), on a $\forall k \in \mathbf{N}, T_f(X_k) = X_{k+1}$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbf{R}_+, \frac{X_k(f(x))}{f'(x)} = X_{k+1}(x)$.

La convergence simple de $(X_k)_{k \in \mathbf{N}}$ suffit à en déduire $\forall x \in \mathbf{R}_+, \frac{Y(f(x))}{f'(x)} = Y(x)$, c'est-à-dire $T_f(Y) = Y$. On en déduit que Y est complet et associé à f en appliquant la question 14(d), ce qui clôt la démonstration du théorème B.

17. D'après le théorème B, f est associé à un champ de vecteurs complet, qui possède donc un certain flot $(f_t)_{t \in \mathbf{R}}$: cela signifie qu'il existe $\tau > 0$ tel que $f = f_\tau$. La propriété de flot montrée à la question 12 entraîne alors que $\forall t \in \mathbf{R}, f_t \circ f = f \circ f_t = f_{t+\tau}$, ce qui donne déjà l'inclusion $\{f_t \mid t \in \mathbf{R}\} \subset Z^1(f)$, le théorème admis garantissant le caractère C^1 des différentes applications f_t (et de leurs réciproques f_{-t}).

Réciproquement, soit $g \in Z^1(f)$. D'après la propriété de flot, $\forall k \in \mathbf{Z}, f_{k\tau} = f^k$. En particulier, comme f est faiblement contractant, $f_{k\tau}(1) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ et $f_{k\tau}(1) \xrightarrow[k \rightarrow -\infty]{} +\infty$. On peut donc trouver $k_+, k_- \in \mathbf{Z}$ tels que $f_{k_-\tau}(1) \leq g(1) \leq f_{k_+\tau}(1)$. Comme la fonction $t \mapsto f_t(1)$ est (dérivable donc) continue, le théorème des valeurs intermédiaires garantit l'existence de $t_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f_{t_0}(1) = g(1)$. Le C^1 -difféomorphisme $h = g^{-1}f_{t_0}$ commute alors à h , tout en vérifiant $h(1) = 1$. D'après le théorème A, on en déduit $h = \text{id}_{\mathbf{R}_+}$, et donc $f_{t_0} = g$.

On a donc montré l'égalité $\{f_t \mid t \in \mathbf{R}\} = Z^1(f)$, et il reste à montrer que l'application $t \mapsto f_t$, qui est un morphisme surjectif de groupes $\mathbf{R} \rightarrow Z^1(f)$ d'après la propriété de flot et ce qui précède, est bien injective. Pour cela, il suffit par exemple de constater que, si $t \neq 0$, $\int_1^{f_t(1)} \frac{du}{X(u)} = t \neq 0$, ce qui montre que $f_t(1) \neq 1$ et donc *a fortiori* $f_t \neq \text{id}_{\mathbf{R}_+}$.

Chapitre 3

Épreuves orales

Note préliminaire. Les compétences techniques sont au cœur de l'épreuve de leçons de mathématiques et de l'épreuve de modélisation mathématique. La première consiste à construire une leçon sur un thème donné. Le candidat doit proposer un plan argumenté précisant l'agencement et l'enchaînement des concepts clés de la notion abordée, les illustrer par des exemples, en donner des applications et être en mesure de développer au tableau des résultats représentatifs de cette leçon. C'est au candidat qu'il incombe de sélectionner de tels résultats représentatifs (au moins deux), d'expliquer ces choix, et d'en proposer le développement au jury, dans un temps imparti. Dans la seconde épreuve, le candidat doit mettre en valeur ses connaissances techniques à partir d'un texte d'environ six pages qui lui est fourni. Il s'agit alors de mettre des mathématiques en action dans un contexte applicatif. Le candidat est invité à présenter et discuter, de manière structurée, les hypothèses qui conduisent à la description mathématique proposée dans le texte et à expliquer comment les énoncés du programme s'appliquent dans le contexte qui y est décrit. Le propos doit, de plus, être illustré en exploitant l'outil informatique. Le jury rappelle que s'écarter du programme n'est en aucun cas une exigence pour prétendre à des notes très satisfaisantes ; le jury encourage surtout les préparations et les candidats à se concentrer sur la maîtrise des bases.

3.1 Épreuve orale de mathématiques (Analyse-Probabilités & Algèbre-Géométrie)

Les thèmes des leçons proposées au concours docteurs sont une sélection de l'ensemble des leçons d'algèbre-géométrie et d'analyse-probabilités du concours standard. On trouvera en annexe la liste des leçons qui seront utilisées en 2023. Le format de cette épreuve de leçons, ainsi que ses attendus, sont en tous points identiques à ceux des épreuves d'Analyse-Probabilités et d'Algèbre-Géométrie du concours standard. Aussi, les candidats sont invités à se reporter aux indications fournies dans le rapport du concours standard pour cette épreuve.

Proposer un plan de leçon et réaliser le développement d'une démonstration précise et détaillée d'un résultat substantiel sélectionné dans le plan proposé, dans un temps limité, sans recours à des notes, constituent des exercices difficiles qui ne s'improvisent pas et auxquels les candidats doivent impérativement s'entraîner. Il est recommandé de s'y exercer au sein d'une préparation universitaire, où les candidats docteurs, forts d'une plus grande maturité scientifique, peuvent d'ailleurs jouer un rôle d'émulation très positif sur l'ensemble de la promotion. Le jury attire l'attention des candidats sur le fait que les tirages peuvent combiner deux leçons orientées analyse et probabilités ou deux leçons orientées algèbre et géométrie ou deux leçons prises dans chacun de ces champs. Le candidat choisit laquelle de ces deux leçons il va exposer au jury. Le jury recommande une lecture minutieuse du rapport du concours standard, qui donne des indications détaillées sur les attendus de ces leçons. On y trouvera notamment une description des notions de base qui devraient constituer le cœur des leçons.

Il est toujours conseillé aux candidats de chercher à rassurer le jury quant à la maîtrise de ces bases plutôt que de tenter de l'éblouir par un exposé potentiellement inspiré de leurs thèmes de recherche mais débordant largement du programme. Le jury estime que le programme du concours contient un matériel technique suffisamment étoffé pour évaluer les capacités à remplir les missions du professeur agrégé. Les résultats contrastés sont surtout le reflet de niveaux de préparation hétérogènes.

3.2 Épreuve orale de modélisation (options A, B et C)

Pour cette épreuve, le jury renvoie là encore aux recommandations faites dans le rapport du concours standard. Le jury recommande d'éviter les écueils suivants :

- se lancer dans un hors sujet, caractérisé par une tentative de replacer le contenu d'une leçon au détriment de l'analyse du texte ;
- négliger l'illustration informatique, parfois par manque d'entraînement sur les logiciels du concours.

Les candidats docteurs peuvent tirer profit de leur recul scientifique dans cette épreuve qui nécessite des qualités de synthèse et une capacité à balayer le programme de manière transverse.

Le jury encourage les futurs candidats à bien se préparer à cette épreuve en s'exerçant sur les textes rendus publics et en se familiarisant avec l'environnement informatique du concours accessible sur le site agreg.org.

3.3 Épreuve orale de mise en perspective didactique d'un dossier recherche

Cette épreuve est spécifique au concours spécial ; sa matière est fournie par un document PDF de 12 pages maximum envoyé par les candidats dix jours avant le début des épreuves d'admission (en l'espèce la date butoir était donc le 8 juin à 23h59). Ce document consiste en un dossier scientifique présentant le parcours, les travaux de recherche et, le cas échéant, les activités d'enseignement et/ou de valorisation de la recherche. Il n'y a pas de format type puisque ce document a pour vocation de décrire l'expérience *personnelle* du candidat ; il doit surtout s'attacher à décrire le parcours du candidat, la place qu'occupent les mathématiques dans les principales étapes de celui-ci et comment cette expérience, quelle qu'en soit la nature, sera réinvestie dans la pratique enseignante. La description de l'exploitation d'outils mathématiques au cours d'une expérience professionnelle, comme ingénieur par exemple, est tout à fait bienvenue. Des candidats déjà enseignants peuvent aussi expliquer comment leur expérience de recherche s'exprime dans les classes.

Chaque dossier est confié au préalable à deux membres du jury, avec mission d'en être rapporteurs devant la commission d'interrogation. L'affectation des dossiers prend garde à ne pas confier cette part de l'évaluation à un expert du sujet de thèse du candidat. L'appréciation du document fourni fait partie des éléments de la grille de notation. Les deux autres membres du jury sont réputés avoir un regard plus « candide » sur la présentation orale de ce dossier. Un débat préparatoire réunissait les membres de la commission avant les épreuves afin d'échanger sur les dossiers et d'organiser une interrogation personnalisée, adaptée aux profils des candidats.

Les dossiers fournis sont pour la plupart soignés et de qualité, montrant un investissement incontestable des candidats pour mettre en valeur leur parcours. Le jury conseille aux candidats de penser dans un même élan le document écrit et la présentation orale, en ayant bien présent à l'esprit que le document fournit la base de la présentation et qu'il sera disponible tout au long de celle-ci. Le jury recommande aux candidats d'inclure dans leur dossier un minimum d'éléments biographiques (notamment en y faisant apparaître clairement leur nom) : des informations sur la mobilité géographique et thématique, le parcours académique et/ou professionnel, les évolutions après thèse... donnent du relief à la discussion.

La bibliographie doit être vérifiable par le jury (articles de revues avec comité de lecture, livres vendus dans le commerce etc.). L'impossibilité de trouver de trace des articles ou livres mentionnés dans la bibliographie est sanctionnée.

De manière générale, la rédaction du dossier doit être guidée par une réflexion sur la question « En quoi une expérience dans la recherche peut-elle être un plus pour un enseignant? ». La dimension de mise en perspective didactique du dossier occupe une place importante de son évaluation : on attend des candidats qu'ils mettent en lumière leurs savoirs, les méthodes et démarches présentes dans leurs travaux et qu'ils expliquent comment elles pourraient être réinvesties dans un enseignement sur l'éventail « lycée - L3 ». Le jury fait observer que la description d'une démarche de recherche et son explication didactique peuvent s'appuyer sur des sujets différents de ceux abordés durant la thèse, si le candidat juge un tel choix plus pertinent (cela peut être le cas pour des candidats ayant une expérience post-thèse assez longue). Davantage que les travaux proprement dits du candidat, c'est son expérience de recherche, son parcours qu'il convient de valoriser dans cette épreuve. En particulier, le jury recommande de ne pas s'appuyer sur des résultats obtenus personnellement mais dont on n'a plus la maîtrise. Les concepts utilisés doivent être introduits, et pouvoir être expliqués en détail.

L'objet de cette épreuve est que les candidats puissent faire preuve d'une véritable plus-value, les distinguant des candidats du concours standard.

Bien que cette demande puisse être légitime au regard des pratiques de la communauté mathématique, les textes régissant le concours interdisent l'exploitation de matériel auxiliaire : les candidats ne peuvent donc pas appuyer leur présentation sur un support projeté préparé à cette fin. Pour compenser en partie cette difficulté, le jury a décidé de projeter le document de 12 pages fourni par les candidats en amont du concours. Il recommande donc vivement aux candidats de prendre en compte cette disposition, afin d'exploiter au mieux cette ressource pour leur exposé. Ce document peut notamment contenir des images ou des figures en illustrant le contenu, qui peuvent même être organisées sous forme d'animation à l'intérieur du fichier PDF. (Il doit bien s'agir d'images ou de figures sous forme d'animation ; cette option ne doit pas permettre d'ajouter du texte et de contourner ainsi la limitation imposée de 12 pages. Si un candidat utilise cette opportunité, il lui est conseillé de l'indiquer dans le document). Il est aussi possible d'insérer des liens hypertextes pour naviguer à l'intérieur du document. Il n'est toutefois pas permis d'exploiter des liens vers des sites web. De même, il n'est pas autorisé de se munir de son manuscrit de thèse, d'articles de recherche, ou, évidemment, de notes personnelles, ni pendant l'épreuve proprement dite, ni pendant la préparation ; seuls sont autorisés les mêmes documents que pour les autres épreuves, à savoir des livres dont la diffusion commerciale est avérée.

Il était rappelé en début de préparation que l'épreuve a pour objectif « d'apprécier l'aptitude du candidat à rendre ses travaux accessibles à un public de non-spécialistes ». Typiquement il était recommandé de construire un discours à destination d'un auditoire de niveau au plus M2 de mathématiques ; l'épreuve n'est pas un séminaire réservé à un public de chercheurs sur le sujet de thèse du candidat. Une grande attention avait été apportée à la composition des commissions pour justement éviter la présence d'experts des thèmes de recherche du candidat. L'aptitude à se faire comprendre par des non-spécialistes, à la fois dans le dossier écrit et durant la prestation orale, la capacité à s'adapter à des questions de niveaux variés, occupent une part très substantielle de la grille de notation.

L'arrêté du 28 juin 2016 stipule que le candidat doit, lors de cette épreuve, répondre « [...] à une question [...] communiquée par le jury au début de l'heure de préparation ». Chaque candidat reçoit donc une question spécifique l'invitant à développer sa réflexion sur la dimension didactique qui pourrait être donnée à son expérience de recherche et à expliquer comment cette expérience pourrait rejaillir dans ses fonctions d'enseignant. Lors de cette session, la question portait sur la proposition d'une ou plusieurs activités en classe :

- Proposer une illustration ou animation graphique, un dessin ou un objet permettant d'introduire une notion mathématique. On précisera la notion et le niveau (lycée, L1, L2).
- Illustrer l'intérêt et les difficultés de la notion d'approximation. L'exposé s'adressera à un public d'un niveau à préciser : lycée, ou bien L1 ou L2 non spécialiste.

- Expliquer sur un ou plusieurs exemples comment utiliser l’outil informatique pour illustrer, valoriser ou introduire une notion mathématique. On précisera la notion et le niveau (lycée, L1, L2).

Le jury souligne qu’il n’y a pas de réponse « type » attendue. Néanmoins, le jury apprécie sa pertinence et attend une description assez précise et concrète de la séance qui pourrait être proposée à des élèves ou des étudiants, avec des exemples et des exercices le cas échéant. Les mathématiques mises en oeuvre et l’identification des enjeux didactiques sont des éléments qu’il convient de bien expliciter. Certains candidats ont fait cet effort de réfléchir à leur séance de cours ou TD et ont décrit en détail la séquence, en mettant bien en avant une démarche, bâtie sur une question, un calcul, une simulation, et conduisant à des déductions. Si ces propositions ont été plus ou moins pertinentes, avec un niveau plus ou moins bien identifié/adapté, elles ont toujours été valorisées par rapport aux affirmations laconiques « cette notion pourrait être présentée à des étudiants de L1-L2 », « telle partie pourrait être comprise par des étudiants de L1-L2 »... Le dialogue s’est systématiquement attaché à clarifier les modalités de mise en oeuvre pratique et concrète de la séquence proposée.

L’épreuve proprement dite comprend deux parties distinctes. Dans un premier temps, durant 30 minutes, le candidat organise librement la présentation de son dossier (durant au moins 20 minutes) et la réponse à la question posée (durant au moins 5 minutes). La suite de l’interrogation est consacrée à un dialogue avec le jury. Ce dialogue, personnalisé suivant le parcours du candidat, explore divers aspects du dossier. On peut y distinguer

- des questions en lien direct avec la question posée pour la préparation de l’épreuve. L’objectif est ici de discuter du contenu mathématique de la démarche proposée et de sa mise en perspective didactique.
- des questions sur les mathématiques, les démarches et les méthodes présentées par le candidat lors de son exposé ou présents dans son dossier. Il ne s’agit pas de questions spécialisées d’experts, et encore moins de questions « pièges ». En particulier, pour des docteurs ayant soutenu leur thèse dans d’autres disciplines que les mathématiques, ces questions visent à mettre en relief les aspects mathématiques qui peuvent être en rapport avec leurs travaux de leur recherche. Le but est de tester la capacité à expliquer des points élémentaires des travaux de recherche et de discuter des possibilités de réinvestir les démarches utilisées ou les savoir-faire acquis dans un enseignement de niveau lycée, ou L1-L2.
- le jury peut proposer un exercice niveau lycée (ou L1 mais en restant dans des domaines très classiques) dans un domaine disjoint de celui de la thèse en demandant de le « faire vivre » dans une classe. Ces questions sortent les candidats de leur zone de confort en les faisant réfléchir à des questions en lien avec le programme du secondaire qui ne sont pas reliées à leur domaine de recherche. Il n’est pas attendu de résolution complète des exercices proposés lors de l’oral. Le jury attend une réflexion et une mise en oeuvre d’une possible stratégie, à commencer le plus souvent par une modélisation du problème.
- enfin, le jury pose des questions plus ouvertes dont le thème général peut se résumer à évaluer l’apport d’une expérience dans la recherche pour un enseignant.

Ces questions, dont le niveau est généralement assez élémentaire, arrivent au débotté durant la discussion. La capacité à rebondir pour resituer la question dans le cadre de l’expérience de recherche et/ou d’une réflexion à mener en classe, à reformuler des notions pour les rendre accessibles à un public non averti sont particulièrement évaluées dans cette phase de l’épreuve.

Cette épreuve permet de faire ressortir un véritable signal, discriminant et pertinent quant à l’objectif de recrutement d’enseignants et de valorisation d’une expérience de recherche. Elle joue pleinement son rôle dans la sélection des candidats. L’épreuve permet à des profils variés, issus d’autres disciplines ou dont la thèse est ancienne, d’exprimer des qualités et une motivation pour les carrières d’enseignants en mathématiques. Pour tirer plein profit de leur expérience et bien mettre en valeur leur parcours, les candidats doivent préparer cette épreuve spécifique avec soin. Une prestation improvisée, purement descriptive des résultats doctoraux, sans réflexion de mise en perspective et sans anticipation de la discussion, ne conduira qu’à un résultat médiocre.

Chapitre 4

La bibliothèque de l'agrégation

Pendant la préparation à l'épreuve de leçon, les candidats ont accès à la bibliothèque du concours. La liste des livres disponibles dans cette bibliothèque peut être consultée dans le rapport de l'agrégation externe. Pendant la préparation à l'épreuve de modélisation, les candidats disposent d'une bibliothèque numérique ; la liste des livres disponibles est décrite ci-dessous.

- Grégoire Allaire : Analyse numérique et optimisation (Éditions de l'École polytechnique)
- Gilles Bailly-Maitre : Arithmétique et cryptologie (Ellipses, 2e édition)
- Philippe Barbe et Michel Ledoux - Probabilité (EDP Sciences)
- Sylvie Benzoni-Gavage : Calcul différentiel et équations différentielles (Dunod, 2e édition)
- Florent Berthelin : Équations différentielles (Cassini)
- Frédéric Bertrand, Myriam Maumy Bertrand : Initiation à la statistique avec R (Dunod)
- Alin Bostan et al. : Algorithmes efficaces en calcul formel (Hal.inria.fr)
- Richard Brent, Paul Zimmermann : Modern Computer Arithmetic (Cambridge University Press)
- Hervé Carrieu : Probabilité (EDP Sciences)
- Alexandre Casamayou et al. : Calcul mathématique avec Sage
- Marie-Line Chabanol, Jean-Jacques Ruch : Probabilités et statistiques (Ellipses)
- Djalil Chafai, Pierre-André Zitt : Probabilités, préparation à l'agrégation interne
- Djalil Chafai, Florant Malrieu : Recueil de modèles aléatoires (HAL Id : hal-01897577, version 3)
- Jean-Pierre Demailly - Analyse numérique et équations différentielles (EDP Sciences, 4e édition)
- Michel Demazure : Cours d'algèbre (Cassini)
- Laurent di Menza : Analyse numérique des équations aux dérivées partielles (Cassini)
- Jérôme Escoffier : Probabilités et statistiques (Ellipses, 3e édition)
- Francis Filbet : Analyse numérique (Dunod, 2e édition)
- Loïc Foissy et Alain Ninet : Algèbre et calcul formel (Ellipses)
- Olivier Garet et Aline Kurtzmann : De l'intégration aux probabilités (Ellipses, 2e édition)
- Thierry Goudon : Mathématiques pour la modélisation et le calcul scientifique (ISTE)
- Jean-Baptiste Hiriart-Urruty : Optimisation et analyse convexe (EDP Sciences)
- John Hubbard, Beverly West : équations différentielles et systèmes dynamiques (Cassini)
- Laurent Le Floch et Frédéric Testard : Probabilités 1 (Calvage et Mounet)
- Thierry Meyre : Probabilités, cours et exercices corrigés. Tome 1 (Calvage et Mounet)
- Thierry Meyre : Probabilités, cours et exercices corrigés. Tome 2 (Calvage et Mounet)
- Jean-Yves Oувrard : Probabilités. tome 1 (Cassini, 2e édition)
- Jean-Yves Oувrard : Probabilités. tome 2 (Cassini, 2e édition)
- Jean-Étienne Rombaldi : Analyse matricielle (EDP Sciences, 2e édition)
- François Rouvière : Petit guide de calcul différentiel (Cassini, 4e édition)
- Victor Shoup : Computational introduction to number theory and algebra (Cambridge University Press)
- Damien Vergnaud : Exercices et problèmes de cryptographie (Dunod, 3e édition)

Annexe A

Liste des leçons de mathématiques pour le concours spécial 2023

- 101 Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
- 105 Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
- 106 Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.
- 108 Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
- 120 Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.
- 121 Nombres premiers. Applications.
- 123 Corps finis. Applications.
- 141 Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
- 142 PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.
- 148 Exemples de décompositions de matrices. Applications.
- 151 Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
- 152 Déterminant. Exemples et applications.
- 153 Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
- 156 Exponentielle de matrices. Applications.
- 157 Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
- 158 Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
- 159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.
- 162 Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.
- 190 Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.
- 191 Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.
- 203 Utilisation de la notion de compacité.
- 208 Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
- 213 Espaces de HILBERT. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.
- 214 Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

- 215** Applications différentiables définies sur un ouvert de \mathbf{R}^n . Exemples et applications.
- 219** Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.
- 220** Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.
- 223** Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.
- 226** Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.
- 228** Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.
- 234** Fonctions et espaces de fonctions LEBESGUE-intégrables.
- 235** Problèmes d'interversion en analyse.
- 236** Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.
- 241** Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
- 245** Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.
- 246** Séries de FOURIER. Exemples et applications.
- 250** Transformation de FOURIER. Applications.
- 262** Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.
- 265** Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.
- 266** Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.