



**MINISTÈRES
ÉDUCATION
JEUNESSE
SPORTS
ENSEIGNEMENT
SUPÉRIEUR
RECHERCHE**

*Liberté
Égalité
Fraternité*

RAPPORT DU JURY

SESSION 2025

Concours : Agrégation externe

Section : Mathématiques

Rapport de jury présenté par : Johan Yebbou, président du jury

Épreuves de leçon

1 Présentation des épreuves de leçon

Modalités. Pour les épreuves de leçons, la candidate ou le candidat tire au sort un couple de sujets, et est libre de choisir le sujet qui lui plaît parmi ces deux sujets proposés, celui qui lui semble le plus à même de mettre en valeur ses connaissances, sans avoir à justifier ou commenter son choix devant le jury.

Les candidates et candidats préparent l'interrogation pendant 3 heures.

Durant tout ce temps, elles ou ils ont libre accès aux livres de la bibliothèque de l'agrégation ou à leurs propres ouvrages. Seuls sont autorisés les ouvrages avec un numéro ISBN et jouissant d'une véritable diffusion commerciale. L'attention des candidates et candidats est attirée sur le fait que l'ISBN ne suffit pas, une « diffusion commerciale avérée » est tout autant importante. Ainsi, un photocopié de cours, propre à un établissement, même muni d'un ISBN, pourra être refusé. Cette restriction est motivée par le principe d'égalité des candidats : les ressources documentaires autorisées doivent être facilement accessibles à tout candidat au concours. Les ouvrages imprimés par les candidats eux-mêmes (ou les bibliothèques universitaires, ou les préparations universitaires) ne sont pas autorisés et les livres doivent être vierges d'annotation. Tous les ouvrages personnels peuvent être interdits, lors de l'oral, sur simple décision du représentant du directoire présent lors de la préparation. Il n'est pas autorisé non plus de venir avec des livres dont certaines pages auraient été marquées au préalable, fût-ce de manière amovible, au moyen de post-it par exemple. (Il est toutefois possible de se munir de tels marque-pages à apposer durant la préparation.) Le représentant du directoire présent lors de la préparation peut interdire tout ouvrage personnel ou envoyé par une préparation universitaire. Les notes personnelles, manuscrites ou dactylographiées, ne sont autorisées ni pendant l'épreuve proprement dite, ni pendant la préparation. Il est possible, et même recommandé, de venir muni d'un exemplaire du rapport du jury de l'agrégation externe de mathématiques, relié et sans annotation. Quelques exemplaires du rapport sont à disposition des candidates et candidats dans chaque salle de préparation.

Les candidates et candidats n'ont pas accès à Internet et la possession d'un dispositif de communication ou de stockage de données (téléphone, calculatrice, clé USB, montre connectée...) serait considérée comme une tentative de fraude, susceptible d'entraîner l'exclusion du concours.

Les casques de réduction de bruit ne sont pas autorisés, les candidates ou candidats qui désirent s'isoler des bruits peuvent apporter des bouchons d'oreille.

Le temps de préparation est décompté dès la prise de connaissance des sujets. À l'issue des trois heures de préparation, les plans des leçons sont ramassés pour être photocopiés à l'intention des jurys. Pendant le temps nécessaire à cette reproduction, les candidates et candidats sont invités à ranger leurs affaires et à prendre quelques minutes de repos.

Les plans sont des documents manuscrits, communiqués à la commission d'interrogation. Ils comportent au maximum 3 pages au format A4, éventuellement complétées d'une page de figures. Les candidats doivent veiller à la lisibilité de leur document et prendre en compte le fait qu'ils vont être photocopiés : écrire suffisamment gros, soigner la présentation, faire apparaître des titres, éviter l'utilisation de couleurs et les encres très claires... Le candidat doit clairement signaler sur ce plan les résultats qu'il estime significatifs, représentatifs de la leçon et qu'il propose de développer devant le jury.

L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale de 55 minutes environ : une présentation du plan de la leçon éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes maximum et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions. La candidate ou le candidat peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve. Pendant la première phase de l'interrogation consacrée à la présentation du plan, il peut utiliser toutes les notes manuscrites produites durant la préparation. Le développement doit quant à lui se faire sans utiliser ces notes manuscrites ; si le plan comporte lui-même trop de détails sur les développements proposés, le jury peut restreindre l'utilisation de ce document durant cette seconde phase de l'épreuve.

Commentaires généraux. Le jury met en garde contre plusieurs écueils constatés :

- le hors-sujet. Le hors-sujet se manifeste de deux manières, qui dans tous les cas sont lourdement sanctionnées. Quelques candidates ou candidats prennent des libertés quant au libellé de la leçon et s'en écartent notablement : les titres des leçons définissent le champ précis qu'il faut traiter. Par ailleurs, le jury constate l'abus de « recyclage » de thèmes plus ou moins classiques, mais qui ne sont pas exploités avec à propos dans les leçons et qui, parfois, prennent une place sans commune mesure avec leur importance mathématique.
- le manque d'autonomie et de maîtrise du sujet. Probablement dû à une mauvaise évaluation des attentes et un manque de lucidité, trop de candidates ou candidats proposent plan ou développements qu'ils ne peuvent défendre. Des connaissances des bases fermement maîtrisées et intelligemment utilisées valent mieux qu'un étalage de savoirs emmagasinés sans recul et à peine digérés, voire pas assimilés du tout. Une maîtrise avérée et solide des bases assure déjà une note très convenable, certainement de nature à permettre l'admission, en l'état du concours.
- la fatigue et le stress. Une grande majorité des candidates et candidats se présente avec une forte charge émotionnelle, à la mesure de l'enjeu et de leur investissement personnel, qui peut nuire à l'expression de leurs connaissances. Cela est d'autant plus vrai que l'épreuve ne se réduit pas à la simple récitation d'un cours mais à un échange avec le jury et donc, là encore, à une réflexion personnelle, à une prise de hauteur et à la démonstration, dans un temps court, non seulement de la maîtrise technique mais aussi de l'aptitude à construire un raisonnement. Le jury est pleinement conscient de ces difficultés et s'emploie à en réduire les effets négatifs en mettant en pratique une posture de bienveillance constante. Le jury ne cherche en rien à déstabiliser le candidat pendant l'épreuve, mais au contraire cherche à valoriser les connaissances de la candidate ou du candidat. Les premières questions, parfois très simples, visent souvent à préciser une notation, un point du plan ou du développement, pour que le jury s'assure de la compréhension par le candidat des notions qu'il vient d'exposer et non pour lui tendre un quelconque piège. Les membres du jury font leur possible pour mettre en confiance, respecter, et écouter la candidate ou le candidat, en stimulant le dialogue.

Une liste d'énoncés, quelque sophistiqués qu'ils soient, ne peut suffire à convaincre le jury. Il faut savoir motiver ces énoncés et pouvoir expliquer comment ils s'enchaînent et en quoi ils sont pertinents. Les leçons doivent donc être illustrées avec des exemples judicieusement choisis. De nombreux titres de leçons se terminent d'ailleurs par « exemples et applications » : le jury attend donc que le plan soit riche en exemples et applications et/ou que le candidat puisse en développer lors de la présentation de son plan.

Recommandations. On trouvera ci-dessous des commentaires sur chaque leçon de la session 2025, l'objectif étant d'explicitier les attendus du jury. Ces commentaires proposent volontairement deux niveaux de lecture :

- le premier s'en tient strictement au programme officiel, et n'interdit pas d'obtenir sans le dépasser une très bonne note ;
- le second réservé seulement aux candidates et candidats suffisamment solides pour aborder avec maîtrise des thèmes plus ambitieux.

Le premier niveau correspond aux notions « de base », incontournables pour l'intitulé proposé et dont la maîtrise est attendue des candidats. Le second propose des suggestions d'ouverture. Ces suggestions sont de niveaux variés et peuvent concerner des champs différents, par exemple qui trouvent leurs motivations dans des problématiques propres aux options de modélisation. Certaines pistes se placent aussi aux frontières du programme et peuvent faire écho à des sujets spécialisés abordés durant la formation du candidat. Il ne s'agit là que de propositions qui ne revêtent aucun caractère obligatoire, introduites par des formulations comme « pour aller plus loin » ou « si les candidats le désirent » ; le jury n'attend certainement pas un balayage exhaustif de ces indications et il n'est pas nécessaire de développer les

éléments les plus sophistiqués pour obtenir une note élevée. Enfin, certains commentaires font part de l'expérience du jury pour évoquer le dosage pas toujours approprié entre théorie et exemples, souligner des points de faiblesse qui méritent une attention particulière ou mettre en garde contre de possibles écueils (oublis, hors-sujets, erreurs fréquentes, positionnement mal à propos, etc). Le jury espère que candidates et candidats, ainsi que les préparateurs, sauront se saisir de ces indications pour proposer des développements originaux : il n'y a pas de format standard et des manières différentes d'aborder les leçons peuvent toutes permettre d'obtenir d'excellents résultats.

Les leçons proposées ont toutes leurs spécificités qu'un principe unique ne saurait résumer ou englober. Une partie des sujets sont très délimités, alors que certains intitulés de leçons sont très ouverts et obligent la candidate ou le candidat à opérer des choix thématiques et de points de vue. Ces sujets sont pensés pour offrir de multiples points d'entrée, avec une échelle de niveaux techniques assez large, l'objectif étant de permettre à l'ensemble des candidats de s'exprimer au mieux et de mettre en valeur leurs connaissances. La pertinence des choix adoptés et leur motivation au regard de l'intitulé de la leçon entrent alors tout particulièrement dans l'appréciation ainsi que, bien entendu, la maîtrise du contenu proposé. Ces leçons de synthèse exigent certainement un important recul ; elles réclament un effort conséquent de réflexion et méritent tout particulièrement d'être préparées en amont du concours. En retour, elles permettent de consolider un matériel mathématique qui peut être réinvesti avec profit dans d'autres thèmes.

Lorsque la leçon s'y prête, le jury recommande très fortement qu'un des développements démontre l'un des résultats centraux ou un enchaînement de résultats centraux de la leçon. Les prérequis du développement devront (ou doivent) alors être clairement précisés."

1.1 Première partie : présentation de la leçon

Dans cette première phase de l'épreuve, la candidate ou le candidat est convié à utiliser son temps de parole, 6 minutes maximum, pour présenter, argumenter, mettre en valeur et faire une synthèse de sa leçon.

Pour cette partie de l'épreuve, la candidate ou le candidat devrait s'imaginer dans la situation où il doit introduire à un auditoire, pendant 6 minutes, une leçon destinée ensuite à être développée sur plusieurs séances. Quel est l'intérêt du sujet ? Comment se positionne-t-il dans un paysage mathématique plus large ? Comment s'articulent les différentes sections qui composent la leçon ? Comment s'expliquent et se motivent les enchaînements ? Comment se hiérarchisent les résultats et les difficultés ? Il s'agit aussi de s'interroger sur les enjeux didactiques de la leçon, c'est-à-dire dans quel ordre et comment présenter les choses pour que le tout soit cohérent, compréhensible et pédagogiquement efficace. De plus, cette présentation gagne à être illustrée. Des exemples peuvent être utilisés pour mettre en évidence les difficultés, faire ressortir le rôle des hypothèses et décrire des applications mettant en valeur l'intérêt des résultats. Enfin, des figures peuvent aussi contribuer à expliquer les idées maîtresses. Si l'enjeu principal est d'argumenter la construction du plan de la leçon, il est aussi parfois pertinent de mettre en valeur les liens logiques et l'intérêt des notions présentées dans d'autres domaines (sans forcément les introduire dans le plan écrit).

Le rapport du concours indique des pistes pour chaque leçon ; il ne s'agit que de suggestions que le candidat n'est pas tenu de suivre et qui ne constituent pas une trame obligatoire pour le plan. Notamment le rapport distingue clairement le cœur des leçons et des extensions dont le contenu peut être techniquement plus exigeant. La vocation de ces commentaires n'est donc pas d'être repris de manière exhaustive ; il ne s'agit que de guider les candidats dans leur auto-évaluation et les encourager à présenter des notions avec lesquelles ils sont à l'aise. Notamment, ils peuvent tout à fait exploiter des notions ou des applications qui trouvent leur motivation dans les options de modélisation qu'ils ont choisies.

Le jury ne cherche pas des plans absolument originaux, le plus important est que le plan soit bien structuré, maîtrisé par la candidate ou le candidat et qu'y figure une quantité substantielle d'exemples

et de mathématique. Le jury attend que la candidate ou le candidat fasse preuve d'un investissement personnel sur le sujet et qu'il explique pourquoi il adopte cette présentation. Le jury s'émeut du nombre important de candidates et candidats qui utilisent un plan *tout fait* disponible dans la littérature et se trouvent ensuite, faute de regard critique et d'appropriation suffisante, en difficulté de pouvoir l'expliquer, le commenter et le défendre. Le jury cherche aussi à vérifier la capacité à penser par soi-même et à réfléchir de manière autonome. Face à ce qui peut ressembler à une dérive, les livres contenant des plans rédigés sont interdits depuis le concours 2023. Le jury invite les candidates et candidats, durant leur année de préparation, à ne pas craindre de faire preuve de curiosité et à diversifier leurs lectures, afin de produire des plans synthétiques hiérarchisés, proposant des résultats et des exemples réellement maîtrisés et analysés.

Le jury se désole par ailleurs du très petit nombre de candidates et candidats qui ont le réflexe de faire un dessin, lorsque c'est pertinent, notamment durant le développement. C'est pourtant un moyen extrêmement efficace pour faire saisir l'idée d'une preuve ou motiver une méthode.

Il s'agit d'une épreuve orale. Le document écrit transmis au jury se justifie pour servir de base pour la discussion et constitue un fil conducteur qui guide le jury pour mener la partie consacrée au dialogue et aux questions. Ce plan ne doit être ni une énumération d'énoncés, ni un cours ou un exposé complet avec développement des démonstrations. En revanche, il doit définir avec suffisamment de précision les notions mathématiques introduites, donner les énoncés complets (notamment les hypothèses) des résultats fondamentaux, citer des exemples et des applications. Le plan est important puisqu'il calibre l'ensemble de la leçon, il détermine l'orientation et le niveau choisis par le candidat. Les choix doivent être motivés lors de la présentation et éventuellement lors de la discussion avec le jury. Il est nécessaire d'être en mesure de démontrer les résultats importants et de pouvoir les illustrer avec des exemples simples. Soigner la présentation d'un document écrit qui sert de support pour un cours est une compétence professionnelle importante du métier d'enseignant. Aussi, la formalisation mathématique et le français doivent être soignés, ainsi que la mise en forme, autant que possible dans le temps de préparation imparti : ces éléments ne peuvent que faciliter les interactions avec le jury. Il est inutile, voire contre-productif, de chercher à remplir à tout prix les 3 feuilles autorisées, surtout avec des éléments que la candidate ou le candidat ne maîtrise manifestement pas.

Pendant les 6 minutes de présentation, la candidate ou le candidat doit tenter de faire une synthèse de son plan en expliquant les grandes lignes et les articulations. Il est inutile de recopier le plan au tableau, puisque le jury dispose d'une copie de ce document. Toutefois le jury encourage les candidates et candidats à exploiter le tableau comme support pédagogique. Faire apparaître la structure de la leçon, illustrer une difficulté technique ou le principe d'une démonstration par une figure... permet à la candidate ou au candidat de s'affranchir de ses notes et rend l'exposé plus vivant. La présentation orale, la qualité d'expression, la compréhension synthétique, la plus-value de l'exposé par rapport au plan écrit, la capacité de la candidate ou du candidat à intéresser son auditoire sur une leçon donnée, constituent des éléments importants d'évaluation. Le jury se réjouit d'ailleurs des progrès constatés sur cette partie de l'épreuve.

Le jury attache une grande importance à la maîtrise du plan qui intervient de manière substantielle dans la grille de notation. Le plan ne peut être considéré comme maîtrisé si l'exposé ressemble à une récitation. Les résultats exposés doivent être compris ainsi que l'organisation d'ensemble de la leçon. Il est souhaitable que la candidate ou le candidat connaisse dans leurs grandes lignes les démonstrations des résultats figurant au programme du concours. Il est indispensable que la candidate ou le candidat ait une idée assez claire de la difficulté des démonstrations des résultats qu'il évoque dans son plan. Le jury rappelle qu'il n'est pas nécessaire de s'aventurer au-delà des contours du programme pour prétendre à une très bonne note ! Plus généralement, il vaut mieux se cantonner à un niveau où l'on se sait solide plutôt que de chercher à placer des énoncés débordant du programme mais sans le recul, ni l'assurance techniques nécessaires. Bien entendu, réussir cette partie de l'épreuve ne s'improvise pas

et le discours doit avoir été réfléchi durant la préparation de l'épreuve, et plus largement tout au long du parcours qui conduit les candidates et candidats jusqu'au concours.

À la fin de cette présentation de la leçon, le jury peut éventuellement questionner très brièvement la candidate ou le candidat et aborder quelques points techniques, sans entrer dans des détails qui retarderaient le début du développement.

1.2 Deuxième partie : le développement

Le jury demande au candidat de proposer deux développements au moins. Il s'agit de résultats représentatifs de la leçon que la candidate ou le candidat est en mesure d'exposer en détail et sans notes.

Proposer un seul développement ou des développements de niveaux trop disparates conduit à une minoration de la note. Ces propositions de développements doivent être clairement mentionnées sur le plan écrit et non pas vaguement évoquées à l'oral. Dans cet esprit, la candidate ou le candidat doit pouvoir motiver le choix des développements qu'elle ou il propose et en quoi ces résultats ou énoncés sont centraux ou jouent à ses yeux un rôle particulier sur le sujet. La candidate ou le candidat doit aussi préciser, sur son plan écrit, ce qu'elle ou il va démontrer et, le cas échéant, les résultats de son plan qu'elle ou il va admettre pour mener à bien son développement. Il faut prendre garde dans ce choix à ne pas déclarer admis un énoncé majeur qui, une fois acquis, rend l'objet du développement trivial. De même il faut prendre garde aux « raisonnements circulaires » en faisant appel à un énoncé qu'on interpréterait comme une conséquence de celui qu'on cherche à démontrer. De telles maladresses sont perçues comme un défaut de maîtrise et de recul qui est pénalisé.

Le jury choisit le développement qui va être effectivement exposé par la candidate ou le candidat. La candidate ou le candidat dispose de 15 minutes (maximum) pour mener à bien son développement. La gestion du temps est une des difficultés de l'épreuve. Un exposé trop court est le signe d'un sujet mal choisi, inapproprié au concours ; une démonstration inachevée dans le temps imparti témoigne d'un manque de maîtrise. Le jury demande de bien gérer son tableau, en particulier la candidate ou le candidat doit demander aux membres du jury l'autorisation d'effacer. Lors du développement, le jury attend de la candidate ou du candidat des explications sur la preuve et sur l'utilisation pertinente des notions développées durant l'exposé oral ; il peut être opportun, lors du développement, de se référer explicitement au plan présenté. Trop peu de candidates et candidats commencent leur développement par une rapide synthèse des grandes idées ou des étapes qui le composent. Expliquer l'approche adoptée, et les difficultés, au début du développement est une démarche pédagogique appréciée. Un ou plusieurs dessins peuvent aider à clarifier la discussion technique. Il est inutile de se précipiter ou de parler trop vite ; on veillera au contraire à préciser ses notations, à soigner sa présentation, à placer sa voix et à regarder de temps en temps le jury. Le développement ressemble parfois à une succession plus ou moins convaincante de résultats intermédiaires *ad hoc*. Cette phase de l'épreuve vise à mettre en valeur des qualités pédagogiques autant que techniques et l'exposé doit faire la preuve de la compréhension du sujet par la candidate ou le candidat. La récitation mécanique d'un développement ne peut pas être convaincante ; le jury veille à ce que les futurs enseignants comprennent ce qu'ils exposent et sachent exposer ce qu'ils comprennent. C'est une qualité essentielle d'une future agrégée ou d'un futur agrégé. Un choix judicieux des notations utilisées contribue à la clarté de l'exposé ; par exemple il peut être maladroit de noter deux polynômes P et P' ... surtout si on doit travailler avec les dérivées de ceux-ci. Le jury intervient le moins possible pendant le développement, mais il peut, en cas de lacunes ou d'erreurs manifestes, interrompre la candidate ou le candidat pour demander des explications. Cela n'augmente pas le temps prévu pour le développement.

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements. Il est souhaitable que la candidate ou le candidat recherche une adéquation entre le niveau auquel il souhaite se placer et les développements proposés. La candidate ou le candidat qui présenterait un développement non maîtrisé, manifestement mal compris ne serait pas avantage.

Si le niveau de l'agrégation ne peut se cantonner aux notions abordées dans une classe de Terminale ou une première année post-bac, trop de candidates et candidats se lancent, curieusement, dans des propositions, parfois aux limites du programme, qui dépassent largement leur niveau technique. Dans un cas comme dans l'autre, il en résulte une appréciation négative. Le développement doit être en lien direct avec le thème de la leçon présentée. L'utilisation d'un résultat qui n'apparaît pas dans le plan écrit doit être explicitement signalée par le candidat. Toute utilisation d'un lemme non démontré et enfermant l'essence de la preuve est sanctionnée. Le jury peut exiger la démonstration d'un lemme admis, si celui-ci est essentiellement le cœur du développement. Il faut éviter de présenter ou d'utiliser un résultat préliminaire ou intermédiaire sans explication convaincante. Dans le cas d'un développement difficile, il ne faut pas négliger les cas élémentaires et les détails utiles à la compréhension du jury. Le jury déplore l'abus de certains développements plus ou moins classiques, qui ne sont pas toujours utilisés à bon escient et qui occupent parfois une place disproportionnée (l'ellipsoïde de JOHN, la décomposition de DUNFORD, le théorème de BERNSTEIN, le processus de GALTON-WATSON,...). Trop de candidates et candidats ont tendance à replacer exagérément et de manière inappropriée de tels développements et se retrouvent ainsi hors sujet, impair qui est sévèrement sanctionné. Il faut aussi veiller au fait que des thèmes peuvent être exploités dans des leçons différentes... mais avec des points de vue différents, qu'il faut savoir mettre en exergue.

Le programme du concours comprend maintenant un chapitre spécifique consacré aux méthodes numériques. Les candidates et candidats sont invités à explorer ce champ, éventuellement en s'appuyant sur leurs connaissances spécifiques à l'option de modélisation qu'ils ont choisie, pour proposer des développements originaux en lien avec l'analyse d'algorithmes de calcul. La description des leçons indique quelques pistes dans cette direction. Le jury se réjouit qu'un nombre croissant de candidates et candidats saisisse ces opportunités et espère que cette tendance, qui enrichit les contenus, se renforcera.

La pertinence des explications, le souci pédagogique, la capacité à mener à bien et complètement le sujet dans le temps imparti, l'aisance technique sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs, la candidate ou le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement. Il est donc essentiel de montrer qu'on est capable de reconnaître dans une question donnée un cas particulier simple du résultat général qu'il vient d'exposer.

1.3 Troisième partie : questions et dialogue

Le jury teste systématiquement la maîtrise du plan présenté. Une part importante de la discussion porte donc sur le plan, ou trouve sa source dans le plan présenté par la candidate ou le candidat. Il faut éviter que ce plan dépasse largement le niveau que l'on maîtrise. La candidate ou le candidat doit se préparer à des questions élémentaires voire considérées comme « évidentes » sur tout énoncé mis dans son plan, questions auxquelles il doit répondre avec précision. Des candidates ou candidats après des prestations relevées ont parfois pu être surpris par de telles questions portant sur les bases ; elles sont pourtant quasi-systématiques, le jury souhaitant précisément s'assurer de la maîtrise de ces bases. Le jury peut aussi proposer des calculs illustrant les notions évoquées par le plan.

Cette phase de l'épreuve requiert un certain recul qui ne peut être que le fruit d'un travail de préparation approfondi en amont du concours où l'on doit se demander si on est capable de mettre en œuvre des énoncés sur des situations simples et, pour certains théorèmes, réfléchir à des exemples ou des contre-exemples.

Les réponses aux questions des examinateurs ne prennent pas forcément une forme unique et ceux-ci se placent dans une posture de dialogue avec la candidate ou le candidat. Le jury pose aussi des exercices en rapport direct avec la leçon et le plan proposé mais ne s'attend pas à ce que le candidat trouve une solution immédiatement. Ces exercices ont plutôt pour objectif de voir évoluer le futur agrégé dans une démarche scientifique rigoureuse et méthodique. Le candidat doit réfléchir, utiliser son plan et rattacher l'exercice à sa leçon. Le fait de ne pas résoudre un exercice ne doit pas être perçu

comme un échec et la candidate ou le candidat ne doit pas se décourager : plus qu'achever l'exercice, ce sont ses réactions qui importent (par exemple en identifiant l'énoncé de la leçon qui permettrait de traiter le problème et en se demandant si les hypothèses d'application sont satisfaites). Dans cette partie de l'épreuve, la candidate ou le candidat doit faire preuve de capacité d'écoute, qui est aussi évaluée ; il doit rester attentif aux suggestions du jury. Il est souvent utile d'exploiter le tableau pour bien reformuler la question, formaliser les pistes de réflexion et donner un support écrit à l'échange. Pendant cette discussion, le jury veille à laisser un temps raisonnable à la candidate ou au candidat pour réfléchir, sans le submerger de questions.

Enfin, l'objet du concours étant de recruter de futurs enseignants, le jury peut aussi, comme l'indique l'article 8 de l'arrêté du 25 juillet 2014, poser toute question qu'il juge utile *lui permettant d'apprécier la capacité de la candidate ou du candidat, en qualité de futur agent du service public d'éducation, à prendre en compte dans le cadre de son enseignement la construction des apprentissages des élèves et leurs besoins, à se représenter la diversité des conditions d'exercice du métier, à en connaître de façon réfléchie le contexte, les différentes dimensions (classe, équipe éducative, établissement, institution scolaire, société) et les valeurs qui le portent, dont celles de la République. Le jury peut, à cet effet, prendre appui sur le référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation fixé par l'arrêté du 1er juillet 2013.*

2 Épreuve orale d'algèbre et géométrie

Comme y invite clairement l'intitulé de l'épreuve, les exemples et applications motivés par la géométrie sont particulièrement bienvenus. Les thèmes relevant de la théorie des groupes se prêtent tout particulièrement à de telles illustrations. De plus, les connaissances spécifiques à chacune des trois options A, B et C fournissent des exemples d'applications très appréciés par le jury.

Les notions de quotients sont importantes, il est impératif de savoir utiliser la projection canonique et de maîtriser le passage au quotient dans le cadre d'un morphisme.

101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Le matériel théorique en accord avec le programme doit être présenté, accompagné d'illustrations pertinentes. Il faut pouvoir dégager l'intérêt des notions introduites avec des exemples d'actions bien choisies pour obtenir des informations soit sur un ensemble X donné, soit sur un groupe G donné et faire apparaître des sous-groupes intéressants de G comme stabilisateurs. Par ailleurs, la présentation doit illustrer comment l'étude des orbites de certaines actions revient à classer certains objets, soit en trouvant un représentant simple de chaque orbite, soit en dégagant des invariants caractérisant les orbites. Les actions de groupes interviennent aussi efficacement dans des problèmes de dénombrements, notamment via la formule de BURNSIDE. Les exemples peuvent être internes à la théorie des groupes (action naturelle de \mathfrak{S}_n sur $\{1, \dots, n\}$, action par translation ou par conjugaison, représentations de groupes, etc.). Mais il est souhaitable d'emprunter aussi à d'autres domaines (action sur des anneaux, des espaces de matrices ou des espaces de polynômes, groupes d'isométries, etc.). La géométrie fournit aussi de nombreux exemples pertinents (groupes d'isométries d'un polygone dans le plan ou d'un solide ou d'un polygone régulier dans l'espace).

Pour aller plus loin, on peut aborder l'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{K})$ sur la droite projective menant au birapport ou celle de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur le demi-plan de POINCARÉ ou les preuves par actions de groupes des théorèmes de SYLOW ou encore d'autres actions donnant lieu à des isomorphismes exceptionnels. Il est aussi possible de s'intéresser aux aspects topologiques ou différentiels liés à certaines actions.

102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

Les notions élémentaires concernant les nombres complexes de module 1 (définitions, exponentielle complexe, trigonométrie, etc.) doivent être présentés, avant d'aborder l'aspect « groupe » de S^1 en considérant son lien avec $(\mathbf{R}, +)$ et en examinant ses sous-groupes (en particulier finis). Il est souhaitable de présenter des applications en géométrie plane, par exemple la constructibilité des polygones réguliers. Plus généralement, la leçon invite à expliquer où et comment les nombres complexes de module 1 et les racines de l'unité apparaissent dans divers domaines des mathématiques : spectres de matrices remarquables, polynômes cyclotomiques, et éventuellement les représentations de groupes, etc. On peut également s'intéresser aux sous-groupes compacts de \mathbf{C}^* .

Pour aller plus loin, on peut s'intéresser aux nombres de module 1 et aux racines de l'unité dans $\mathbf{Q}[i]$, ou à la dualité des groupes abéliens finis ou encore aux transformées de FOURIER discrètes et rapides. Des aspects analytiques du sujet peuvent être évoqués (théorème de relèvement, logarithme complexe, analyse de Fourier sur \mathbf{R}^n) mais ne doivent occuper ni le cœur de l'exposé, ni l'essentiel d'un développement.

103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Dans un premier temps, la notion de conjugaison dans un groupe introduite brièvement doit être développée et illustrée dans des situations variées. On doit proposer des situations où la conjugaison aide à résoudre certains problèmes (par exemple, en transformant un élément en un autre plus simple

à manipuler). On peut aussi illustrer et utiliser le principe du « transport par conjugaison » voulant que hgh^{-1} ait la même « nature géométrique » que g .

Ensuite, il est attendu de développer l'intérêt de la notion de sous-groupe distingué en particulier en regard de la structure de groupe obtenue par quotient d'un groupe, le lien entre sous-groupe distingué et noyau de morphisme de groupes, ainsi que la factorisation d'un morphisme de groupe au travers d'un tel quotient. Il est indispensable de proposer quelques résultats bien choisis mettant en évidence l'utilisation de ces notions : citons par exemple le lien entre les sous-groupes de l'un et de l'autre et la caractérisation interne des produits directs. L'examen de la simplicité de certains groupes peut être proposé.

Comme indiqué dans le sujet, il est demandé de présenter des exemples pertinents utilisés pour obtenir des résultats significatifs. De tels exemples sont nombreux en théorie des groupes mais il est souhaitable d'en proposer dans d'autres domaines, comme en arithmétique, en géométrie et en algèbre linéaire.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent poursuivre en illustrant ces notions en théorie des représentations des groupes finis (classes de conjugaison et nombre de représentations irréductibles, treillis des sous-groupes distingués lu dans la table de caractères, etc.).

La notion de produit semi-direct et les théorèmes de SYLOW débordent du programme. Il est possible de les évoquer, mais en veillant à les illustrer par des exemples et des applications.

104 : Groupes finis. Exemples et applications.

Cette leçon est particulièrement vaste et il convient de faire des choix, qui devront pouvoir être justifiés.

La notion d'ordre (d'un groupe, d'un élément et d'un sous-groupe) est très importante dans cette leçon ; le théorème de LAGRANGE est incontournable. Le théorème de structure des groupes abéliens finis doit figurer dans cette leçon. Sa démonstration est techniquement exigeante, mais il faut que l'énoncé soit bien compris, en particulier le sens précis de la clause d'unicité, et être capable de l'appliquer dans des cas particuliers.

Il est souhaitable de présenter des exemples de groupes finis particulièrement utiles comme les groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et \mathfrak{S}_n , en maîtrisant les propriétés élémentaires (générateurs, classes de conjugaison, etc.) Il est important de connaître les groupes d'ordre premier ainsi que les groupes d'ordre inférieur à 8.

Des exemples de groupes finis issus de domaines autres que la théorie des groupes doivent figurer en bonne place dans cette leçon. L'étude des groupes d'isométries laissant fixe un polygone (ou un polyèdre) régulier peut être opportunément exploitée sous cet intitulé. Afin d'illustrer leur présentation, les candidates et candidats peuvent aussi s'intéresser à des groupes d'automorphismes ou étudier les groupes de symétries \mathfrak{A}_4 , \mathfrak{S}_4 , \mathfrak{A}_5 et relier sur ces exemples géométrie et algèbre.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'attarder sur la dualité dans les groupes abéliens finis. Comme application, la cyclicité du groupe multiplicatif d'un corps fini est tout à fait adaptée. Il est possible d'explorer des représentations de groupes, de donner des exemples de caractères, additifs ou multiplicatifs dans le cadre des corps finis. Il est aussi possible de s'intéresser aux sommes de GAUSS. Les candidates et candidats peuvent ensuite introduire la transformée de FOURIER discrète, qui pourra être vue comme son analogue analytique, avec ses formules d'inversion, sa formule de PLANCHEREL. Ainsi, la leçon peut mener à introduire la transformée de FOURIER rapide sur un groupe abélien dont l'ordre est une puissance de 2 ainsi que des applications à la multiplication d'entiers, de polynômes et éventuellement au décodage de codes via la transformée de HADAMARD.

105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Parmi les attendus, il faut savoir relier la leçon avec les notions d'orbites et d'actions de groupes. Il faut aussi savoir décomposer une permutation en cycles à supports disjoints, tant sur le plan théorique (preuve du théorème de décomposition), que pratique (sur un exemple) et savoir l'utiliser pour déterminer les classes de conjugaison du groupe symétrique et pour donner des systèmes de générateurs.

L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement. Il est bon d'avoir en tête que tout groupe fini se plonge dans un groupe symétrique et de savoir calculer la signature des permutations ainsi obtenues dans des cas concrets. Les applications sont nombreuses, il est très naturel de parler du déterminant, des polynômes symétriques ou des fonctions symétriques des racines d'un polynôme. On peut également parler du lien avec les groupes d'isométries des solides.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'intéresser par exemple aux automorphismes du groupe symétrique, à des problèmes de dénombrement, aux représentations des groupes des permutations ou encore aux permutations aléatoires.

106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

Les premières définitions et propriétés générales du groupe linéaire doivent être présentées : familles de générateurs, liens avec le pivot de GAUSS, sous-groupes remarquables. Il est important de savoir faire correspondre certains sous-groupes du groupe linéaire avec les stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, etc.).

Il faut aussi savoir réaliser \mathfrak{S}_n dans $GL(n, \mathbf{K})$ et faire le lien entre signature et déterminant.

Il est souhaitable de dégager des propriétés particulières selon le corps de base, en particulier sa cardinalité lorsque le corps K est fini et les propriétés topologiques de ce groupe lorsque le corps est \mathbf{R} ou \mathbf{C} .

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent exploiter le fait que la théorie des représentations permet d'illustrer l'importance de $GL(n, \mathbf{C})$ et de son sous-groupe unitaire. Ils peuvent également étudier les sous-groupes compacts maximaux et les sous-groupes fermés de $GL(n)$.

108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

La leçon doit être illustrée par des exemples de groupes très variés, dont il est indispensable de donner des parties génératrices. La description ensembliste du groupe engendré par une partie doit être connue et les groupes monogènes et cycliques doivent être évoqués.

Les groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ fournissent des exemples naturels tout comme les groupes de permutations, les groupes linéaires ou leurs sous-groupes (par exemple $SL_n(\mathbf{K})$, $O_n(\mathbf{R})$ ou $SO_n(\mathbf{R})$). Ainsi, on peut s'attarder sur l'étude du groupe des permutations avec différents types de parties génératrices en discutant de leur intérêt (ordre, simplicité de \mathcal{A}_5 par exemple). On peut, en utilisant des parties génératrices pertinentes, présenter le pivot de GAUSS, le calcul de l'inverse ou du rang d'une matrice, le groupe des isométries d'un triangle équilatéral. Éventuellement, il est possible de discuter des conditions nécessaires et suffisantes pour que $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ soit cyclique ou la détermination de générateurs du groupe diédral.

On illustre comment la connaissance de parties génératrices s'avère très utile dans certaines situations, par exemple pour l'analyse de morphismes de groupes, ou pour montrer la connexité par arcs de certains sous-groupes de $GL_n(\mathbf{R})$.

Pour aller plus loin, on peut s'intéresser à la présentation de certains groupes par générateurs et relations. Il est également possible de parler du logarithme discret et de ces applications à la cryptographie (algorithme de DIFFIE-HELLMAN, cryptosystème de EL GAMAL).

120 : Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

Il est attendu de construire rapidement $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, puis d'en décrire les éléments inversibles, les diviseurs de zéro et les idéaux. Ensuite, le cas où l'entier n est un nombre premier doit être étudié. La fonction

indicatrice d'EULER ainsi que le théorème chinois et sa réciproque sont incontournables. Il est naturel de s'intéresser à la résolution des systèmes de congruences.

Les applications sont très nombreuses. Les candidates et candidats peuvent, par exemple, choisir de s'intéresser à la résolution d'équations diophantiennes (par réduction modulo n bien choisi) ou bien au cryptosystème RSA. Si des applications en sont proposées, l'étude des morphismes de groupes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ ou le morphisme de FROBENIUS peuvent figurer dans la leçon.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent poursuivre en donnant une généralisation du théorème chinois lorsque deux éléments ne sont pas premiers entre eux, s'intéresser au calcul effectif des racines carrées dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, au logarithme discret, ou à la transformée de FOURIER rapide.

121 : Nombres premiers. Applications.

Le sujet de cette leçon est très vaste. Elle doit donc être abordée en faisant des choix qui devront être clairement motivés. On attend une étude purement interne à l'arithmétique des entiers, avec des applications dans différents domaines : théorie des corps finis, théorie des groupes, arithmétique des polynômes, cryptographie, etc. On peut définir certaines fonctions importantes en arithmétique, les relier aux nombres premiers et illustrer leurs utilisations. Il est recommandé de s'intéresser aux aspects algorithmiques du sujet (tests de primalité). La réduction modulo p n'est pas hors-sujet et constitue un outil puissant pour résoudre des problèmes arithmétiques simples. La répartition des nombres premiers doit être évoquée : certains résultats sont accessibles dans le cadre du programme du concours, d'autres peuvent être admis et cités pour leur importance culturelle.

122 : Anneaux principaux. Exemples et applications.

Cette leçon ne doit pas se cantonner aux aspects théoriques. L'arithmétique des anneaux principaux doit être décrite et les démonstrations doivent être maîtrisées (lemme d'EUCLIDE, théorème de GAUSS, décomposition en irréductibles, PGCD et PPCM, équations de type $ax+by = d$, etc.). On doit présenter des exemples d'utilisation effective du lemme chinois. Les anneaux euclidiens représentent une classe importante d'anneaux principaux et l'algorithme d'EUCLIDE a toute sa place dans cette leçon pour effectuer des calculs. Les applications en algèbre linéaire ne manquent pas et doivent être mentionnées (par exemple, le lemme des noyaux ou la notion de polynôme minimal pour un endomorphisme, pour un endomorphisme relativement à un vecteur ou pour un nombre algébrique). Si les anneaux classiques \mathbf{Z} et $\mathbf{K}[X]$ doivent impérativement figurer, il est possible d'en évoquer d'autres (décimaux, entiers de GAUSS $\mathbf{Z}[i]$ ou d'EISENSTEIN $\mathbf{Z}[e^{2i\pi/3}]$) accompagnés d'une description de leurs inversibles, de leurs irréductibles, en lien avec la résolution de problèmes arithmétiques (équations diophantiennes).

Les candidates et candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant à l'étude des réseaux, à des exemples d'anneaux non principaux, par exemple $Z[X]$ ou $K[X, Y]$. À ce sujet, il sera fondamental de savoir déterminer les unités d'un anneau, et leur rôle au moment de la décomposition en facteurs premiers. De même, la résolution des systèmes linéaires sur \mathbf{Z} ou le calcul effectif des facteurs invariants de matrices à coefficients dans un anneau principal peuvent être présentés en lien avec ce sujet.

123 : Corps finis. Applications.

La construction des corps finis doit être connue et une bonne maîtrise des calculs dans les corps finis est indispensable. Le calcul des degrés des extensions, le théorème de la base télescopique, les injections des divers \mathbf{F}_q sont incontournables. La structure du groupe multiplicatif doit aussi être connue.

Des applications des corps finis (y compris pour \mathbf{F}_q avec q non premier !) ne doivent pas être oubliées. Par exemple, l'étude de polynômes à coefficients entiers et de leur irréductibilité peut figurer dans cette leçon. L'étude des carrés dans un corps fini et la résolution d'équations de degré 2 sont des pistes intéressantes. Les candidates et candidats peuvent aller plus loin en détaillant des codes correcteurs ou en étudiant l'irréductibilité des polynômes à coefficients dans un corps fini.

125 : Extensions de corps. Exemples et applications.

Les extensions de degré fini, le théorème de la base télescopique et ses applications à l'irréductibilité de certains polynômes, ainsi que les corps finis, sont incontournables. Il est souhaitable d'introduire la notion d'élément algébrique et d'extension algébrique en en donnant des exemples. Il faut savoir calculer le polynôme minimal d'un élément algébrique dans des cas simples, notamment pour quelques racines de l'unité. La leçon peut être illustrée par des exemples d'extensions quadratiques et leurs applications en arithmétique, ainsi que par des extensions cyclotomiques.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent montrer que l'ensemble des nombres algébriques forme un corps algébriquement clos, par exemple en expliquant comment l'utilisation du résultant permet de calculer des polynômes annulateurs de sommes et de produits de nombres algébriques. Il est possible de s'intéresser aux nombres constructibles à la règle et au compas, et éventuellement s'aventurer en théorie de GALOIS.

127 : Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.

Le jury souhaite proposer une leçon qui offre une ouverture large autour du thème des nombres et des corps de nombres utilisés en algèbre ou en géométrie. L'objectif n'est pas d'en présenter le plus possible, mais plutôt d'en choisir certains, suffisamment variés, en en expliquant la genèse et en soulignant leur intérêt par des applications pertinentes. Les nombres décimaux, dyadiques, etc. fournissent des ensembles de nombres dont l'étude, si elle est accompagnée d'applications pertinentes, a sa place dans cette leçon. Les questions d'approximation diophantienne et leur lien avec les fractions continues, sans toutefois être un attendu de la leçon, entrent dans la suite logique de ce type de considération.

Le corps des nombres algébriques, ainsi que certains de ses sous-corps particuliers, comme celui formé par l'ensemble des nombres constructibles ou des sous-anneaux formés par certains ensembles d'entiers algébriques constituent des pistes d'étude. Les candidates et candidats qui maîtrisent ces notions pourront aussi s'aventurer du côté des nombres de Pisot.

La transcendance de π et celle de e sont des résultats à connaître, on pourra éventuellement en donner des applications, mais les démonstrations de ces résultats non triviaux ne sont pas exigibles. L'irrationalité de nombres remarquables ($\sqrt{2}$, nombre d'or, e , π) peut être abordée. Étudier les propriétés algébriques de certains ensembles de nombres (par exemple du type $\mathbb{Z}[\omega]$ où ω est un nombre algébrique) peut être une piste intéressante et mener à des applications en arithmétique.

L'utilisation des nombres complexes ou, pour aller plus loin, des quaternions, en géométrie ou en arithmétique constitue aussi une piste exploitable pour cette leçon.

141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

Les généralités sur les algèbres de polynômes à une variable sont supposées connues. Le bagage théorique permettant de définir corps de rupture et corps de décomposition doit être présenté. Ces notions doivent être illustrées dans différents types de corps (réels, rationnels, corps finis) ; les corps finis peuvent être illustrés par des exemples de polynômes irréductibles de degré 2, 3, 4 sur \mathbf{F}_2 ou \mathbf{F}_3 . Il est nécessaire de présenter des critères d'irréductibilité de polynômes et les polynômes minimaux de quelques nombres algébriques, par exemple les polynômes cyclotomiques. Le théorème de la base télescopique, ainsi que les utilisations arithmétiques (utilisation de la divisibilité) que l'on peut en faire dans l'étude de l'irréductibilité des polynômes sont incontournables. Des applications du corps de décomposition doivent être mentionnées, par exemple en algèbre linéaire.

Pour aller plus loin, on peut montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur le corps \mathbf{Q} des rationnels est un corps algébriquement clos, s'intéresser aux nombres constructibles à la règle et au compas, et éventuellement s'aventurer en théorie de GALOIS.

142 : PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

Le candidat doit prendre soin de différencier le cadre théorique des anneaux factoriels ou principaux dans lequel sont définis les PGCD et PPCM et dans lequel s'appliquent les énoncés des théorèmes proposés et le cadre euclidien fournissant les algorithmes. Le champ d'étude de cette leçon ne peut se limiter au cas de \mathbf{Z} , mais la leçon peut opportunément s'illustrer d'exemples élémentaires d'anneaux euclidiens, comme \mathbf{Z} et $\mathbf{K}[X]$.

Une part substantielle de la leçon doit être consacrée à la présentation d'algorithmes : algorithme d'EUCLIDE, algorithme binaire, algorithme d'EUCLIDE étendu. Il est possible d'en évaluer le nombre d'étapes dans les pires cas et faire le lien avec les suites de FIBONACCI.

Des applications élémentaires sont particulièrement bienvenues : calcul de relations de BEZOUT, résolutions d'équations diophantiennes linéaires, inversion modulo un entier ou un polynôme, calculs d'inverses dans les corps de rupture, les corps finis. On peut aussi évoquer le théorème chinois effectif, la résolution d'un système de congruences et faire le lien avec l'interpolation de LAGRANGE.

Pour aller plus loin, on peut évoquer le rôle de l'algorithme d'EUCLIDE étendu dans de nombreux algorithmes classiques en arithmétique (factorisation d'entiers, de polynômes, etc.). Décrire l'approche matricielle de l'algorithme d'EUCLIDE et l'action de $SL_2(\mathbf{Z})$ sur \mathbf{Z}^2 est tout à fait pertinent. On peut aussi établir l'existence d'un supplémentaire d'une droite dans \mathbf{Z}^2 , ou d'un hyperplan de \mathbf{Z}^n , examiner l'éventuelle possibilité de compléter un vecteur de \mathbf{Z}^n en une base. On peut aussi étudier les matrices à coefficients dans un anneau principal ou euclidien, et, de manière plus avancée, la forme normale d'HERMITE et son application à la résolution d'un système d'équations diophantiennes linéaires. De même, aborder la forme normale de SMITH, et son application au théorème de la base adaptée, permet de faire le lien avec la réduction des endomorphismes *via* le théorème des invariants de similitude. La leçon invite aussi, pour des candidates et candidats maîtrisant ces notions, à décrire le calcul de PGCD dans $\mathbf{Z}[X]$ et $\mathbf{K}[X, Y]$, avec des applications à l'élimination de variables. On peut rappeler les relations entre PGCD et résultant et montrer comment obtenir le PGCD en échelonnant la matrice de SYLVESTER. Sur l'approximation diophantienne, on peut enfin envisager le développement d'un rationnel en fraction continue et l'obtention d'une approximation de PADÉ-HERMITE à l'aide de l'algorithme d'EUCLIDE, la recherche d'une relation de récurrence linéaire dans une suite ou le décodage des codes BCH.

144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications

Dans cette leçon, il est indispensable de bien définir l'ordre de multiplicité d'une racine (définition algébrique et analytique, quand c'est possible). Les fonctions symétriques élémentaires et les relations entre coefficients et racines doivent être maîtrisées et pouvoir être mises en œuvre. Des méthodes, même élémentaires, de localisation des racines ont toute leur place et peuvent déboucher sur des résultats de topologie à propos de la continuité des racines.

Il est pertinent d'introduire la notion de polynôme scindé et de citer le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS. On peut faire apparaître le lien entre la recherche des racines d'un polynôme et la réduction des matrices. Les candidates et candidats peuvent également s'intéresser aux racines des polynômes orthogonaux, ou aux règles des signes de DESCARTES et de STURM. L'étude des propriétés des nombres algébriques ont leur place dans cette leçon. La théorie des corps et le cas particulier des corps finis peuvent aussi être évoqués de façon pertinente.

Les candidates et candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant à des problèmes de localisation des valeurs propres, comme les disques de GERSHGORIN ou au calcul effectif d'expressions polynomiales symétriques des racines d'un polynôme.

Il ne s'agit par contre en aucun cas d'adapter le plan de la leçon 141 : l'irréductibilité des polynômes peut être évoquée mais ne doit pas être l'élément central de la leçon.

148 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il est indispensable de présenter les résultats fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves. Il est en particulier important de savoir justifier pourquoi un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est aussi de dimension finie.

On peut montrer, sur des exemples, comment la dimension finie intervient dans la démonstration de certains résultats (récurrence sur la dimension, égalité de sous-espaces par inclusion et égalité des dimensions, isomorphisme par injectivité et dimension, etc.). À cette occasion, on pourra signaler des résultats qui ne subsistent pas en dimension infinie. Le pivot de GAUSS ainsi que les diverses notions et caractérisations du rang trouvent leur place dans cette leçon. Les applications sont nombreuses : existence de polynômes annulateurs, dimension de l'espace des formes n -linéaires alternées en dimension n , isomorphisme avec le dual dans le cadre euclidien et théorème de RIESZ, espaces de solutions d'équations différentielles ordinaires, caractérisation des endomorphismes diagonalisables, décomposition d'isométries en produits de réflexions, dimensions des représentations irréductibles d'un groupe fini, théorie des corps finis, etc.

Les caractérisations du rang peuvent aussi être utilisées pour démontrer l'invariance du rang par extension de corps, ou pour établir des propriétés topologiques (sur \mathbf{R} ou \mathbf{C}). Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent déterminer des degrés d'extensions dans la théorie des corps ou s'intéresser aux nombres algébriques. Il est également possible d'explorer des applications en analyse comme les extréma liés. Dans un autre registre, il est pertinent d'évoquer la méthode des moindres carrés dans cette leçon, par exemple en faisant ressortir la condition de rang maximal pour garantir l'unicité de la solution et s'orienter vers les techniques de décomposition en valeurs singulières pour le cas général. On peut alors naturellement analyser l'approximation d'une matrice par une suite de matrices de faible rang.

149 : Déterminant. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il faut commencer par définir correctement le déterminant et savoir démontrer ses propriétés fondamentales (en particulier le fait que l'espace des formes n -linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1). La distinction entre le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée et le déterminant d'un endomorphisme doit être comprise. L'interprétation en termes de volume est essentielle. Le calcul explicite est important, mais le jury ne peut se contenter d'un déterminant de VANDERMONDE ou d'un déterminant circulant. Les opérations élémentaires permettant de calculer des déterminants doivent être présentées et illustrées. Parmi les applications possibles, on peut citer le polynôme caractéristique, les déterminants de GRAM (permettant des calculs de distances), le déterminant jacobien (utile en calcul intégral et en probabilités), donner des exemples d'utilisation du déterminant en géométrie (coordonnées barycentriques, colinéarité, etc.) ou son rôle dans l'étude des formes quadratiques. Il est bienvenu d'illustrer la continuité du déterminant par une application. On pourra aussi s'intéresser à sa différentielle.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'intéresser aux calculs de déterminants sur \mathbf{Z} . Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent aussi trouver leur place dans cette leçon pour des candidates et candidats ayant une pratique de ces notions.

150 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de résultats autour de la réduction ; les polynômes d'endomorphismes doivent y occuper une place importante. Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $\mathbf{K}[u]$, en particulier en connaître la dimension, et aux liens entre réduction de l'endomorphisme

phisme u et structure de l'algèbre $\mathbf{K}[u]$. Il est ensuite possible de s'intéresser aux propriétés globales de cette algèbre (inversibles, condition nécessaire et suffisante assurant que ce soit un corps...). De même il est important de mettre en évidence les liens entre les idempotents et la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques.

Le lemme des noyaux, les polynômes caractéristiques et minimaux doivent figurer dans la leçon. Il faut bien préciser que, dans la réduction de DUNFORD, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et en connaître des conséquences théoriques et pratiques.

On attend que la candidate ou le candidat soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). L'aspect applications est trop souvent négligé. Il est par exemple possible d'envisager des applications au calcul de A^k à l'aide d'un polynôme annulateur, aux calculs d'exponentielles de matrices ou de mener l'analyse spectrale de matrices stochastiques.

Pour aller plus loin, la candidate ou le candidat pourra étudier des équations matricielles et de calcul fonctionnel, avec par exemple l'étude de l'extraction de racines ou du logarithme.

151 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Dans cette leçon, il faut présenter des propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études détaillées sont les bienvenues, par exemple dans le cas d'une matrice diagonalisable ou dans le cas d'une matrice nilpotente d'indice maximum.

L'étude des endomorphismes cycliques et des endomorphismes semi-simples trouvent tout à fait leur place dans cette leçon. Dans le cas des corps \mathbf{R} ou \mathbf{C} , on pourra, si on le souhaite, caractériser ces derniers par la fermeture de leur orbite.

Il ne faut pas oublier d'examiner le cas des sous-espaces stables par des familles d'endomorphismes. Ceci peut déboucher par exemple sur des propriétés des endomorphismes commutant entre eux.

La réduction des endomorphismes normaux et l'exemple de résolutions d'équations matricielles peuvent être présentés en applications.

La décomposition de FROBENIUS constitue également une application intéressante de cette leçon. Pour aller plus loin, on peut envisager de développer l'utilisation de sous-espaces stables en théorie des représentations.

152 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Dans cette leçon, on attend des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères de diagonalisabilité. On doit notamment savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est encore diagonalisable. Il ne faut pas oublier de parler du cas des endomorphismes symétriques, ni les familles commutantes d'endomorphismes diagonalisables. On peut étudier certaines propriétés topologiques en prenant le soin de donner des précisions sur le corps \mathbf{K} et la topologie choisie pour $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Les candidates et candidats peuvent s'intéresser aux propriétés de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable. On peut dénombrer les endomorphismes diagonalisables dans les corps finis, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être faits avec la théorie des représentations et la transformée de FOURIER rapide.

153 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

Cette leçon doit aborder le bagage théorique propre aux vecteurs propres et aux valeurs propres et mettre en lumière l'exploitation de techniques d'algèbre ou d'analyse pour aborder leur recherche. Après

avoir exploré la détermination théorique exacte des éléments propres, on s'intéresse à des exemples de matrices dont les éléments propres sont remarquables (matrices compagnons, matrices circulantes, matrices d'ordre fini, matrices stochastiques...) et donne des exemples de situations où la connaissance d'éléments propres s'avère utile. On doit connaître les limites du calcul exact, même si le cadre mathématique nécessaire est non exigible et hors programme, et introduire sur \mathbb{R} ou \mathbf{C} une ou plusieurs méthodes itératives, dont on démontre la convergence. On peut citer les méthodes de la puissance, puissance inverse et QR pour la recherche d'éléments propres. Les notions de norme matricielle, de rayon spectral doivent être maîtrisées. Le lien avec la convergence des suites du type $X_{n+1} = AX_n$ doit être connu et illustré. On peut aussi s'intéresser à la localisation des valeurs propres.

Pour aller plus loin, on peut aborder la problématique du conditionnement en distinguant le problème général et le cas particulier des matrices auto-adjointes, s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être faits avec la théorie des représentations et la transformée de FOURIER rapide, ainsi qu'au comportement de la suite des itérées de matrices stochastiques ou plus généralement de matrices à coefficients positifs, au moins dans des cas particuliers.

155 : Exponentielle de matrices. Applications.

Bien que ce ne soit pas une leçon d'analyse, il faut savoir justifier précisément la convergence de la série exponentielle.

Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées en distinguant les cas réel et complexe. Il est souhaitable de connaître l'image par exponentielle de certains sous-ensembles de matrices (ensemble des matrices symétriques, hermitiennes, ou antisymétriques).

La décomposition de DUNFORD multiplicative (décomposition de JORDAN) de $\exp(A)$ trouve toute son utilité dans cette leçon. L'exponentielle en lien avec la décomposition polaire peut s'avérer utile dans l'étude de sous-groupes du groupe linéaire. L'étude du logarithme (quand il est défini) peut être menée dans cette leçon.

Les applications aux équations différentielles méritent d'être présentées sans toutefois constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidates et candidats de proposer ce thème dans un développement de cette leçon, sauf à avoir bien compris comment les apports algébriques permettent ici de simplifier les conclusions analytiques.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent s'aventurer vers les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire (on peut alors voir si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $GL(n, \mathbf{R})$) ou vers les algèbres de LIE.

156 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Il est indispensable de connaître les polynômes caractéristiques et minimaux d'un endomorphisme nilpotent et de savoir justifier son caractère trigonalisable. Il est bon de savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme trigonalisable (respectivement nilpotent) sur un sous-espace stable est encore trigonalisable (respectivement nilpotent). L'utilisation des noyaux itérés est fondamentale dans cette leçon, par exemple pour déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables. Il est intéressant de présenter des conditions suffisantes de trigonalisation simultanée; l'étude des endomorphismes cycliques a toute sa place dans cette leçon. L'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent aussi présenter la décomposition de Jordan ou la décomposition de FROBENIUS, ou des caractérisations topologiques des endomorphismes nilpotents, ou encore des propriétés topologiques de l'ensemble des endomorphismes nilpotents.

157 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Le théorème spectral est indispensable dans cette leçon. Une place importante mérite d'être faite au cas particulier des matrices symétriques positives et définies positives; les candidates et candidats doivent connaître leurs propriétés fondamentales, leur rôle, et la structure de leur ensemble. La notion de signature pourra être présentée en montrant comment elle détermine la classe de congruence d'une matrice symétrique réelle. L'action du groupe linéaire et du groupe orthogonal sur l'espace des matrices symétriques peut donner un cadre naturel à cette leçon. Le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes est incontournable. L'orthogonalisation simultanée est un résultat important de cette leçon. Il faut en connaître les applications géométriques aux quadriques.

Les candidates et candidats maîtrisant ces notions pourront illustrer la leçon en évoquant le cas des matrices de covariance de vecteurs aléatoires et discuter les conditions en assurant le caractère inversible, la décomposition de CHOLESKY, qui a de nombreuses applications pour le calcul scientifique (en lien avec la résolution de systèmes linéaires ou de problèmes de moindres carrés) ou en probabilités (construction d'un vecteur gaussien de matrice de covariance donnée à partir d'un vecteur gaussien de matrice de covariance identité), ou la décomposition en valeurs singulières d'une matrice (particulièrement importante pour le traitement massif de données).

158 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Dans cette leçon, le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Le théorème spectral pour les auto-adjoints et la réduction des endomorphismes orthogonaux sont des résultats incontournables. Le jury met les candidates et candidats en garde sur le fait que le lemme des noyaux ou la décomposition de DUNFORD ne sont pas des développements adaptés à cette leçon. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur. De même la réduction d'endomorphismes normaux peut être évoquée.

L'étude des projections orthogonales (en lien avec le calcul de distances), des rotations, des réflexions, des renversements, etc. fournit des exemples dignes d'intérêt. Une illustration pertinente peut s'appuyer sur la description de problèmes de moindres carrés en faisant ressortir le rôle de l'hypothèse de rang plein de A sur le caractère inversible de $A^T A$.

159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon; celle-ci permet de mettre en évidence des correspondances entre un morphisme et son morphisme transposé, entre un sous-espace et son orthogonal (canonique), entre les noyaux et les images ou entre les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Le passage d'une base à sa base duale ou antéduale, ainsi que les formules de changement de base, doivent être maîtrisés. On pourra s'intéresser aux cas spécifiques où l'isomorphisme entre l'espace et son dual est canonique (cas euclidien, cas des matrices).

Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans via la dualité est important dans cette leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans. Le lien avec la résolution des systèmes linéaires doit être fait.

Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique ou analytique. Il faut que les développements proposés soient en lien direct avec la leçon. Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction à valeurs réelles est une forme linéaire semble incontournable.

Pour des candidates et candidats ayant une pratique de ces notions, il est possible d'illustrer la leçon avec un point de vue probabiliste, en rappelant que la loi d'un vecteur aléatoire X est déterminée par les lois unidimensionnelles de $X \cdot u$ pour tout vecteur u .

161 : Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.

Les généralités sur les espaces euclidiens et affines sont supposées connues. La leçon reste contenue dans le cadre des espaces de dimension finie.

La notion de distance est abordée dans le cadre de la norme euclidienne : les projections orthogonales doivent être mentionnées. Les déterminants de Gram et des inégalités du type des inégalités d'Hadamard ont toute leur place dans cette leçon.

La classification des isométries en dimension 2 et 3 est exigible. En dimension 3, il faut savoir classer les rotations et connaître les liens avec la réduction. On peut aussi penser aux isométries laissant stables certains objets en dimension 2 et 3.

Il faut savoir justifier qu'une isométrie est affine, pouvoir donner des générateurs du groupe des isométries affines et savoir composer des isométries affines. Les groupes de similitudes peuvent également être abordés.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent évoquer l'interprétation de l'écart-type comme une distance, et présenter la matrice de covariance comme un exemple pertinent de matrice de Gram. Ainsi, les déterminants de GRAM permettent de calculer l'erreur commise dans le cadre de prédictions affines.

162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Dans cette leçon, les techniques liées au simple pivot de GAUSS constituent l'essentiel des attendus. Il est impératif de faire le lien avec la notion de système échelonné (dont on donnera une définition précise et correcte) et de situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire, sans oublier la dualité. Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt algorithmique des méthodes présentées doit être expliqué, éventuellement en l'illustrant par des exemples simples (où l'on attend parfois une résolution explicite).

Parmi les conséquences théoriques, les candidates et candidats peuvent notamment donner des systèmes de générateurs de $GL_n(\mathbf{K})$ et $SL_n(\mathbf{K})$. Il est aussi pertinent de présenter les relations de dépendance linéaire sur les colonnes d'une matrice échelonnée qui permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de $GL(n, \mathbf{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ donnée par $(P, A) \mapsto PA$.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent exploiter les propriétés des systèmes d'équations linéaires pour définir la dimension des espaces vectoriels et obtenir une description de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels donnés par des systèmes générateurs, ou d'une somme de deux sous-espaces vectoriels donnés par des équations.

De même, des discussions sur la résolution de systèmes sur \mathbf{Z} et la forme normale de HERMITE peuvent trouver leur place dans cette leçon. Enfin, il est possible de présenter les décompositions LU et de CHOLESKI, en évaluant le coût de ces méthodes ou encore d'étudier la résolution de l'équation normale associée aux problèmes des moindres carrés et la détermination de la solution de norme minimale par la méthode de décomposition en valeurs singulières.

170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.

La leçon débute par une étude générale des formes quadratiques, indépendamment du corps. On peut, par exemple, adopter le point de vue de l'action par congruence du groupe linéaire sur l'espace des matrices symétriques, ce qui permet de dégager quelques invariants (rang, discriminant), de s'interroger sur le nombre et la structure des orbites. L'algorithme de GAUSS doit être énoncé et pouvoir être mis en œuvre sur une forme quadratique simple. En ajout de la classification sur \mathbb{R} , le candidat pourra parler de la classification des formes quadratiques sur le corps des complexes. Il est aussi possible de s'intéresser à la classification sur les corps finis. On peut s'intéresser au groupe orthogonal (générateurs, structure du groupe quand l'espace est de dimension 2). Le lien avec la dualité des espaces vectoriels

permet de comprendre le sens de la décomposition de Gauss et de comparer les notions de sous-espace orthogonal, en s'interrogeant sur les conditions pour que l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel en soit un supplémentaire. La notion d'isotropie doit être connue. On pourra rattacher cette notion à la géométrie différentielle. Pour aller plus loin, on peut s'intéresser aux espaces hyperboliques, ou à l'étude de la géométrie d'un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'une forme quadratique de signature (p, q) , notamment la structure du cône de lumière de l'espace-temps de Minkowski, avec la traduction géométrique de la notion d'orthogonal dans ce cas et des propriétés du groupe $O(p, q)$.

171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Dans cette leçon, la loi d'inertie de SYLVESTER doit être présentée ainsi que l'orthogonalisation simultanée. L'algorithme de GAUSS doit être énoncé et pouvoir être mis en œuvre sur une forme quadratique simple; le lien avec la signature doit être clairement énoncé et la signification géométrique des deux entiers r et s composant la signature d'une forme quadratique réelle doit être expliquée. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante qui mérite d'être présentée dans cette leçon.

La définition et les propriétés classiques des coniques d'un plan affine euclidien doivent être connues. On peut présenter les liens entre la classification des formes quadratiques et celles des coniques; de même il est intéressant d'évoquer le lien entre le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$. La classification des quadriques n'est pas exigible, mais des situations particulières doivent pouvoir être discutées.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent aussi aller vers la théorie des représentations et présenter l'indicatrice de SCHUR-FROBENIUS qui permet de réaliser une représentation donnée sur le corps des réels.

181 : Convexité dans \mathbf{R}^n . Applications en algèbre et en géométrie.

Dans cette leçon, la notion de convexité doit être abordée d'un point de vue géométrique : les barycentres sont incontournables, et on doit, à ce titre, pouvoir utiliser la notion de coordonnées barycentriques. Les exemples géométriques sont importants et on espère que les notions introduites soient illustrées par des figures.

Il est important de parler d'enveloppe convexe et de savoir dessiner l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points dans le plan; le théorème de GAUSS-LUCAS trouve parfaitement sa place dans cette leçon. Il semble approprié d'évoquer les points extrémaux, ainsi que des applications qui en résultent. Par ailleurs, il est important d'avoir compris le lien entre fonctions convexes et ensembles convexes. L'étude de certains ensembles convexes de matrices et de leurs propriétés rentre tout à fait dans le cadre de la leçon : on peut penser au cône des matrices symétriques (définies) positives, sur lequel le déterminant est log-convexe.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent présenter le lemme de FARKAS, le théorème de séparation de HAHN-BANACH, les théorèmes de HELLY et de CARATHEODORY, ou parler des sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbf{R})$.

190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Il est nécessaire de dégager clairement différentes méthodes de dénombrement et de les illustrer d'exemples significatifs. De nombreux domaines des mathématiques sont concernés par des problèmes de dénombrement, cet aspect varié du thème de la leçon doit être mis en avant. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. De plus, il est naturel de calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités. Il est important de connaître l'interprétation ensembliste de la somme des coefficients binomiaux et ne pas se contenter d'une justification par le binôme de NEWTON. L'introduction des corps finis (même en se limitant aux cardinaux premiers) permet de

créer un lien avec l'algèbre linéaire. Les actions de groupes peuvent également conduire à des résultats remarquables.

Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent aussi présenter des applications de la formule d'inversion de MÖEBIUS ou de la formule de BURNSIDE. Des candidates et candidats ayant un bagage probabiliste pourront explorer le champ des permutations aléatoires, en présentant des algorithmes pour générer la loi uniforme sur le groupe symétrique S_n et analyser certaines propriétés de cette loi uniforme (points fixes, cycles, limite $n \rightarrow +\infty$...).

191 : Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie.

Le jury souhaite proposer une leçon qui offre une ouverture large autour du thème de la géométrie. Avec cet intitulé, les candidates et candidats sont libres de présenter des résultats et des exemples très variés en lien avec la géométrie. L'objectif n'est pas de couvrir le plus d'aspects possible, mais plutôt d'en proposer certains suffisamment consistants et variés. À partir du moment où ils sont de nature géométrique, tous les éléments du programme peuvent être pertinents. En contrepartie de cette liberté laissée aux candidates et candidats, une difficulté est de structurer la présentation des objets et des notions choisis. Ainsi, plusieurs approches sont possibles pour organiser cette leçon, par exemple :

- en regroupant les outils par « famille » : outils matriciels (repérage des points par des matrices colonnes, des transformations par des matrices, rang, réduction, etc.), outils polynomiaux (formes quadratiques, déterminant, résultant, etc.), outils structurels (groupes, corps) ;
- ou par niveau d'abstraction/de généralité (nombres réels, complexes, matrices, groupes...);
- ou par type d'objectifs (identifier des objets géométriques, les mesurer, les classifier, démontrer des résultats en utilisant des transformations géométriques...)

Il est aussi possible de se focaliser sur un seul type d'outils (par exemple algèbre linéaire, géométrie affine ou groupes) en détaillant plusieurs applications en géométrie ou sur une question géométrique fouillée à l'aide de diverses techniques (par exemple sur des problèmes impliquant des figures géométriques comme les cercles et triangles, les polygones et polyèdres réguliers, etc.). Des situations « élémentaires », dans le plan, permettent certainement de mettre en valeur des connaissances et un recul mathématique. Il faut bien éviter l'écueil d'un catalogue fastidieux ou celui qui consisterait à recycler directement le contenu d'une autre leçon avec un vague habillage géométrique.

Parmi les nombreux éléments qui peuvent être discutés, on peut indiquer :

- les notions de distance, aire, volume. Notamment les propriétés de la matrice de GRAM, le lien entre déterminant et aire d'un parallélogramme ou volume d'un parallélépipède, la construction du produit vectoriel et du produit mixte,... peuvent être exploités avec pertinence dans cette leçon. On peut ainsi être amené à étudier l'aire balayée par un arc paramétré du plan, la position d'un point par rapport à un cercle circonscrit à un triangle, etc. Le déterminant de CAYLEY-MENGER permet de mettre en évidence des conditions pour que $n + 1$ points de \mathbf{R}^n forment une base affine, ou que $n + 2$ points de \mathbf{R}^n soient cocycliques. Dans une autre direction, la division euclidienne dans \mathbf{Z} donne une preuve d'une forme du théorème de la base adaptée, avec pour conséquence le calcul du volume (d'une maille élémentaire) d'un sous réseau de \mathbf{Z}^n comme étant le déterminant d'un système générateur dans la base canonique.
- l'apport de l'algèbre linéaire à la géométrie. On peut ainsi exploiter le calcul matriciel et les techniques de réduction pour mettre en évidence des informations de nature géométrique (avec les exemples fondamentaux des homothéties, projections, symétries, affinités, rotations, la classification des isométries vectorielles, etc.). On peut être alors amené à présenter le théorème de CARTAN-DIEUDONNÉ sur la décomposition d'isométries euclidiennes en produit de réflexions ou encore évoquer une (ou des) interprétation(s) géométrique(s) de la décomposition en valeurs singulières. Dans cette même veine, la leçon peut être orientée vers la géométrie affine, en s'adossant à la théorie des espaces vectoriels pour définir certains objets (espaces et sous-espaces affines,

applications affines, repères affines, etc.), ce qui permet, par exemple, d'établir ainsi certains résultats classiques, comme les théorèmes de THALÈS, PAPPUS, DESARGUES,...

- l'analyse des formes quadratiques permet d'aborder des problèmes géométriques : étude des coniques, quadriques, classification des quadriques de \mathbf{R}^n , interprétation géométrique de la signature, application des méthodes de réduction, etc.
- la théorie des groupes est un champ naturel pour cette leçon (mais qui n'est cependant pas indispensable) : groupes de transformations (isométries, déplacements, similitudes, translations), composition de transformations, mise en évidence d'invariants fondamentaux (angle, birapport, excentricité d'une conique). Il est possible de se focaliser sur des groupes de transformations préservant une certaine structure géométrique et en distinguant parmi eux les groupes finis (groupes d'isométries classiques), les groupes discrets infinis (avec des translations, groupes de pavages) et, pour aller plus loin, les groupes continus (groupes de LIE).
- les techniques de convexité constituent aussi un champ fructueux : le théorème de séparation par un hyperplan dans \mathbf{R}^n de HAHN-BANACH et, en corollaire, le théorème de HELLY permettent par exemple d'établir des propriétés intéressantes sur les cordes de convexes compacts.
- certains candidats et candidates peuvent trouver intérêt à aborder les questions d'intersection de courbes polynomiales, qui permettent notamment de mettre en œuvre le théorème de BEZOUT et des méthodes exploitant la notion de résultant.
- un grand nombre de problèmes de géométrie peuvent être traités en exploitant le formalisme des nombres complexes. Il est tout à fait approprié d'évoquer l'étude des inversions et, en particulier, la possibilité de ramener un cercle à une droite et inversement ; la formule de PTOLÉMÉE illustre bien l'utilisation de cet outil. On peut parler des suites définies par récurrence par une homographie et leur lien avec la réduction dans $SL_2(\mathbf{C})$ et aborder la construction de la sphère de RIEMANN.
- les problématiques de la construction à la règle et au compas constituent un autre axe pertinent pour cette leçon, avec le théorème de WANTZEL, et peuvent conduire à s'intéresser à des extensions de corps.

Comme dans le cas des autres leçons, il est tout à fait bienvenu de chercher à illustrer cette leçon par des exemples issus de l'analyse, des probabilités, de la statistique (par exemple en évoquant l'interprétation géométrique de l'analyse en composantes principales), du calcul formel (par exemple avec les applications du résultant) ou du calcul scientifique (par exemple en présentant des problématiques de géométrie computationnelle, comme le calcul d'enveloppe convexe, les algorithmes de triangulation de DELAUNAY, les diagrammes de VORONOI...). Les thèmes en lien avec la géométrie projective ou la géométrie algébrique peuvent permettre à certains candidats et candidates de présenter des résultats très avancés. Cette leçon nécessite une préparation très personnelle et réfléchie. Les exemples et les résultats qui y sont présentés ont vocation à inciter les candidats et candidates à enrichir les autres leçons de cette épreuve d'exemples issus de la géométrie.

3 Épreuve orale d'analyse et probabilités

201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications. Sans sortir du programme, il y a au moins deux thèmes très riches pour nourrir le plan : espaces de fonctions continues sur un compact, espaces L^p sur le cercle ou sur la droite réelle.

Sur le premier sujet, le jury attend une bonne familiarité avec la convergence uniforme et son utilisation pour justifier des régularités. Le théorème de Stone-Weierstrass est évidemment incontournable, dans ses différentes versions, constructives ou non. La complétude peut également être exploitée, par exemple en lien avec les équations différentielles ou intégrales.

Sur le second, la convolution et ses applications, ainsi que l'analyse de Fourier fournissent un large terrain d'exploration.

Plusieurs prolongements s'offrent aux candidates et candidats solides : théorème de Baire et ses innombrables applications, espaces de fonctions holomorphes (théorème de Montel et ses applications, espaces de Hardy, etc.), espaces de fonctions régulières (fonctions lipschitziennes, C^k , classe de Schwartz), algèbres de Banach de fonctions (algèbre de convolution $L^1(\mathbf{R})$, algèbre du disque, algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, etc.), étude des parties compactes de $C(K)$ (K compact) voire de L^p .

203 : Utilisation de la notion de compacité. Cette leçon ne porte pas sur la compacité en général mais sur son utilisation. On peut songer à plusieurs thèmes : théorèmes d'existence exploitant la compacité, utilisation de la compacité pour obtenir des uniformités.

Sur le premier sujet, on peut s'intéresser à l'utilisation, dans les espaces compacts ou les espaces normés de dimension finie, des valeurs d'adhérence pour prouver des convergences ou des continuités, et bien sûr aux problèmes d'extrema. Un exemple est le théorème d'équivalence des normes sur un espace de dimension finie, qui repose sur un argument de compacité qu'il faut avoir bien compris.

Sur le second, on peut explorer quelques-unes des innombrables applications du théorème de Heine (intégrabilité au sens de Riemann des fonctions continues sur un segment, continuité des translations dans L^p , etc.), mais aussi l'utilisation de sous-recouvrements finis (par exemple pour passer du local au global).

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la caractérisation des espaces normés de dimension finie par la compacité de la boule unité fermée (éventuellement assortie d'applications), aux équations différentielles non linéaires (phénomène de sortie de tout compact), à l'équicontinuité (théorème d'Ascoli), aux familles normales (théorème de Montel), aux opérateurs compacts.

204 : Connexité. Exemples d'applications. Dans cette leçon, une fois les propriétés élémentaires présentées, il convient de mettre en évidence à travers un choix judicieux, non nécessairement exhaustif, d'applications le fait que la connexité formalise l'idée d'espace « d'un seul tenant », que la connexité par arcs permet d'illustrer géométriquement. Du point de vue opérationnel, les deux idées maîtresses sont la préservation de la connexité par image continue, et l'utilisation de la connexité pour passer du local au global.

La seconde est abondamment illustrée dans le domaine du calcul différentiel, des équations différentielles non linéaires (passage d'une unicité locale à une unicité globale), des fonctions holomorphes (principe du prolongement analytique ou du maximum).

En cas de non-connexité, la notion pertinente est celle de composante connexe, dont une première application est la structure des ouverts de \mathbf{R} , et leur mesure. Les exemples issus de l'algèbre linéaire sont bien entendu les bienvenus, à condition de ne pas trop détourner la leçon...

Pour les candidates et candidats solides, de bons prolongements sont le théorème de Runge, l'ensemble

triadique de Cantor comme prototype d'espace métrique compact, parfait et totalement discontinu, la notion de simple connexité.

205 : Espaces complets. Exemples et applications. L'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence. Les illustrations ne manquent pas : existence de limites, utilisation de la convergence absolue ou normale, théorème du point fixe de Picard-Banach et ses applications, prolongement des applications uniformément continues à valeurs dans un espace métrique complet, et leurs innombrables applications.

Le cas particulier des espaces de Hilbert est un riche terrain d'exploration : théorème de projection sur un convexe fermé et ses applications, analyse de Fourier sur le cercle ou sur la droite réelle.

Les espaces L^p peuvent être abordés dans le cadre de cette leçon, mais sous leur angle spécifique d'espaces de Banach.

Pour les candidates et candidats solides, le théorème de Baire fournit d'innombrables applications passionnantes. Ils pourront également songer à la théorie des algèbres de Banach, notamment l'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, ou à l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert de \mathbb{C} muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

206 : Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse. Cette leçon d'exemples est l'occasion d'une réflexion sur de nombreuses parties du programme.

En topologie, il s'agit bien sûr des propriétés spécifiques aux espaces normés de dimension finie, notamment l'utilisation des valeurs d'adhérence, l'équivalence des normes ou encore l'identité entre parties compactes et parties fermées et bornées. D'autres champs d'application sont : la théorie de la mesure (mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}^d), le calcul différentiel (utilisation de matrices jacobiniennes, espaces tangents, extrema liés, etc.), les équations différentielles linéaires, les séries de Fourier et plus généralement l'approximation dans un espace préhilbertien séparable par projection sur des sous-espaces de dimension finie.

Les candidates et candidats solides peuvent aborder la question de l'unicité de la meilleure approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d , ou les liens entre la régularité et la qualité de l'approximation par des polynômes (algébriques ou trigonométriques) voire des fonctions rationnelles. D'autres pistes possibles sont l'étude des propriétés spectrales des opérateurs compacts, ou le théorème de Grothendieck sur les sous-espaces fermés de L^p contenus dans L^∞ .

208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples. Cette leçon est particulièrement vaste, et il convient de faire des choix. Il est inutile de commencer systématiquement le plan de cette leçon par de longs rappels sur les normes : comme toutes les autres, cette leçon ne doit pas tomber dans le formalisme, mais bien proposer des résultats significatifs illustrés par des exemples bien choisis, en particulier de normes équivalentes ou non, ou de calculs de normes subordonnées. En ce qui concerne le contenu, le programme offre de nombreuses possibilités qui permettent aussi de faire un développement conséquent d'un résultat central ou d'un enchaînement de résultats centraux de cette leçon : cas de la dimension finie, intervention de la complétude (en particulier le cas hilbertien), étude de la compacité de la boule unité fermée, lien entre continuité d'une forme linéaire (ou plus généralement, d'une application linéaire de rang fini) et fermeture du noyau...

Pour les candidates et candidats solides, des prolongements possibles sont : les conséquences du théorème de Baire dans le cadre des espaces de Banach (tout particulièrement le théorème de Banach-Steinhaus et son utilisation pour construire des objets pathologiques), le théorème de Hahn-Banach et ses conséquences, la théorie de algèbres de Banach, la détermination de duals topologiques.

209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications. Le programme offre aux candidates et candidats plusieurs pistes très riches pour nourrir cette leçon d'applications significatives : l'approximation uniforme par des polynômes algébriques ou trigonométriques, la régularisation par convolution. Mais on peut également penser à l'approximation des fonctions intégrables sur la droite réelle par des fonctions continues ou plus régulières à support compact.

Les séries de Fourier s'intègrent parfaitement à cette leçon, avec le théorème de Fejér (dans ses versions $L^p(\mathbf{T})$ ou $C(\mathbf{T})$) et ses applications, par exemple à la construction de bases hilbertiennes d'exponentielles complexes dans $L^2(\mathbf{T})$ et ses conséquences.

Voici enfin quelques pistes à réserver aux candidates et candidats solides : le théorème de Runge en analyse complexe, le théorème taubérien de Littlewood, l'unicité de la meilleure approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d , les liens entre la régularité et la qualité de l'approximation par des polynômes (algébriques ou trigonométriques) voire des fonctions rationnelles, l'approximation uniforme par des fonctions lipschitziennes.

213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.

La théorie des espaces de Hilbert est riche. Les propriétés algébriques fondamentales, l'utilisation de la complétude et la projection orthogonale sur les convexes fermés (en particulier les sous-espaces vectoriels fermés) doivent être bien comprises.

L'analyse de Fourier, sur le cercle ou la droite réelle, est évidemment une illustration fondamentale des résultats de cette leçon. Le jury a noté que la théorie L^2 des séries de Fourier n'était pas souvent maîtrisée.

Les concepts de famille orthonormée et de base hilbertienne constituent une source abondante d'applications. Le fait que les polynômes constituent une base hilbertienne de l'espace des fonctions de carré intégrable relativement à certains poids est présenté quasi systématiquement en développement. Peut-être faudrait-il songer à trouver d'autres sources d'inspiration, d'autant que la démonstration du résultat, ainsi que la façon d'en déduire une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{R})$ ne sont pas parfaitement comprises.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux propriétés spectrales des opérateurs autoadjoints compacts d'un espace de Hilbert, à la minimisation de fonctionnelles convexes et coercives sur un espace de Hilbert, ou encore au théorème de Paley-Wiener qui caractérise les fonctions de $L^2(\mathbf{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact, ou encore au théorème d'échantillonnage de Shannon.

214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.

Les deux théorèmes fondamentaux auxquels cette leçon est consacrée offrent une belle utilisation de la complétude, qu'il conviendra d'évoquer. La démonstration de l'un de ces deux théorèmes peut parfaitement faire l'objet d'un des deux développements. On pourra par exemple mettre en pratique, sur des exemples bien choisis, le théorème des fonctions implicites au moins dans le cas de deux variables réelles, pour enrichir le plan avec profit.

Des applications significatives aussi bien en analyse qu'en géométrie sont attendues : problèmes d'optimisation sous contraintes (inégalité de Hölder, inégalité d'Hadamard, etc.), régularité des racines d'un polynôme en fonction des coefficients, etc.

La méthode des multiplicateurs de Lagrange a bien évidemment toute sa place dans cette leçon, à condition qu'elle soit illustrée par des exemples. L'interprétation de l'énoncé en termes d'espace tangent est visuellement éclairante et permet d'éviter les éventuelles confusions résultant de raisonnements purement matriciels.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à l'étude locale d'applications suffisamment régulières (submersions, immersions, théorème du rang constant, lemme de Morse), au lemme de Sard, ainsi qu'aux sous-variétés de \mathbf{R}^n .

215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de \mathbf{R}^n . Exemples et applications.

L'idée de départ de cette leçon est qu'une fonction suffisamment régulière se comporte localement comme une application linéaire. De nombreuses différentielles usuelles (notamment issues de l'algèbre linéaire) peuvent ainsi être obtenues en calculant directement un développement limité. Des exemples significatifs en dimension 2 et 3 pourront venir illustrer la différence fondamentale avec la dimension 1. Les dérivées partielles — lorsqu'elles existent — pourront clarifier l'expression de nombreuses différentielles ainsi que la règle de la chaîne.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la notion de différentielle seconde pour les fonctions de classe C^2 , à la différentielle de l'exponentielle matricielle, ainsi qu'aux points où celle-ci est un difféomorphisme local, aux fonctions harmoniques et à leurs propriétés élémentaires, à la caractérisation des fonctions holomorphes et son interprétation géométrique.

Pour ce qui concerne les applications, de nombreux thèmes relatifs aux leçons 214 ou 219 sont ici appropriés.

218 : Formules de Taylor. Exemples et applications.

La connaissance des différentes formules de Taylor, en une, ou plusieurs variables, de leurs différences et de leurs champs d'applications, allant de la géométrie (par exemple la position d'une courbe ou une surface par rapport à son espace tangent) jusqu'aux probabilités (comme par exemple le théorème central limite), doit constituer le cœur de la leçon. Les énoncés devront être illustrés par des exemples pertinents. En général, le développement de Taylor d'une fonction comprend un terme de reste qu'il est crucial de savoir analyser. Cette analyse impose une bonne compréhension des relations de comparaison (notamment o et O).

Le jury s'attend à ce que le lien entre l'existence d'un développement limité à un ordre n et l'existence d'une dérivée n -ième soit connu. On peut aussi montrer comment les formules de Taylor permettent d'établir le caractère développable en série entière (ou analytique) d'une fonction dont on contrôle les dérivées successives.

Pour les candidates et candidats solides, on peut mentionner des applications comme le lemme de Morse, l'étude locale au voisinage des points stationnaires pour les courbes et des points critiques pour la recherche d'extrema. On peut aussi penser à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégalités contrôlant les dérivées intermédiaires lorsque f et sa dérivée n -ième sont bornées, ou encore à l'analyse de méthodes d'intégration numérique.

219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Cette leçon offre aux candidates et candidats une multitude d'approches possibles : utilisation de la topologie, du calcul différentiel, de la convexité (fonctions convexes, projection sur un convexe fermé et leurs multiples applications), de l'holomorphie.

Les candidates et candidats peuvent proposer des problèmes d'optimisation sous contraintes, si possible autres que la preuve de l'inégalité arithmético-géométrique. À ce sujet, une bonne compréhension de la méthode des multiplicateurs de Lagrange requiert celle de la notion d'espace tangent, qui en donne une justification beaucoup plus claire que certains raisonnements purement matriciels.

Les algorithmes de recherche d'extremums ont également leur place dans cette leçon (méthode de Newton, du gradient à pas optimal, problème des moindres carrés, etc.).

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux diverses versions du principe du maximum (fonctions holomorphes ou harmoniques, équations aux dérivées partielles), au calcul des variations, ou

réfléchir à l'unicité de la meilleure approximation dans divers espaces fonctionnels, à commencer par celle des fonctions continues sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d .

220 : Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.

La théorie de Cauchy-Lipschitz non linéaire est le fondement de cette leçon, et comporte plusieurs points importants : passage du local au global, phénomènes d'explosion en temps fini, etc. La leçon étant orientée vers l'étude d'exemples, il convient d'éviter cependant de consacrer une trop large portion du plan à des théorèmes généraux.

Le nombre des exemples proposés aura avantage à être restreint : il ne s'agit pas de présenter une longue compilation d'exemples à peine effleurés, mais d'en analyser avec soin un petit nombre, choisis pour leur intérêt et dans un souci d'illustrer des méthodes variées.

Des exemples de résolutions explicites peuvent bien sûr être proposés, mais l'intitulé appelle également des études qualitatives d'équations différentielles non linéaires d'ordre 1 ou 2, par exemple l'étude qualitative de systèmes autonomes plans.

Il est important d'avoir compris comment l'étude d'une équation d'ordre 2 se ramène à celle d'un système différentiel d'ordre 1.

Dans les exemples d'études proposés, on a tout intérêt à faire des dessins (portrait de phase par exemple) et à mettre en évidence l'utilisation d'éléments géométriques pour construire l'allure des trajectoires : symétries, champs de vecteurs, points d'équilibre, barrières, isoclines, intégrales premières.

Les candidates et candidats solides pourront s'intéresser au problème de linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre ou au théorème de Poincaré-Bendixson.

221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

La théorie de Cauchy-Lipschitz linéaire est une porte d'entrée naturelle pour cette leçon. La complétude (via la méthode des approximations successives) y joue un rôle crucial, et la preuve est un exemple fondamental d'intervention de la dimension finie en analyse. Sans que cet aspect devienne trop prépondérant, les candidates et candidats peuvent proposer quelques exemples de résolutions explicites : cas scalaire d'ordre un qui fait intervenir des outils élémentaires, cas des coefficients constants avec l'exponentielle de matrice (qui mobilise fortement la réduction des endomorphismes), utilisation de séries entières ou de séries de Fourier, variation des constantes, etc. On se gardera d'aborder des théorèmes généraux s'appliquant au cas non linéaire qui sont réservés à la leçon 220.

Même dans le cadre linéaire, les études qualitatives présentent un grand intérêt et fournissent de nombreuses possibilités : étude du comportement asymptotique des solutions (pour lequel le lemme de Grönwall est un outil d'une grande efficacité), de la distribution des zéros, du Wronskien, etc.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la linéarisation d'équations non linéaires au voisinage d'un point d'équilibre, proposer des exemples de problèmes aux limites (théorie de Sturm-Liouville) ou d'études d'équations aux dérivées partielles linéaires.

223 : Suites réelles et complexes. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

L'utilisation des valeurs d'adhérence pour montrer des convergences ou des continuités, ainsi que celle des limites inférieures et supérieures d'une suite réelle (qui permettent des rédactions expurgées d'épsilons superflus) sont des thèmes centraux. Le théorème de Bolzano-Weierstrass ainsi que celui de Cesàro, que les candidates et candidats doivent savoir démontrer, sont incontournables dans cette leçon.

Sans se limiter aux cas convergents, on peut également présenter des exemples d'études asymptotiques de suites définies par des sommes ou des relations de récurrence, voire implicitement.

D'autres pistes, comme les différentes méthodes d'approximation des réels par des irrationnels, la résolution numérique d'équations et leur vitesse de convergence peuvent être explorées.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser par exemple à l'équirépartition, à l'étude de systèmes dynamiques discrets, à l'accélération de la convergence, aux procédés de sommation des séries divergentes et aux théorèmes taubériens qui en découlent.

224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Cette leçon est exclusivement consacrée à des exemples : on n'attend aucun exposé systématique sur les notions de développement asymptotique ou d'échelle de comparaison. Une certaine aisance dans la manipulation des relations de comparaison est attendue dans cette leçon. Presque toutes les parties du programme peuvent être mises à contribution : suites définies par une relation de récurrence ou implicitement, estimation asymptotique de sommes partielles ou de restes, fonctions définies par une série ou une intégrale (comportement de la fonction ζ au voisinage de 1 ou du logarithme intégral au voisinage de $+\infty$, méthode de Laplace ou de la phase stationnaire notamment), mais aussi solutions d'équations différentielles dont on peut étudier le comportement à l'infini ou la distribution des zéros.

Il ne s'agit pas de présenter un grand nombre d'exemples triviaux, mais quelques exemples significatifs bien choisis et diversifiés, pour lesquels on analysera avec soin les idées essentielles des méthodes utilisées.

Pour les candidates et candidats solides voulant aller plus loin, des exemples de méthodes d'accélération de convergence peuvent être présentées.

226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

L'intitulé de la leçon permet de se placer dans des contextes variés : \mathbf{R} , \mathbf{R}^n , voire certains espaces de Banach fonctionnels.

En ce qui concerne le cadre réel, on pourra présenter des exemples d'études asymptotiques (si possible autres que $u_{n+1} = \sin u_n$), étudier l'itération d'une fonction suffisamment régulière au voisinage d'un point fixe ou encore présenter des exemples de méthodes de résolution approchée d'équations. En ce qui concerne l'étude asymptotique des suites récurrentes, le jury souligne le fait que la mise en œuvre d'une analogie discret-continu permet souvent de faire surgir naturellement la suite auxiliaire adaptée.

En se plaçant dans \mathbf{R}^n , on peut aborder par exemple l'étude des suites vérifiant une relation de récurrence d'ordre 2 ou plus, la convergence en loi de chaînes de Markov à espace d'états fini, l'extension à ce cadre de la méthode de Newton ou plus généralement les méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires.

Dans le cadre des espaces de Banach, les applications de la méthode des approximations successives ne manquent pas, qu'il s'agisse de la construction de solutions d'équations différentielles, intégrales, ou fonctionnelles.

228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Au-delà des définitions et premiers théorèmes, le programme offre de nombreuses pistes aux candidates et candidats pour élaborer leur plan : recherche d'extrema, utilisations de la continuité uniforme, fonctions convexes et leur régularité, approximation par des fonctions régulières, utilisations des formules de Taylor, liens entre caractère C^∞ et caractère analytique, etc.

Des exemples explicites de fonctions continues et nulle part dérivables, de fonctions continues et croissantes à dérivée nulle presque partout, de fonctions C^∞ à dérivées en un point prescrites, etc. sont les bienvenus dans cette leçon.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la dérivabilité des fonctions monotones ou lipschitziennes ou à celle de l'intégrale indéfinie d'une fonction intégrable, proposer diverses applications du théorème de Baire (continuité d'une limite simple de fonctions continues, points de continuité d'une dérivée, généricité des fonctions nulle part dérivables parmi les fonctions continues ou des fonctions nulle part analytiques parmi les fonctions C^∞ , etc.)

229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications. Les définitions et premières propriétés liées à ces notions doivent bien sûr être présentées pour pouvoir aborder les questions de limites et de continuité de ces fonctions et leurs caractérisations à l'aide de leurs dérivées. Il convient d'illustrer son exposé par de nombreux dessins.

La convexité est une source inépuisable d'inégalités, dans divers domaines y compris les probabilités. Dans ce même domaine, l'étude des fonctions de répartition de variables aléatoires réelles, fonctions croissantes s'il en est, est une piste intéressante.

Au-delà de la dimension 1, les fonctions convexes définies sur une partie convexe de \mathbf{R}^n font partie de cette leçon. La recherche de leurs extrema constitue une thématique riche d'exemples.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à des questions de dérivabilité des fonctions monotones, ou de continuité des fonctions convexes définies sur un ouvert convexe de \mathbf{R}^n .

230 : Séries de nombres réels et complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Dans cette leçon, les définitions et premiers exemples de référence sont incontournables. Lorsque des « règles » de convergence sont présentées, celles-ci doivent être illustrées d'exemples consistants.

Le sujet ne se limite pas à la seule étude de la convergence d'une série, l'estimation des sommes partielles ou des restes (où la technique de comparaison entre somme et intégrale, en présence ou non de monotonie, est particulièrement efficace), et ses conséquences (comme l'étude asymptotique de certaines suites récurrentes) font partie intégrante du sujet.

L'utilisation de séries entières ou de séries de Fourier pour calculer la somme de certaines séries, le calcul de l'espérance d'une variable aléatoire discrète fournissent également de riches thèmes d'étude.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à quelques procédés de sommation des séries divergentes (qui interviennent naturellement dans la théorie des séries de Fourier, entre autres) ainsi qu'aux théorèmes taubériens qui s'y rapportent.

234 : Fonctions et espaces de fonctions LEBESGUE-intégrables. Cette leçon est orientée vers l'étude et l'utilisation des espaces L^1 (voire L^p) associés à la mesure de Lebesgue (supposée construite) sur \mathbf{R} ou \mathbf{R}^n , voire à d'autres mesures.

Les grands théorèmes de la théorie (permutations limite-intégrale, Fubini, etc.) sont évidemment incontournables et la proposition systématique d'exemples d'application significatifs doit enrichir ce déroulé.

Le thème de l'approximation (approximation des fonctions intégrables par des fonctions continues à support compact, utilisation de la convolution) fournit de nombreuses applications, ainsi que celui de l'analyse de Fourier sur le cercle ou la droite réelle.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la transformée de Fourier sur L^2 , la dualité entre L^p ($1 \leq p < \infty$), les liens entre intégration et dérivation, les procédés de sommation presque partout des séries de Fourier, l'algèbre de convolution L^1 , l'étude des parties compactes de L^p , etc.

235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse. L'intitulé de cette leçon de synthèse doit permettre d'aborder explicitement des problèmes variés de permutations de symboles, qu'il s'agisse de limites, d'intégrales, de dérivées, d'espérances ou d'autres opérations.

Les candidates et candidats peuvent également inclure dans leur leçon des exemples de permutations de quantificateurs, obtenus par des arguments de compacité (voire, pour les candidates et candidats solides, utilisant le théorème de Baire).

La présentation des thématiques abordées doit être ordonnée rationnellement et illustrée systématiquement d'exemples significatifs.

236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Les exemples proposés par les candidates et candidats doivent mettre en œuvre des techniques diversifiées : méthodes élémentaires, intégrales dépendant d'un paramètre, utilisation de la formule des résidus, de sommes de Riemann, voire de la transformée de Fourier dans L^1 ou L^2 .

Il est attendu par le jury quelques exemples significatifs de calculs d'intégrales multiples (utilisation du théorème de Fubini, de changements de variables, etc.).

Les résultats d'analyse ou de théorie des probabilités dont la preuve utilise cruciallement un calcul spécifique d'intégrale, (à titre purement indicatif, celle du théorème d'inversion de Fourier basée sur la transformée de Fourier d'une gaussienne) peuvent constituer de bonnes sources de développements.

Il est enfin possible de proposer une ou deux méthodes pertinentes de calcul approché d'intégrales.

239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Le programme fournit aux candidates et candidats de multiples pistes pour élaborer leur plan à commencer par les théorèmes de régularité usuels (allant jusqu'à inclure pour les plus solides celui d'holomorphicité sous le signe somme). Ces résultats doivent être présentés dans un ordre rationnel et illustrés par des exemples et contre-exemples significatifs.

Convolutions et transformées de Fourier font naturellement partie de ces exemples, les candidates et candidats peuvent également s'intéresser aux fonctions caractéristiques en théorie des probabilités, à la transformée de Laplace ou à certaines fonctions « spéciales » définies par une intégrale. Les techniques d'études asymptotiques de fonctions définies par des intégrales font partie intégrante de cette leçon.

241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

L'étude des différents modes de convergence et leur utilisation ne doit pas donner lieu à un catalogue formel de théorèmes, mais être illustrée par des exemples significatifs et diversifiés.

Les fonctions « spéciales » définies par une série sont légion et fournissent aux candidates et candidats de multiples possibilités, sans éluder le champ complexe qui leur confère souvent leur pleine signification. Des exemples de sommes de séries continues nulle part dérivables ou croissantes non constantes et à dérivée nulle presque partout pourront également être proposés.

Les candidates et candidats peuvent aborder les séries entières (qui ont des applications combinatoires pouvant donner lieu à des études asymptotiques intéressantes), les fonctions génératrices des variables aléatoires à valeurs entières ou les séries de Fourier. Il est préférable, dans ce cas, de présenter quelques applications significatives plutôt qu'un cours formel.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à l'étude des séries de variables aléatoires indépendantes, la formule sommatoire de Poisson et ses applications aux fonctions spéciales - comme la fonction θ de Jacobi -, la théorie des séries de Dirichlet et ses utilisations en théorie des nombres.

243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de définitions, règles et propriétés accompagnées de quelques exemples triviaux. Le problème du domaine et les modes de convergence doivent être abordés.

Les liens entre l'holomorphie et l'analyticité doivent être maîtrisés. L'existence de nombreux développements en série entière peut être établie de manière immédiate par cet argument, avec en prime une information sur le rayon de convergence, voire sur l'ordre de grandeur des coefficients.

Le théorème radial (ou non-tangentiel) d'Abel est souvent proposé comme développement, en pensant qu'il s'agit d'un théorème de prolongement, alors qu'il s'agit d'un résultat de continuité. En réalité, ce théorème débouche naturellement sur la question plus générale des procédés de sommation des séries divergentes.

Les séries entières ont également des applications combinatoires pouvant donner lieu à des études asymptotiques très intéressantes. Les fonctions génératrices des variables aléatoires à valeurs entières ont également toute leur place dans cette leçon.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux théorèmes taubériens relatifs aux séries entières, au problème du prolongement analytique de la somme d'une série entière, aux séries entières aléatoires ou encore aux fonctions C^∞ nulle part analytiques.

245 : Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de \mathbb{C} . Exemples et applications.

Les fondements de la théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe contenues dans le programme fournissent un ample matériel pour nourrir cette leçon : représentation intégrale ou sous forme de série entière, principe des zéros isolés et ses conséquences, principe du maximum. L'un des deux développements proposés peut être consacré à la preuve d'un de ces résultats fondamentaux.

Les candidates et candidats doivent être capables de donner la définition d'une fonction méromorphe, et d'en présenter les applications du programme : développements en série de Laurent et formule des résidus, illustrés par des exemples significatifs.

Les candidates et candidats solides peuvent aborder par exemple les théorèmes de Rouché ou de Hurwitz, l'étude des zéros des fonctions holomorphes, la représentation sous forme de produit infini, le problème de la représentation conforme, le théorème de Paley-Wiener, les espaces de Hardy sur le disque unité, le problème du prolongement analytique, l'équation fonctionnelle de la fonction ζ et ses conséquences, les algèbres de Banach, etc.

246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

Les théorèmes de convergence des séries de Fourier ont une place centrale dans cette leçon ; on prendra garde à différencier les hypothèses et à maîtriser les différents types de convergence (simple, uniforme, au sens de Cesàro, L^p ...) apparaissant dans les énoncés proposés. Les propriétés importantes des noyaux utilisés pour les preuves de ces résultats doivent être clairement explicitées.

La théorie L^2 permet un point de vue géométrique agréable de la théorie. Dans ce cadre, on aura en tête l'interprétation de l'identité de Parseval en termes d'isométrie.

Les propriétés des coefficients de Fourier sont un incontournable de la leçon, mais ne devront pas prendre une place prépondérante. Les candidates et candidats pourront aborder le lien entre régularité de la fonction et vitesse de convergence vers 0 de ses coefficients de Fourier, via le théorème de Riemann-Lebesgue et le lien entre dérivation et coefficients.

Il est important d'illustrer cette leçon de quelques-unes des innombrables applications des séries de Fourier, par exemple : calculs de sommes de séries, résolutions d'équations différentielles ou aux dérivées partielles (équation de la chaleur, problème de Dirichlet sur le disque unité, etc.), inégalité de Bernstein, formule sommatoire de Poisson et ses applications, inégalité de Wirtinger, etc.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la divergence des séries de Fourier dans divers contextes (soit en exhibant des contre-exemples, soit en utilisant la théorie de Baire), mais aussi aux procédés de sommation presque partout des séries de Fourier, aux séries de Fourier lacunaires,

à l'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, au critère de Weyl, à l'inégalité isopérimétrique, à la convergence de la série de Fourier d'une fonction α -höldérienne pour $\alpha > \frac{1}{2}$, etc.

250 : Transformation de Fourier. Applications.

Cette leçon est consacrée à l'analyse de Fourier sur la droite réelle. Au niveau de l'agrégation, elle peut être abordée dans trois cadres : L^1 , classe de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide, ou L^2 . Les deux derniers cadres sont les plus satisfaisants du point de vue de la symétrie obtenue, le dernier étant le plus délicat.

La leçon nécessite de rappeler le lien avec le produit de convolution. Elle doit aussi être illustrée par quelques applications significatives : formule sommatoire de Poisson et ses applications, résolution d'équations aux dérivées partielles, etc. Par ailleurs, les fonctions caractéristiques et leurs applications en probabilités ont toute leur place dans cette leçon.

Proposer comme développement le théorème d'échantillonnage de Shannon est pertinent, à condition d'avoir bien compris qu'il traduit une isométrie entre deux espaces de Hilbert.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser aux vecteurs propres de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbf{R})$, à la non-dérivabilité de la fonction de Weierstrass dans le cas le plus général, à l'algèbre de convolution $L^1(\mathbf{R})$, au théorème de Paley-Wiener qui caractérise les fonctions de $L^2(\mathbf{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact, aux principes d'incertitude, etc.

253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

La convexité intervient dans plusieurs parties du programme, offrant ainsi plusieurs pistes très riches pour élaborer la leçon : convexité dans les espaces vectoriels réels, fonctions convexes (d'une ou plusieurs variables réelles), caractérisation parmi les fonctions C^1 ou C^2 sur un ouvert convexe de \mathbf{R}^n , projection sur un convexe fermé d'un espace de Hilbert, méthodes d'optimisation en dimension finie. Les applications de ces thèmes sont innombrables : inégalités classiques en analyse et en probabilité, optimisation, critère de densité d'un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert, etc.

Il est important de développer cette leçon dans son cadre géométrique naturel, en n'hésitant pas à l'illustrer par de nombreux dessins.

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la continuité, voire à la différentiabilité d'une fonction convexe définie sur un ouvert convexe de \mathbf{R}^n , aux points extrémaux d'une partie convexe d'un espace vectoriel réel de dimension finie, à la minimisation de fonctionnelles convexes et coercives sur un espace de Hilbert, aux applications du théorème de Hahn-Banach, à la notion de convexité uniforme et son application à l'existence d'un vecteur normant pour une forme linéaire continue.

261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications. Cette leçon concerne les diverses lois du programme, leurs interactions et leurs propriétés de stabilité, et appelle donc quelques illustrations concrètes et bien choisies de calculs de lois, dans un contexte de modélisation. Le théorème de transfert, qui calcule $\mathbf{E}(f(X))$ à l'aide de la loi de X , les vecteurs aléatoires à coordonnées indépendantes, ainsi que la caractérisation de la loi par la fonction de répartition, fonction génératrice ou caractéristique, sont au cœur de cette leçon. Les principales propriétés des fonctions de répartition et des fonctions caractéristiques des variables aléatoires réelles doivent être connues.

Les candidates et candidats peuvent également aborder la convergence en loi en l'illustrant d'exemples et d'applications variés en probabilités et/ou en statistique (estimation par intervalle de confiance).

Les candidates et candidats solides peuvent s'intéresser à la caractérisation de la loi par les moments, à des inégalités de concentration, aux vecteurs gaussiens, au théorème central limite dans \mathbf{R}^d , aux chaînes de Markov, aux processus de Poisson.

262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications. Les liens entre les différents modes de convergence d'une suite de variables aléatoires doivent être illustrés par des exemples et contre-exemples variés. Ainsi, les implications entre les divers modes de convergence, et les réciproques partielles doivent être connues. Les théorèmes de convergence du programme (lois des grands nombres, théorème central limite) sont bien sûr au cœur de cette leçon, et la preuve de la loi forte des grands nombres, éventuellement sous des hypothèses de confort, peut être présentée. Les liens de ces théorèmes limite avec les questions d'estimation ponctuelle, d'estimation par intervalle de confiance en statistique, ont leur place dans cette leçon.

Les candidates et candidats solides peuvent aborder la convergence des séries de variables aléatoires indépendantes, les marches aléatoires, la loi du logarithme itéré, la méthode de Monte Carlo, le théorème central limite dans \mathbf{R}^d , les chaînes de Markov, les lois stables ou infiniment divisibles.

264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Le jury attend des candidates et candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des lois usuelles du programme soient présentées, ainsi que leurs liens éventuels. Il est important de proposer quelques exemples de modélisation faisant intervenir ces lois. Les techniques spécifiques aux variables discrètes, notamment à valeurs entières (caractérisation de la convergence en loi, notion de fonction génératrice) doivent être mises en évidence et illustrées par des exemples variés. La marche aléatoire symétrique sur \mathbf{Z} ou le processus de Galton-Watson fournissent des exemples riches.

Les candidates et candidats solides peuvent aborder la loi du logarithme itéré (par exemple dans le cas de la marche aléatoire symétrique), les chaînes de Markov, les processus de Poisson.

266 : Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.

Il s'agit d'une leçon de synthèse autour de l'indépendance, concept incontournable qui démarque la théorie des probabilités de celle de l'intégration. Les notions importantes de probabilité conditionnelle, d'indépendance de deux événements, d'indépendance mutuelle d'une suite d'événements et d'indépendance de familles de variables aléatoires, doivent être connues.

Le programme fournit plusieurs utilisations élémentaires de l'indépendance : lien avec l'espérance, la variance, la covariance et le coefficient de corrélation, loi faible des grands nombres, lemmes de Borel-Cantelli, stabilité de certaines lois, en lien avec les fonctions génératrices et caractéristiques. Des thèmes pouvant également être abordés sont le théorème central limite, ou l'étude de la marche aléatoire symétrique sur \mathbf{Z} .

Les candidates et candidats solides peuvent aborder la loi forte des grands nombres, l'indépendance d'une suite de tribus, la loi du 0-1 de Kolmogorov, la convergence des séries de variables aléatoires indépendantes, les vecteurs gaussiens ou le théorème de Cochran.