MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

Concours de recrutement du second degré

Rapport de jury

Concours : Agrégation externe

Section : Mathématiques

Session 2022

Version allégée du rapport de jury présenté par : Claudine Picaronny
Présidente du jury

Chapitre 1

Épreuves orales de leçons

1.1 Présentation des épreuves

Modalités. Pour les épreuves de leçons, les candidats tirent au sort un couple de sujets. Le candidat est libre de choisir le sujet qui lui plaît parmi ces deux sujets proposés, celui où il se sent le plus à même de mettre en valeur ses connaissances. Il n'a pas à justifier ou commenter son choix.

Les candidats préparent l'interrogation pendant 3 heures. Durant tout ce temps, ils ont libre accès aux livres de la bibliothèque de l'agrégation ou à leurs propres ouvrages. Seuls sont autorisés les ouvrages avec un numéro ISBN et jouissant d'une véritable diffusion commerciale. L'attention des candidats est attirée sur le fait que l'ISBN ne suffit pas, une « diffusion commerciale avérée »est tout autant importante. Ainsi, un polycopié de cours, propre à un établissement, même muni d'un ISBN, pourra être refusé. Cette restriction est motivée par le principe d'égalité des candidats : les ressources documentaires autorisées doivent être facilement accessibles à tout candidat au concours. Les ouvrages imprimés par les candidats eux-mêmes (ou les bibliothèques universitaires, ou les préparations universitaires) ne sont pas autorisés et les livres doivent être vierges d'annotation. Tous les ouvrages personnels peuvent être interdits, lors de l'oral, sur simple décision du représentant du directoire présent lors de la préparation. Il n'est pas autorisé non plus de venir avec des livres dont certaines pages auraient été marquées au préalable, fût-ce de manière amovible, au moyen de post-it par exemple. (Il est toutefois possible de se munir de tels marque-pages à apposer durant la préparation.) Le représentant du directoire présent lors de la préparation peut interdire tout ouvrage personnel ou envoyé par une préparation universitaire. Les notes personnelles, manuscrites ou dactylographiées, ne sont autorisées ni pendant l'épreuve proprement dite, ni pendant la préparation. Il est possible, et même recommandé, de venir muni d'un exemplaire du rapport du jury de l'agrégation externe de mathématiques, relié et sans annotation. Quelques exemplaires du rapport sont à disposition des candidats dans chaque salle de préparation. Les candidats n'ont pas accès à Internet et la possession d'un dispositif de communication ou de stockage de données (téléphone, calculatrice, clé USB, montre connectée,...) serait considérée comme une tentative de fraude, susceptible d'entraîner l'exclusion du concours. Le temps de préparation est décompté dès l'ouverture des enveloppes contenant les sujets. A l'issue des trois heures de préparation, les plans des leçons sont ramassés pour être photocopiés à l'intention des jurys. Pendant le temps nécessaire à cette reproduction, les candidats sont invités à ranger leurs affaires et à prendre quelques minutes de repos.

Les plans sont donc des documents manuscrits, communiqués à la commission d'interrogation. Ils comportent *au maximum 3 pages* au format A4, éventuellement complétées par une page de figures. Les candidats doivent veiller à la lisibilité de leur document, en tenant en compte le fait qu'ils vont être photocopiés : écrire suffisament gros, soigner la présentation, faire apparaître des titres, éviter l'utilisation de couleurs et les encres très claires... Le candidat doit clairement signaler sur ce plan les résultats qu'il estime significatifs, représentatifs de la leçon et qu'il propose de développer devant le jury.

L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale de *55 minutes environ* : une présentation du plan de la leçon éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes maximum et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions. *Le candidat peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve.* Pendant la première phase de l'interrogation consacrée à la présentation du plan, il peut utiliser toutes les notes manuscrites produites durant la préparation. Le développement doit quant à lui se faire sans utiliser ces notes manuscrites ; si le plan comporte lui-même trop de détails sur les développements proposés, le jury peut restreindre l'utilisation de ce document durant cette seconde phase de l'épreuve.

Commentaires généraux. Le jury met en garde contre plusieurs écueils qui peuvent altérer les performances des candidats :

— *le hors-sujet*. Le hors-sujet se manifeste de deux manières, qui dans tous les cas sont lourdement sanctionnées. Quelques candidats prennent des libertés quant au libellé de la leçon et s'en écartent notablement : les titres des leçons définissent le champ précis qu'il faut traiter. Par ailleurs, le jury constate l'abus de « recyclage »de thèmes plus ou moins classiques, mais qui ne sont pas exploités avec à propos dans les leçons et qui, parfois, prennent une place sans commune mesure avec leur importance mathématique.

— *le manque d'autonomie et de maîtrise du sujet*. Probablement dûe à une mauvaise évaluation des attentes et un manque de lucidité, trop de candidats proposent plan ou développements qu'ils ne peuvent défendre. Des connaissances des bases fermement maîtrisées et intelligemment utilisées valent mieux qu'un étalage de savoirs emmagasinés sans recul et à peine digérés, voire pas assimilés du tout. Une maîtrise avérée et solide des bases assure déjà une note très convenable, certainement de nature à permettre l'admission, en l'état du concours.

— *la fatigue et le stress*. Une grande majorité des candidats se présente avec une forte charge émotionnelle, à la mesure de l'enjeu et de leur investissement personnel, qui peut nuire à l'expression de leurs connaissances. Cela est d'autant plus vrai que l'épreuve ne se réduit pas à la simple récitation d'un cours mais à un échange avec le jury et donc, là encore, à une réflexion personnelle, à une prise de hauteur et à la démonstration, dans un temps court, non seulement de la maîtrise technique mais aussi de l'aptitude à construire un raisonnement. Le jury est pleinement conscient de ces difficultés et s'emploie à en réduire les effets négatifs en mettant en pratique une posture de bienveillance constante. Le jury ne cherche en rien à déstabiliser le candidat pendant l'épreuve, mais au contraire cherche à valoriser les connaissances du candidat. Les premières questions, parfois très simples, visent souvent à préciser une notation, un point du plan ou du développement, pour que le jury s'assure de la compréhension par le candidat des notions qu'il vient d'exposer et non pour lui tendre un quelconque piège. Mettre le candidat en confiance, le respecter, l'écouter, poser des questions ouvertes, permettre au candidat déstabilisé de se reprendre sans l'acculer au silence, stimuler le dialogue sont autant d'objectifs que s'assignent les membres du jury.

Une liste d'énoncés, quelque sophistiqués qu'ils soient, ne peut suffire à convaincre le jury. Il faut savoir motiver ces énoncés et pouvoir expliquer comment ils s'enchaînent et en quoi ils sont pertinents. Les leçons doivent donc être illustrées avec des exemples judicieusement choisis. De nombreux titres de leçons se terminent d'ailleurs par « exemples et applications » : le jury attend donc que le plan soit riche en exemples et applications et/ou que le candidat puisse en développer lors de la présentation de son plan.

Recommandations. On trouvera ci-dessous des commentaires sur chaque leçon de la session 2023.

La rédaction des commentaires sur les leçons tente de distinguer les notions « de base », incontournables pour l'intitulé proposé et dont la maîtrise est attendue des candidats, et des suggestions d'ouverture. Ces suggestions sont de niveaux variés et peuvent concerner des champs différents, par exemple qui trouvent leurs motivations dans des problématiques propres aux options de modélisation. Certaines pistes se placent aussi aux frontières du programme et peuvent faire écho à des sujets spécialisés abordés durant la formation du candidat. Il ne s'agit là que de propositions qui ne revêtent aucun caractère obligatoire, introduites par des formulations comme « pour aller plus loin »ou « si les candidats le désirent » ; le jury n'attend certainement pas un balayage exhaustif de ces indications et il n'est pas nécessaire de développer les éléments les plus sophistiqués pour obtenir une note élevée. Enfin, certains commentaires font part de l'expérience du jury pour évoquer le dosage pas toujours approprié entre théorie et exemples, souligner des points de faiblesse qui méritent une attention particulière ou mettre en garde contre de possibles écueils (oublis, hors-sujets, erreurs fréquentes, positionnement mal à propos, etc). Le jury espère que candidats et préparateurs sauront se saisir de ces indications pour proposer des développements originaux : il n'y a pas de format standard et des manières différentes d'aborder les leçons peuvent toutes permettre d'obtenir d'excellents résultats.

Les leçons proposées ont toutes leurs spécificités qu'un principe unique ne saurait résumer ou englober. Une partie des sujets sont très délimités, alors que certains intitulés de leçons sont très ouverts et obligent le candidat à opérer des choix thématiques et de points de vue. Ces sujets sont pensés pour offrir de multiples points d'entrée, avec une échelle de niveaux techniques assez large, l'objectif étant de permettre à l'ensemble des candidats de s'exprimer au mieux et de mettre en valeur leurs connaissances. La pertinence des choix adoptés et leur motivation au regard de l'intitulé de la leçon entrent alors tout particulièrement dans l'appréciation, ainsi, bien entendu, que la maîtrise du contenu proposé. Ces leçons de synthèse exigent certainement un important recul ; elles réclament un effort conséquent de réflexion et méritent tout particulièrement d'être préparées en amont du concours. En retour, elles permettent de consolider un matériel mathématique qui peut être réinvesti avec profit dans d'autres thèmes.

1.1.1 Première partie : présentation de la leçon

Dans cette première phase de l'épreuve, le candidat est convié à utiliser son temps de parole, *6 minutes maximum*, pour présenter, argumenter, mettre en valeur et faire une synthèse de sa leçon.

Pour cette partie de l'épreuve, le candidat devrait s'imaginer dans la situation où il doit introduire à un auditoire, pendant 6 minutes, une leçon destinée ensuite à être développée sur plusieurs séances. Quel est l'intérêt du sujet ? Comment se positionne-t-il dans un paysage mathématique plus large ? Comment s'articulent les différentes sections qui composent la leçon ? Comment s'expliquent et se motivent les enchaînements ? Comment se hiérarchisent les résultats et les difficultés ? Il s'agit aussi de s'interroger sur les enjeux didactiques de la leçon, c'est-à-dire dans quel ordre et comment présenter les choses pour que le tout soit cohérent, compréhensible et pédagogiquement efficace. De plus, cette présentation gagne à être illustrée. Des exemples peuvent être utilisés pour mettre en évidence les difficultés, faire ressortir le rôle des hypothèses et décrire des applications met en valeur l'intérêt des résultats. Enfin, des figures peuvent aussi contribuer à expliquer les idées maîtresses. Si l'enjeu principal est d'argumenter la construction du plan de la leçon, il est aussi parfois pertinent de mettre en valeur les liens logiques et l'intérêt des notions présentées dans d'autres domaines (sans forcément les introduire dans le plan écrit).

Le rapport du concours indique des pistes pour chaque leçon ; il ne s'agit que de suggestions que le candidat n'est pas tenu de suivre et qui ne constituent pas une trame obligatoire pour le plan. Notamment le rapport distingue clairement le cœur des leçons et des extensions dont le contenu peut être techniquement plus exigeant. La vocation de ces commentaires n'est donc pas d'être repris de manière exhaustive ; il ne s'agit que de guider les candidats dans leur auto-évaluation et les encourager à présenter des notions avec lesquelles ils sont à l'aise. Notamment, ils peuvent tout à fait exploiter des notions ou des applications qui trouvent leur motivation dans les options de modélisation qu'ils ont choisies.

Le jury ne cherche pas des plans absolument originaux, le plus important est que le plan soit bien structuré, maîtrisé par le candidat et qu'y figure une quantité substantielle d'exemples et de mathématique. Le jury attend que le candidat fasse preuve d'un investissement personnel sur le sujet et qu'il explique pourquoi il adopte cette présentation. Le jury s'émeut du nombre important de candidats qui utilisent un plan *tout fait* disponible dans la littérature et se trouvent ensuite, faute de regard critique et d'appropriation suffisante, en difficulté de pouvoir l'expliquer, le commenter et le défendre. Le jury cherche aussi à vérifier la capacité à penser par soi-même et à réfléchir de manière autonome. Face à ce qui peut ressembler à une dérive, les livres contenant des plans rédigés seront interdits en 2023. Le jury invite les candidats, durant leur année de préparation, à ne pas craindre de faire preuve de curiosité et de diversifier leurs lectures, afin de produire des plans à la fois plus synthétiques et plus hiérachisés, proposant des résultats et des exemples réellement maîtrisés et analysés.

Le jury se désole par ailleurs du très petit nombre de candidats qui ont le réflexe de faire un dessin, lorsque c'est pertinent, notamment durant le développement. C'est pourtant un moyen extrêmement efficace pour faire saisir l'idée d'une preuve ou motiver une méthode.

Il s'agit d'une épreuve *orale*. Le document écrit transmis au jury se justifie pour servir de base pour la discussion et constitue un fil conducteur qui guide le jury pour mener la partie consacrée au dialogue et aux questions. Ce plan ne doit être ni une énumération d'énoncés, ni un cours ou un exposé complet avec développement des démonstrations. En revanche, il doit définir avec suffisamment de précision les notions mathématiques introduites, donner les énoncés complets (notamment les hypothèses) des résultats fondamentaux, citer des exemples et des applications. Le plan est important puisqu'il calibre l'ensemble de la leçon, il détermine l'orientation et le niveau choisis par le candidat. Les choix doivent être motivés lors de la présentation et éventuellement lors de la discussion avec le jury. Il est nécessaire d'être en mesure de démontrer les résultats importants et de pouvoir les illustrer avec des exemples simples. Soigner la présentation d'un document écrit qui sert de support pour un cours est une compétence professionnelle importante du métier d'enseignant. Aussi, la formalisation mathématique et le français doivent être soignés, ainsi que la mise en forme, autant que possible dans le temps de préparation imparti : ces éléments ne peuvent que faciliter les interactions avec le jury. Il est inutile, voire contre-productif, de chercher à remplir à tout prix les 3 feuilles autorisées, surtout avec des éléments que le candidat ne maîtrise manifestement pas.

Pendant les 6 minutes de présentation, le candidat doit tenter de faire une synthèse de son plan en en expliquant les grandes lignes et les articulations. Il est inutile de recopier le plan au tableau, puisque le jury dispose d'une copie de ce document. Toutefois le jury encourage les candidats à exploiter le tableau comme support pédagogique. Faire apparaître la structure de la leçon, illustrer une difficulté technique ou le principe d'une démonstration par une figure... permet au candidat de s'affranchir de ses notes et rend l'exposé plus vivant. La présentation orale, la qualité d'expression, la compréhension synthétique, la plus-value de l'exposé par rapport au plan écrit, la capacité du candidat à intéresser son auditoire sur une leçon donnée, constituent des éléments importants d'évaluation. Le jury se réjouit d'ailleurs des progrès constatés sur cette partie de l'épreuve.

Le jury attache une grande importance à la *maîtrise du plan* qui intervient de manière substantielle dans la grille de notation. Le plan ne peut être considéré comme maîtrisé si l'exposé ressemble à une récitation. Les résultats exposés doivent être compris ainsi que l'organisation d'ensemble de la leçon. Il est souhaitable que le candidat connaisse dans leurs grandes lignes les démonstrations des résultats figurant au programme du concours. Il est indispensable que le candidat ait une idée assez claire de la difficulté des démonstrations des résultats qu'il évoque dans son plan. Le jury rappelle qu'il n'est pas nécessaire de s'aventurer au-delà des contours du programme pour prétendre à une très bonne note ! Plus généralement, il vaut mieux se cantonner à un niveau où l'on se sait solide plutôt que de chercher à placer des énoncés débordant du programme mais sans le recul, ni l'assurance technique nécessaires. Bien entendu, réussir cette partie de l'épreuve ne s'improvise pas et le discours doit avoir été réfléchi durant la préparation de l'épreuve, et plus largement tout au long du parcours qui conduit les candidats jusqu'au concours.

À la fin de cette présentation de la leçon, le jury peut éventuellement questionner très brièvement le candidat et aborder quelques points techniques, sans entrer dans des détails qui retarderaient le début du développement.

1.1.2 Deuxième partie : le développement

Le jury demande au candidat de proposer *deux développements au moins*. Il s'agit de résultats représentatifs de la leçon que le candidat est en mesure d'exposer en détail et sans notes.

Proposer un seul développement ou des développements de niveaux trop disparates conduit à une minoration de la note. Ces propositions de développements doivent être clairement mentionnées sur le plan écrit et non pas vaguement évoquées à l'oral. Dans cet esprit, le candidat doit pouvoir motiver le choix des développements qu'il propose et en quoi ces résultats ou énoncés sont centraux ou jouent à ses yeux un rôle particulier sur le sujet. Le candidat doit aussi préciser, sur son plan écrit, ce qu'il va démontrer et, le cas échéant, les résultats de son plan qu'il va admettre pour mener à bien son développement. Il faut prendre garde dans ce choix à ne pas déclarer admis un énoncé majeur qui, une fois acquis, rend l'objet du développement trivial. De même il faut prendre garde aux « raisonnements circulaires »en faisant appel à un énoncé qu'on interpréterait comme une conséquence de celui qu'on cherche à démontrer. De telles maladresses sont perçues comme un défaut de maîtrise et de recul qui est pénalisé.

Le jury choisit le développement qui va être effectivement exposé par le candidat. Le candidat dispose de 15 minutes (maximum) pour mener à bien son développement. La gestion du temps est une des difficultés de l'épreuve. Un exposé trop court est le signe d'un sujet mal choisi, inapproprié au concours ; une démonstration inachevée dans le temps imparti témoigne d'un manque de maîtrise. Le jury demande au candidat de bien gérer son tableau, en particulier le candidat doit demander aux membres du jury l'autorisation d'effacer. Lors du développement, le jury attend du candidat des explications sur la preuve et sur l'utilisation pertinente des notions développées durant l'exposé oral ; il peut être opportun, lors du développement, de se référer explicitement au plan présenté. Trop peu de candidats commencent leur développement par une rapide synthèse des grandes idées ou des étapes qui le composent. Expliquer l'approche adoptée, et les difficultés, au début du développement est une démarche pédagogique appréciée. Un ou plusieurs dessins peuvent aider à clarifier la discussion technique. Il est inutile de se précipiter ou de parler trop vite ; on veillera au contraire à préciser ses notations, à soigner sa présentation, à placer sa voix et à regarder de temps en temps le jury. Le développement ressemble parfois à une succession plus ou moins convaincante de résultats intermédiaires *ad hoc*. Cette phase de l'épreuve vise à mettre en valeur des qualités pédagogiques autant que techniques et l'exposé doit faire la preuve de la compréhension du sujet par le candidat. La récitation mécanique d'un développement ne peut pas être convaincante ; le jury veille à ce que les futurs enseignants comprennent ce qu'ils exposent et sachent exposer ce qu'ils comprennent. C'est une qualité essentielle d'un futur agrégé. Un choix judicieux des notations utilisées contribuent à la clarté de l'exposé ; par exemple il peut être maladroit de noter deux polynômes P et P'... surtout si on doit travailler avec les dérivées de ceux-ci. Enfin, même si le jury laisse évoluer le candidat durant son développement, en intervenant le moins possible, il peut, en cas de lacunes ou d'erreurs manifestes, interrompre le candidat pour demander des explications. Cette intervention ne donne pas droit à une extension du temps consacré au développement.

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements. Il est souhaitable que le candidat recherche une adéquation entre le niveau auquel il souhaite se placer et les développements proposés. Un candidat ne sera pas avantagé s'il présente un développement non maîtrisé, manifestement mal compris. Si le niveau de l'agrégation ne peut se cantonner aux notions abordées dans une classe de Terminale ou une première année post-bac, trop de candidats se lancent, curieusement, dans des propositions, parfois aux limites du programme, qui dépassent largement leur niveau technique. Dans un cas comme dans l'autre, il en résulte une appréciation négative. Le développement doit être en lien direct avec le thème de la leçon présentée. L'utilisation d'un résultat qui n'apparaît pas dans le plan écrit doit être explicitement signalée par le candidat. Toute utilisation d'un lemme non démontré et enfermant l'essence de la preuve est sanctionnée. Le jury peut exiger la démonstration d'un lemme admis, si celui-ci est essentiellement le cœur du développement. Il faut éviter de présenter ou d'utiliser un résultat préliminaire ou intermédiaire sans explication convaincante. Dans le cas d'un développement difficile, il ne faut pas négliger les cas élémentaires et les détails utiles à la compréhension du jury. Le jury déplore l'abus de certains développements plus ou moins classiques, qui ne sont pas toujours utilisés à bon escient et qui occupent parfois une place disproportionnée (l'ellipsoïde de JOHN, la décomposition de DUNFORD, le théorème de BERNSTEIN, le processus de GALTON-WATSON,...). Trop de candidats ont tendance à replacer exagérément et de manière inappropriée de tels développements et se retrouvent ainsi hors sujet, impair qui est sévèrement sanctionné. Il faut aussi veiller au fait que des thèmes peuvent être exploités dans des leçons différentes... mais avec des points de vue différents, qu'il faut savoir mettre en exergue.

Le programme du concours comprend maintenant un chapitre spécifique consacré aux méthodes numériques. Les candidats sont invités à explorer ce champ, éventuellement en s'appuyant sur leurs connaissances spécifiques à l'option de modélisation qu'ils ont choisie, pour proposer des développements originaux en lien avec l'analyse d'algorithmes de calcul. La description des leçons indique quelques pistes dans cette direction. Le jury se réjouit qu'un nombre croissant de candidats saisisse ces opportunités et espère que cette tendance, qui enrichit les contenus, se renforcera.

La pertinence des explications, le souci pédagogique, la capacité à mener à bien et complètement le sujet dans le temps imparti, l'aisance technique sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs, le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement. Il est donc essentiel qu'il soit capable de reconnaître dans une question donnée un cas particulier simple du résultat général qu'il vient d'exposer.

1.1.3 Troisième partie : questions et dialogue

Le jury teste systématiquement la maîtrise du plan présenté. Une part importante de la discussion porte donc sur le plan, ou trouve sa source dans le plan présenté par le candidat. Il faut éviter que ce plan dépasse largement le niveau que l'on maîtrise. Le candidat doit se préparer à des questions élémentaires voire considérées comme « évidentes »sur tout énoncé mis dans son plan, questions auxquelles il doit répondre avec précision. Des candidats après des prestations relevées ont parfois pu être surpris par de telles questions portant sur les bases ; elles sont pourtant quasi-systématiques, le jury souhaitant précisément s'assurer de la maîtrise de ces bases. Le jury peut aussi proposer des calculs illustrant les notions évoquées par le plan.

Cette phase de l'épreuve requiert un certain recul qui ne peut être que le fruit d'un travail de préparation approfondi en amont du concours où l'on doit se demander si on est capable de mettre en œuvre des énoncés sur des situations simples et, pour certains théorèmes, réfléchir à des exemples ou des contre-exemples.

Les réponses aux questions des examinateurs ne prennent pas forcément une forme unique et ceux-ci se placent dans une posture de dialogue avec le candidat. Le jury pose aussi des exercices en rapport direct avec la leçon et le plan proposé mais ne s'attend pas à ce que le candidat trouve une solution immédiatement. Ces exercices ont plutôt pour objectif de voir évoluer le futur agrégé dans une démarche scientifique rigoureuse et méthodique. Le candidat doit réfléchir, utiliser son plan et rattacher l'exercice à sa leçon. Le fait de ne pas résoudre un exercice ne doit pas être perçu comme un échec et le candidat ne doit pas se décourager : plus qu'achever l'exercice, ce sont les réactions du candidat qui importent (par exemple en identifiant l'énoncé de la leçon qui permettrait de traiter le problème et en se demandant si les hypothèses d'application sont satisfaites). Dans cette partie de l'épreuve le candidat doit faire preuve de capacité d'écoute, qui est aussi évaluée ; il doit rester attentif aux suggestions du jury. Il est souvent utile d'exploiter le tableau pour bien reformuler la question, formaliser les pistes de réflexion et donner un support écrit à l'échange. Pendant cette discussion, le jury veille à laisser un temps raisonnable au candidat pour réfléchir, sans le submerger de questions.

Enfin, l'objet du concours étant de recruter de futurs enseignants, le jury peut aussi, comme l'indique l'article 8 de l'arrêté du 25 juillet 2014, poser toute question qu'il juge utile *lui permettant d'apprécier la capacité du candidat, en qualité de futur agent du service public d'éducation, à prendre en compte dans le cadre de son enseignement la construction des apprentissages des élèves et leurs besoins, à se représenter la diversité des conditions d'exercice du métier, à en connaître de façon réfléchie le contexte, les différentes dimensions (classe, équipe éducative, établissement, institution scolaire, société) et les valeurs qui le portent, dont celles de la République. Le jury peut, à cet effet, prendre appui sur le référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation fixé par l'arrêté du 1er juillet 2013.*

1.2 Épreuve orale d'algèbre et géométrie

Comme y invite clairement l'intitulé de l'épreuve, les exemples et applications motivés par la géométrie sont particulièrement bienvenus. Les thèmes relevant de la théorie des groupes se prêtent tout particulièrement à de telles illustrations. De plus, les connaissances spécifiques à chacune des trois options A, B et C fournissent des exemples d'applications très appréciés par le jury.
Les notions de quotients sont importantes, il est important de savoir utiliser la projection canonique et de maîtriser le passage au quotient dans le cadre d'un morphisme.
La théorie des représentations est naturellement reliée à bon nombre de leçons, en particulier dans les leçons 101, 102, 103, 104, 105, 106, 151 et 154.

101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Dans cette leçon, au-delà de la présentation du matériel théorique indispensable, le choix, l'organisation et la pertinence des illustrations sont des éléments forts de l'appréciation. Les deux facettes de l'action d'un groupe G sur un ensemble X doivent être maîtrisées : l'application de $G \times X$ vers X et le morphisme de G vers $\mathfrak{S}(X)$. La relation entre orbite et stabilisateur qui en découle est incontournable ainsi que des exemples de son utilisation. Il faut savoir utiliser des actions bien choisies pour obtenir des informations soit sur un ensemble X donné, soit sur un groupe G donné et faire apparaître des sous-groupes intéressants de G comme stabilisateurs. Par ailleurs, la présentation doit illustrer comment l'étude des orbites de certaines actions revient à classifier certains objets, soit en trouvant un représentant simple de chaque orbite, soit en dégageant des invariants caractérisant les orbites. Les actions de groupes interviennent aussi efficacement dans des problèmes de dénombrements, notamment via la formule de Burnside.

Les exemples peuvent être internes à la théorie des groupes (action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{1, ..., n\}$, action par translation ou par conjugaison, etc). Mais il est souhaitable d'emprunter aussi à d'autres domaines (action sur des anneaux, des espaces de matrices ou des espaces de polynômes, représentations de groupes, groupes d'isométries, etc). La géométrie fournit aussi de nombreux exemples pertinents (groupes d'isométries d'un solide ou d'un polygone régulier).

Pour aller plus loin, on peut aborder l'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{K})$ sur la droite projective menant au birapport ou celle de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré ou les preuves par actions de groupes des théorèmes de Sylow ou encore d'autres actions donnant lieu à des isomorphismes exceptionnels. Il est aussi possible de s'intéresser aux aspects topologiques ou différentiels liés à certaines actions.

102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

Cette leçon ne peut faire l'impasse sur les aspects élémentaires du sujet (définitions, exponentielle complexe, trigonométrie, etc.), mais elle ne doit s'y cantonner. Elle doit aborder l'aspect « groupe »de S^1 en considérant son lien avec $(\mathbf{R}, +)$ et en examinant ses sous-groupes (en particulier finis). Il faut aussi envisager des applications en géométrie plane. Plus généralement, la leçon invite à expliquer où et comment les nombres complexes de module 1 et les racines de l'unité apparaissent dans divers domaines des mathématiques : spectres de matrices remarquables, polynômes cyclotomiques, représentations de groupes, etc. On peut également s'intéresser aux sous-groupes compacts de $\mathbf{C}^*$

Pour aller plus loin, on peut s'intéresser aux nombres de module 1 et aux racines de l'unité dans $\mathbf{Q}[i]$, ou à la dualité des groupes abéliens finis (notamment la preuve du théorème de structure par prolongement de caractère) ou encore aux transformées de FOURIER discrètes et rapides.

Des aspects analytiques du sujet peuvent être évoqués (théorème de relèvement, logarithme complexe, analyse de Fourier sur $\mathbf{R}^n$) mais ne doivent occuper ni le coeur de l'exposé, ni l'essentiel d'un développement.

103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Dans cette leçon, le jury souhaite que les candidats mettent tout d'abord l'accent sur la conjugaison dans un groupe. Ensuite, ils doivent expliciter la structure de groupe obtenue sur le quotient d'un groupe par un sous-groupe distingué.

La notion de conjugaison doit être illustrée dans des situations variées : groupes de petit cardinal, groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, groupe linéaire d'un espace vectoriel, groupe affine d'un espace affine, groupe orthogonal, etc. On donne des exemples où la conjugaison aide à résoudre certains problèmes (par exemple, en transformant un élément en un autre plus simple à manipuler ou en considérant l'action par conjugaison). L'étude des classes de conjugaison de divers groupes peut être menée. Dans le cadre d'une action d'un groupe, il faut savoir que les stabilisateurs d'éléments d'une même orbite sont conjugués. On peut aussi illustrer et utiliser le principe du « transport par conjugaison » voulant que hgh^{-1} ait la même « nature géométrique » que g et que ses caractéristiques soient les images par h des caractéristiques de g (conjugaison d'une transvection, d'une translation, d'une réflexion, etc.).

Concernant la notion de sous-groupe distingué, il faut indiquer en quoi c'est précisément la notion qui permet de munir le quotient d'une structure de groupe héritée. Cette notion permet aussi de donner une caractérisation interne des produits directs. Le lien entre sous-groupe distingué et noyau de morphisme ϕ est incontournable ainsi que l'isomorphisme $G/\mathrm{Ker}\phi \cong \mathrm{Im}\phi$. Des exemples bien choisis mettent en évidence comment certains problèmes portant sur l'un des deux groupes G ou G/H peuvent être résolus en utilisant l'autre (par exemple, le lien entre les sous-groupes de l'un et de l'autre). L'examen de la simplicité de certains groupes peut être proposé.

Il est important de s'attarder sur l'utilité des notions présentées. Les applications en arithmétique sont nombreuses, mais il est pertinent de présenter aussi des applications en géométrie ou en algèbre linéaire. On peut ainsi expliquer comment l'étude des classes de conjugaison permet de démontrer la simplicité de certains groupes comme SO_n, étudier le groupe des homothéties-translations distingué dans le groupe affine, établir que les groupes orthogonaux de formes quadratiques congruentes sont conjugués ou encore qu'un sous groupe compact de $\mathrm{GL}(n)$ est conjugué à un sous groupe de $\mathrm{O}(n)$. En algèbre linéaire, des propriétés topologiques de la classe de conjugaison d'un endomorphisme permettent d'établir son caractère diagonalisable ou nilpotent. Enfin, on peut interpréter le discriminant d'une forme quadratique non-dégénérée comme élément du quotient $\mathbf{K}^\times/(\mathbf{K}^\times)^2$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent poursuivre en illustrant ces notions en théorie des représentations des groupes finis (classes de conjugaison et nombres de représentations irréductibles, treillis des sous-groupes distingués lu dans la table de caractères, liens entre représentations de G et de G/H, etc.). La notion de produit semi-direct et les théorèmes de SYLOW débordent du programme. Il est possible de les évoquer, mais en veillant à les illustrer par des exemples et des applications.

104 : Groupes finis. Exemples et applications.

La richesse de cette leçon ne doit pas nuire à sa présentation. Le candidat devra sans doute faire des choix qu'il doit être en mesure de justifier.

La notion d'ordre (d'un groupe, d'un élément et d'un sous-groupe) est très importante dans cette leçon ; le théorème de LAGRANGE est incontournable. Les groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et $\mathfrak{S}_n$ sont des exemples très pertinents. Pour ces groupes, il est indispensable de savoir proposer un générateur ou une famille de générateurs. Dans $\mathfrak{S}_n$, il faut savoir calculer un produit de deux permutations et savoir décomposer une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Le théorème de structure des groupes abéliens finis doit figurer dans cette leçon. Sa démonstration est techniquement exigeante, mais il faut que l'énoncé soit bien compris, en particulier le sens précis de la clause d'unicité, et être capable de l'appliquer dans des cas particuliers. Il est important de connaître les groupes d'ordre premier ainsi que les groupes d'ordre inférieur à 7.

Les exemples doivent figurer en bonne place dans cette leçon. L'étude des groupes d'isométries laissant fixe un polygone (ou un polyèdre) régulier peut être opportunément exploitée sous cet intitulé. Afin d'illustrer leur présentation, les candidats peuvent aussi s'intéresser à des groupes d'automorphismes ou à des représentations de groupes, ou étudier les groupes de symétries $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5$ et relier sur ces exemples géométrie et algèbre.

Pour aller plus loin, les candidats peuvent s'attarder sur la dualité dans les groupes abéliens finis. Comme application, la cyclicité du groupe multiplicatif d'un corps fini est tout à fait adaptée. Des exemples de caractères, additifs, ou multiplicatifs dans le cadre des corps finis, sont les bienvenus. Il est aussi possible de s'intéresser aux sommes de GAUSS. S'ils le désirent, les candidats peuvent ensuite introduire la transformée de FOURIER discrète qui pourra être vue comme son analogue analytique, avec ses formules d'inversion, sa formule de PLANCHEREL. Ainsi, la leçon peut mener à introduire la transformée de FOURIER rapide sur un groupe abélien dont l'ordre est une puissance de 2 ainsi que des applications à la multiplication d'entiers, de polynômes et éventuellement au décodage de codes via la transformée de HADAMARD.

105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Parmi les attendus, il faut savoir relier la leçon avec les notions d'orbites et d'actions de groupes. Il faut aussi savoir décomposer une permutation en cycles à supports disjoints, tant sur le plan théorique (preuve du théorème de décomposition), que pratique (sur un exemple). Il est important de savoir déterminer les classes de conjugaisons du groupe symétrique par la décomposition en cycles, d'être capable de donner des systèmes de générateurs. L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement. Il est bon d'avoir en tête que tout groupe fini se plonge dans un groupe symétrique et de savoir calculer la signature des permutations ainsi obtenues dans des cas concrets. Les applications sont nombreuses, il est très naturel de parler du déterminant, des polynômes symétriques ou des fonctions symétriques des racines d'un polynôme. On peut également parler du lien avec les groupes d'isométries des solides.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant par exemple aux automorphismes du groupe symétrique, à des problèmes de dénombrement, aux représentations des groupes des permutations ou encore aux permutations aléatoires.

106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

Cette leçon ne doit pas se résumer à un catalogue de résultats épars sur $\mathrm{GL}(E)$. Il est important de savoir faire correspondre les sous-groupes du groupe linéaire avec les stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, etc.). On doit présenter des systèmes de générateurs de $\mathrm{GL}(E)$ et étudier la topologie de ce groupe en précisant pourquoi le choix du corps de base est important. Les liens avec le pivot de GAUSS sont à détailler. Il faut aussi savoir réaliser $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ et faire le lien entre signature et déterminant.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en remarquant que la théorie des représentations permet d'illustrer l'importance de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ et de son sous-groupe unitaire. Ils peuvent également étudier les sous-groupes compacts maximaux et les sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}(n)$.

108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

La description ensembliste du groupe engendré par une partie doit être connue et les groupes monogènes et cycliques doivent être évoqués. C'est une leçon qui doit être illustrée par des exemples très variés. Il est indispensable de donner des parties génératrices pour tous les exemples proposés. Les groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ fournissent des exemples naturels tout comme les groupes de permutations, les groupes linéaires ou leurs sous-groupes (par exemple $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$, $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ ou $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$). Ainsi, on peut s'attarder sur l'étude du groupe des permutations avec différents types de parties génératrices en discutant de leur intérêt (ordre, simplicité de $\mathcal{A}_5$ par exemple). On peut présenter le groupe $\mathrm{GL}(E)$ généré par des transvections et des dilatations en lien avec le pivot de GAUSS, le calcul de l'inverse ou du rang (par action sur $M_{n,p}(\mathbf{K})$), le groupe des isométries d'un triangle équilatéral qui réalise S_3 par identifications des générateurs. Éventuellement, il est possible de discuter des conditions nécessaires et suffisantes pour que $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^{\times}$ soit cyclique ou la détermination de générateurs du groupe diédral.

On illustre comment la connaissance de parties génératrices s'avère très utile dans certaines situations, par exemple pour l'analyse de morphismes de groupes, ou pour montrer la connexité par arcs de certains sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

S'il le souhaite, le candidat peut s'intéresser à la présentation de certains groupes par générateurs et relations. Pour aller plus loin, il est également possible de parler du logarithme discret et de ces applications à la cryptographie (algorithme de DIFFIE-HELLMAN, cryptosystème de EL GAMAL).

120 : Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

On construit rapidement $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, puis on en décrit les éléments inversibles, les diviseurs de zéro et les idéaux. Ensuite, le cas où l'entier n est un nombre premier doit être étudié. La fonction indicatrice d'EULER ainsi que le théorème chinois et sa réciproque sont incontournables.

Les applications sont très nombreuses. Les candidats peuvent, par exemple, choisir de s'intéresser à la résolution d'équations diophantiennes (par réduction modulo n bien choisi) ou bien au cryptosystème RSA. Si des applications en sont proposées, l'étude des morphismes de groupes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ ou le morphisme de FROBENIUS peuvent figurer dans la leçon.

S'ils le désirent, les candidats peuvent poursuivre en donnant une généralisation du théorème chinois lorsque deux éléments ne sont pas premiers entre eux, ceci en faisant apparaître le PGCD et le PPCM de ces éléments.

Enfin, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant au calcul effectif des racines carrées dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, au logarithme discret, ou à la transformée de FOURIER rapide.

121 : Nombres premiers. Applications.

Le sujet de cette leçon, souvent appréciée des candidats, est très vaste. Elle doit donc être abordée en faisant des choix qui devront être clairement motivés. Des conjectures classiques ont aussi leur place dans cette leçon. On peut définir certaines fonctions importantes en arithmétique, les relier aux nombres premiers et illustrer leurs utilisations. Il est particulièrement souhaitable de s'intéresser aussi aux aspects algorithmiques du sujet (tests de primalité). En plus d'une étude purement interne à l'arithmétique des entiers, il est important d'exhiber des applications dans différents domaines : théorie des corps finis, théorie des groupes, arithmétique des polynômes, cryptographie, etc. La réduction modulo p n'est pas hors-sujet et constitue un outil puissant pour résoudre des problèmes arithmétiques simples. La répartition des nombres premiers doit être évoquée : certains résultats sont accessibles dans le cadre du programme du concours, d'autres peuvent être admis et cités pour leur importance culturelle.

122 : Anneaux principaux. Applications.

Comme l'indique son intitulé, cette leçon ne doit pas se cantonner aux aspects théoriques. L'arithmétique des anneaux principaux doit être décrite et les démonstrations doivent être maîtrisées (lemme d'EUCLIDE, théorème de GAUSS, décomposition en irréductibles, PGCD et PPCM, etc.). Les anneaux euclidiens représentent une classe importante d'anneaux principaux et l'algorithme d'EUCLIDE a toute sa place dans cette leçon pour effectuer des calculs. Les applications en algèbre linéaire ne manquent pas et doivent être mentionnées (par exemple, le lemme des noyaux ou la notion de polynôme minimal pour un endomorphisme, pour un endomorphisme relativement à un vecteur ou pour un nombre algébrique). Si les anneaux classiques $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ doivent impérativement figurer, il est possible d'en évoquer d'autres (décimaux, entiers de GAUSS $\mathbf{Z}[i]$ ou d'EISENSTEIN $\mathbf{Z}[e^{2i\pi/3}]$) accompagnés d'une description de leurs inversibles, de leurs irréductibles et éventuellement d'applications à des problèmes arithmétiques (équations diophantiennes).

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant à l'étude des réseaux, à des exemples d'anneaux non principaux, mais aussi à des exemples d'équations diophantiennes résolues à l'aide d'anneaux principaux. À ce sujet, il sera fondamental de savoir déterminer les unités d'un anneau, et leur rôle au moment de la décomposition en facteurs premiers. De même, le calcul effectif des facteurs invariants de matrices à coefficients dans un anneau principal peut être présenté.

123 : Corps finis. Applications.

Une construction des corps finis doit être connue et une bonne maîtrise des calculs dans les corps finis est indispensable. Les injections des divers $\mathbf{F}_q$ doivent être connues. Des applications des corps finis (y compris pour $\mathbf{F}_q$ avec q non premier !) ne doivent pas être oubliées. Par exemple, l'étude de polynômes à coefficients entiers et de leur irréductibilité peut figurer dans cette leçon. Le calcul des degrés des extensions et le théorème de la base téléscopique sont incontournables. La structure du groupe multiplicatif doit aussi être connue. L'étude des carrés dans un corps fini et la résolution d'équations de degré 2 sont envisageables.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en détaillant des codes correcteurs ou en étudiant l'irréductiblilité des polynômes à coefficients dans un corps fini.

125 : Extensions de corps. Exemples et applications.

Le théorème de la base téléscopique et ses applications à l'irréductibilité de certains polynômes, ainsi que les corps finis, sont incontournables. De même il faut savoir calculer le polynôme minimal d'un élément algébrique dans des cas simples, notamment pour quelques racines de l'unité. La leçon peut être illustrée par des exemples d'extensions quadratiques et leurs applications en arithmétique, ainsi que par des extensions cyclotomiques.

S'ils le désirent, les candidats peuvent montrer que l'ensemble des nombres algébriques forme un corps algébriquement clos, par exemple en expliquant comment l'utilisation du résultant permet de calculer des polynômes annulateurs de sommes et de produits de nombres algébriques. Pour aller plus loin, les candidats peuvent parler des nombres constructibles à la règle et au compas, et éventuellement s'aventurer en théorie de GALOIS.

126 : Exemples d'équations en arithmétique.

Dans cette leçon, il est indispensable de s'intéresser à des équations sur $\mathbf{Z}$ mais aussi des équations dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et dans les corps finis. On doit présenter les notions de bases servant à aborder les équations de type $ax + by = d$ (identité de BEZOUT, lemme de GAUSS). On doit présenter des exemples d'utilisation effective du lemme chinois.

Ensuite, la méthode de descente de Fermat et l'utilisation de la réduction modulo un nombre premier p méritent d'être mis en œuvre. La leçon peut aussi dériver vers la notion de factorialité, illustrée par des équations de type Mordell, Pell-Fermat, et même Fermat (pour $n = 2$, ou pour les nombres premiers de Sophie Germain). La résolution des systèmes linéaires sur $\mathbf{Z}$ peut être abordée. Il est de plus naturel de s'intéresser à la résolution des systèmes de congruences, à la recherche de racines carrées dans les corps finis. Les candidats peuvent plus généralement aborder la recherche des racines des polynômes dans les corps finis.

S'ils le désirent, les candidats peuvent étudier les coniques sur les corps finis et la recherche de points sur ces coniques.

141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

La présentation du bagage théorique permettant de définir corps de rupture, corps de décomposition, ainsi que des illustrations dans différents types de corps (réel, rationnel, corps finis) sont inévitables. Les corps finis peuvent être illustrés par des exemples de polynômes irréductibles de degré 2, 3, 4 sur $\mathbf{F}_2$ ou $\mathbf{F}_3$. Il est nécessaire de présenter des critères d'irréductibilité de polynômes et des polynômes minimaux de quelques nombres algébriques.

Il est bon de savoir montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels est un corps algébriquement clos. Le théorème de la base téléscopique, ainsi que les utilisations arithmétiques (utilisation de la divisibilité) que l'on peut en faire dans l'étude de l'irréductibilité des polynômes, est incontournable.

Des applications du corps de décomposition doivent être mentionnées, par exemple en algèbre linéaire.

142 : PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

Le champ d'étude de cette leçon ne peut se limiter au cas de $\mathbf{Z}$; il s'agit de définir et manipuler les notions de PGCD et PPCM dans un anneau factoriel et comme générateurs de sommes/intersections d'idéaux dans un anneau principal. Le candidat doit prendre soin de différencier le cadre théorique des anneaux factoriels ou principaux dans lequel sont définis les objets et dans lequel s'appliquent les énoncés des théorèmes proposés et le cadre euclidien fournissant les algorithmes. Bien sûr, la leçon peut opportunément s'illustrer d'exemples élémentaires d'anneaux euclidiens, comme $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$.

Une part substantielle de la leçon doit être consacrée à la présentation d'algorithmes : algorithme d'Euclide, algorithme binaire, algorithme d'Euclide étendu. Dans le cas des polynômes, il faut étudier l'évolution de la suite des degrés et des restes. On peut évaluer le nombre d'étapes de ces algorithmes dans les pires cas et faire le lien avec les suites de Fibonacci.

Des applications élémentaires sont particulièrement bienvenues : calcul de relations de Bezout, résolutions d'équations diophantiennes linéaires, inversion modulo un entier ou un polynôme, calculs d'inverses dans les corps de ruptures, les corps finis. On peut aussi évoquer le théorème chinois effectif, la résolution d'un système de congruences et faire le lien avec l'interpolation de Lagrange.

Pour aller plus loin, on peut évoquer le rôle de algorithme d'Euclide étendu dans de nombreux algorithmes classiques en arithmétique (factorisation d'entiers, de polynômes, etc). Décrire l'approche matricielle de l'algorithme d'Euclide et l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Z}^2$ est tout à fait pertinent. On peut aussi établir l'existence d'un supplémentaire d'une droite dans $\mathbf{Z}^2$, ou d'un hyperplan de $\mathbf{Z}^n$, la possibilité de compléter un vecteur de $\mathbf{Z}^n$ en une base.

La leçon peut amener à étudier les matrices à coefficients dans un anneau principal ou euclidien, et, de manière plus avancée, la forme normale d'Hermite et son application à la résolution d'un système d'équations diophantiennes linéaires. De même, aborder la forme normale de Smith, et son application au théorème de la base adaptée, permet de faire le lien avec la réduction des endomorphismes *via* le théorème des invariants de similitude.

La leçon invite aussi, pour des candidats familiers de ces notions, à décrire le calcul de PGCD dans $\mathbf{Z}[X]$ et $\mathbf{K}[X, Y]$, avec des applications à l'élimination de variables. On peut rappeler les relations entre PGCD et résultant et montrer comment obtenir le PGCD en échelonnant la matrice de SYLVESTER. Sur l'approximation diophantienne, on peut enfin envisager le développement d'un rationnel en fraction continue et l'obtention d'une approximation de PADÉ-HERMITE à l'aide de l'algorithme d'EUCLIDE, la recherche d'une relation de récurrence linéaire dans une suite ou le décodage des codes BCH.

144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications

Dans cette leçon, il est indispensable de bien définir l'ordre de multiplicité d'une racine (définition algébrique et analytique, quand c'est possible). Les fonctions symétriques élémentaires et les relations entre cœfficients et racines doivent être maîtrisées et pouvoir être mises en œuvre. Des méthodes, même élémentaires, de localisation des racines ont toute leur place et peuvent déboucher sur des résultats de topologie à propos de la continuité des racines.

Il peut être pertinent d'introduire la notion de polynôme scindé et de citer le théorème de D'ALEMBERT-GAUSS. Il est apprécié de faire apparaître le lien entre la recherche des racines d'un polynôme et la réduction des matrices. Les candidats peuvent également s'intéresser aux racines des polynômes orthogonaux, ou aux règles des signes de DESCARTES et de STURM. L'étude des propriétés des nombres algébriques peuvent trouver leur place dans cette leçon. La théorie des corps et le cas particulier des corps finis peuvent aussi être évoqués de façon pertinente.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser à des problèmes de localisation des valeurs propres, comme les disques de GERSHGORIN ou au calcul effectif d'expressions polynomiales symétriques des racines d'un polynôme.

Il ne s'agit par contre en aucun cas d'adapter le plan de la leçon 141 : l'irréductibilité des polynômes peut être évoquée mais ne doit pas être l'élément central de la leçon.

148 : Exemples de décompositions de matrices. Applications.

Dans cette leçon, le candidat choisit quelques exemples de décompositions de matrices qu'il présente avec quelques applications significatives. Citons les plus classiques : décomposition LU, décomposition de Dunford, décomposition de Frobenius, décomposition de Jordan, décomposition QR, décomposition polaire, décomposition de Cholesky... Il ne s'agit pas d'établir un catalogue complet, mais plutôt de faire un choix avec des méthodes et des domaines d'applications variées. Les aspects de constructions effectives ou approchèes algorithmiques doivent être abordès. Les relations entre les différentes décompositions proposées , s'il y en a, doivent être connues.

149 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

Cette leçon doit aborder la notion de vecteurs propres et de valeurs propres de façon générale et mettre en lumière l'exploitation de techniques d'algèbre ou d'analyse pour aborder leur recherche. Après avoir exploré la détermination théorique exacte des éléments propres, on s'intéresse à des exemples de matrices dont les éléments propres sont remarquables (matrices compagnons, matrices circulantes, matrices d'ordre fini...) et donné des exemples de situations où la connaissance d'éléments propres s'avère utile. On doit connaître les limites du calcul exact, même si le cadre mathématique nécessaire est non exigible et hors programme et introduire sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ une ou plusieurs méthodes itératives, dont on démontre la convergence. Les notions de norme matricielle, de rayon spectral doivent être maîtrisées. Le lien avec la convergence des suites du type $X_{n+1} = AX_n$ doit être connu et illustré. On peut s'intéresser à la localisation des valeurs propres. La problématique du conditionnement doit être abordée en distinguant le problème général et le cas particulier des matrices auto-adjointes. Parmi les points intéressants à développer, on peut citer les méthodes de la puissance, puissance inverse et

QR pour la recherche d'éléments propres. S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être fait avec la théorie des représentations et la transformée de FOURIER rapide, ainsi qu' au comportement de la suite des itérées de matrices stochastiques ou plus généralement de matriices à coefficients positifs, au moins dans des cas particuliers.

151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il est indispensable de présenter les résultats fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves. Ces théorèmes semblent simples car ils ont été très souvent pratiqués, mais leur preuve demande un soin particulier. Il est important de savoir justifier pourquoi un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est aussi de dimension finie.

On peut montrer, sur des exemples, comment la dimension finie intervient dans la démonstration de certains résultats (récurrence sur la dimension, égalité de sous-espaces par inclusion et égalité des dimensions, isomorphisme par injectivité et dimension, etc.). À cette occasion, on pourra signaler des résultats qui ne subsistent pas en dimension infinie. Le pivot de GAUSS ainsi que les diverses notions et caractérisations du rang trouvent leur place dans cette leçon. Les applications sont nombreuses : existence de polynômes annulateurs, dimension de l'espace des formes n-linéaires alternées en dimension n, isomorphisme avec le dual dans le cadre euclidien et théorème de RIESZ, espaces de solutions d'équations différentielles ordinaires, caractérisation des endomorphismes diagonalisables, décomposition d'isométries en produits de réflexions, dimensions des représentations irréductibles d'un groupe fini, théorie des corps finis, etc.

Les caractérisations du rang peuvent aussi être utilisées pour démontrer l'invariance du rang par extension de corps, ou pour établir des propriétés topologiques (sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). S'ils le désirent, les candidats peuvent déterminer des degrés d'extensions dans la théorie des corps ou s'intéresser aux nombres algébriques. Il est également possible d'explorer des applications en analyse comme les extrémas liés. Dans un autre registre, il est pertinent d'évoquer la méthode des moindres carrés dans cette leçon, par exemple en faisant ressortir la condition de rang maximal pour garantir l'unicité de la solution et s'orienter vers les techniques de décomposition en valeurs singulières pour le cas général. On peut alors naturellement analyser l'approximation d'une matrice par une suite de matrices de faible rang.

152 : Déterminant. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il faut commencer par définir correctement le déterminant. et savoir démontrer ses propriétés fondamentales (en particulier le fait que l'espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1). La distinction entre le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée et le déterminant d'un endomorphisme doit être comprise. L'interprétation en termes de volume est essentielle. Le calcul explicite est important, mais le jury ne peut se contenter d'un déterminant de VANDERMONDE ou d'un déterminant circulant. Les opérations élémentaires permettant de calculer des déterminants doivent être présentées et illustrées. Le polynôme caractéristique est incontournable (on prendra garde que $A-XI_n$ est à coefficients dans $\mathbf{K}[X]$ qui n'est pas un corps). Parmi les autres applications possibles, on peut penser aux déterminants de GRAM (permettant des calculs de distances), au déterminant jacobien (utile en calcul intégral et en probabilités), à l'utilisation du déterminant en géométrie (coordonnées barycentriques, colinéarité, etc.) ou encore à son rôle dans l'étude des formes quadratiques. Il est bienvenu d'illustrer la continuité du déterminant par une application. On pourra aussi s'intéresser à sa différentielle.

Pour aller plus loin, les candidats peuvent s'intéresser aux calculs de déterminants sur $\mathbf{Z}$. Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent aussi trouver leur place dans cette leçon pour des candidats ayant une pratique de ces notions.

153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de résultats autour de la réduction qui est ici un moyen pour démontrer des théorèmes ; les polynômes d'endomorphismes doivent y occuper une place importante. Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $\mathbf{K}[u]$ et aux liens entre réduction de l'endomorphisme u et structure de l'algèbre $\mathbf{K}[u]$. Il faut connaître la dimension de $\mathbf{K}[u]$ sans hésitation. Il est ensuite possible de s'intéresser aux propriétés globales de cette algèbre (inversibles, condition nécessaire et suffisante assurant que ce soit un corps...). De même il est important de mettre en évidence les liens entre les idempotents et la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques.

Le lemme des noyaux, les polynômes caractéristiques et minimaux doivent figurer dans la leçon. Il faut bien préciser que, dans la réduction de DUNFORD, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et en connaître les conséquences théoriques et pratiques. L'aspect *applications* est trop souvent négligé. Il est possible, par exemple, de mener l'analyse spectrale de matrices stochastiques. On attend d'un candidat qu'il soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). Il est bien sûr important de ne pas faire de confusion entre diverses notions de multiplicité pour une valeur propre λ donnée (algébrique ou géométrique). Enfin, calculer A^k ne nécessite pas, en général, de réduire A (la donnée d'un polynôme annulateur de A suffit souvent). Il est possible d'envisager des applications aux calculs d'exponentielles de matrices.

S'il le souhaite, le candidat pourra étudier des équations matricielles et de calcul fonctionnel, avec par exemple l'étude de l'extraction de racines ou du logarithme.

154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Dans cette leçon, il faut présenter des propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études détaillées sont les bienvenues, par exemple dans le cas d'une matrice diagonalisable ou dans le cas d'une matrice nilpotente d'indice maximum.

L'étude des endomorphismes cycliques et des endomorphismes semi-simples trouvent tout à fait leur place dans cette leçon. Dans le cas des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on pourra, si on le souhaite, caractériser ces derniers par la fermeture de leur orbite.

La réduction des endomorphismes normaux et l'exemple de résolutions d'équations matricielles peuvent être présentés en applications.

La décomposition de FROBENIUS constitue également une application intéressante de cette leçon. Il ne faut pas oublier d'examiner le cas des sous-espaces stables par des familles d'endomorphismes. Ceci peut déboucher par exemple sur des endomorphismes commutants entre eux ou sur la théorie des représentations.

155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Dans cette leçon, on attend des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères de diagonalisabilité. On doit notamment savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est encore diagonalisable. Il ne faut pas oublier de parler du cas des endomorphismes symétriques. On peut étudier certaines propriétés topologiques en prenant le soin de donner des précisions sur le corps $\mathbf{K}$ et la topologie choisie pour $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Les candidats doivent disposer de méthodes efficaces de calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable. On peut dénombrer les endomorphismes diagonalisables dans les corps finis, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être fait avec la théorie des représentations et la transformée de FOURIER rapide.

156 : Exponentielle de matrices. Applications.

Bien que ce ne soit pas une leçon d'analyse, il faut toutefois pouvoir justifier clairement la convergence de la série exponentielle.

Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées. Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels ? La matrice définie par blocs $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels ?

La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de $\exp(A)$ trouve toute son utilité dans cette leçon. L'exponentielle fait bon ménage avec la décomposition polaire dans bon nombre de problèmes sur les sous-groupes du groupe linéaire. L'étude du logarithme (quand il est défini) peut être menée dans cette leçon.

Il est bon de connaître l'image par exponentielle de certains sous-ensembles de matrices (ensemble des matrices symétriques, hermitiennes, ou antisymétriques).

Les applications aux équations différentielles méritent d'être présentées sans toutefois constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidats de proposer ce thème dans un développement de cette leçon, sauf à avoir bien compris comment les apports algébriques permettent ici de simplifier les conclusions analytiques.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'aventurer vers les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire (on peut alors voir si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$) ou vers les algèbres de Lie.

157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Il est indispensable de connaître les polynômes caractéristiques et minimaux d'un endomorphisme nilpotent et de savoir justifier son caractère trigonalisable. Il est bon de savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme trigonalisable (respectivement nilpotent) sur un sous-espace stable est encore trigonalisable (respectivement nilpotent). L'utilisation des noyaux itérés est fondamentale dans cette leçon, par exemple pour déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables. Il est intéressant de présenter des conditions suffisantes de trigonalisation simultanée ; l'étude des endomorphismes cycliques a toute sa place dans cette leçon. L'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter la décomposition de Frobenius, ou des caractérisations topologiques des endomorphismes nilpotents, ou encore des propriétés topologiques de l'ensemble des endomorphismes nilpotents.

158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Le théorème spectral est indispensable dans cette leçon. Une place importante mérite d'être faite au cas particulier des matrices symétriques positives et définies positives ; les candidats doivent connaître leurs propriétés fondamentales, leur rôle, et la structure de leur ensemble. La notion de signature pourra être présentée en montrant comment elle détermine la classe de congruence d'une matrice symétrique réelle. L'action du groupe linéaire et du groupe orthogonal sur l'espace des matrices symétriques peut donner un cadre naturel à cette leçon. Le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes est incontournable. L'orthogonalisation simultanée est un résultat important de cette leçon. Il faut en connaître les applications géométriques aux quadriques.

Les candidats familiers avec ces notions pourront illustrer la leçon en évoquant le cas des matrices de covariance de vecteurs aléatoires et discuter les conditions en assurant le caractère inversible.

Une discussion de la décomposition de Cholesky, qui a de nombreuses applications pour le calcul scientifique (en lien avec la résolution de systèmes linéaires ou de problèmes de moindres carrés) ou en probabilités (construction d'un vecteur gaussien de matrice de covariance donnée à partir d'un vecteur gaussien de matrice de covariance identité), peut mériter sa place dans cette leçon. On poura également évoquer la décomposition en valeurs singulières d'une matrice (particulièrement importante pour le traitement massif de données).

159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon ; celle-ci permet de mettre en évidence des correspondances entre un morphisme et son morphisme transposé, entre un sous-espace et son orthogonal (canonique), entre les noyaux et les images ou entre les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Le passage d'une base à sa base duale ou antéduale, ainsi que les formules de changement de base, doivent être maîtrisés. On pourra s'intéresser aux cas spécifiques où l'isomorphisme entre l'espace et son dual est canonique (cas euclidien, cas des matrices).

Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans via la dualité est important dans cette leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans.

Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique ou analytique. Il faut que les développements proposés soient en lien direct avec la leçon. Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction à valeurs réelles est une forme linéaire semble incontournable.

Il est possible d'illustrer la leçon avec un point de vue probabiliste, en rappelant que la loi d'un vecteur aléatoire X est déterminée par les lois unidimensionnelles de $X \cdot u$ pour tout vecteur u.

160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Dans cette leçon, le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Le théorème spectral pour les auto-adjoints et la réduction des endomorphismes orthogonaux sont des résultats incontournables. Le jury met les candidats en garde sur le fait que le lemme des noyaux ou la décomposition de Dunford ne sont pas des développements adaptés à cette leçon. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur. De même la réduction d'endomorphismes normaux peut être évoquée.

L'étude des projections orthogonales (en lien ave le calcul de distances), des rotations, des réflexions, des renversements, etc. fournit des exemples dignes d'intérêt. Une illustration pertinente peut s'appuyer sur la description de problèmes de moindres carrés en faisant ressortir le rôle de l'hypothèse de rang plein de A sur le caractère inversible de $A^{\intercal}A$.

161 : Distances et isométries d'un espace affine euclidien.

Cette leçon ne doit pas se restreindre aux seuls cas des dimensions 2 et 3, même s'il est naturel que ceux-ci y occupent une place importante. La classification des isométries en dimension 2 et 3 est exigible. En dimension 3, il faut savoir classifier les rotations et connaître les liens avec la réduction. On peut aussi penser aux isométries laissant stables certains objets en dimension 2 et 3. Il faut savoir prouver qu'une isométrie est affine, pouvoir donner des générateurs du groupe des isométries affines et savoir composer des isométries affines.

Les candidats peuvent en outre parler de la définition de la distance, de la distance à un sous-espace vectoriel et de déterminant de Gram. Les groupes de similitude peuvent également être abordés.

S'ils le désirent, les candidats peuvent évoquer l'interprétation de l'écart-type comme une distance, et présenter la matrice de covariance comme un exemple pertinent de matrice de Gram. Ainsi, les déterminants de Gram permettent de calculer l'erreur commise dans le cadre de prédictions affines.

162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Dans cette leçon, les techniques liées au simple pivot de Gauss constituent l'essentiel des attendus. Il est impératif de faire le lien avec la notion de système échelonné (dont on donnera une définition précise et correcte) et de situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire, sans oublier la dualité. Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt algorithmique des méthodes présentées doit être expliqué, éventuellement en l'illustrant par des exemples simples (où l'on attend parfois une résolution explicite).

Parmi les conséquence théoriques, les candidats peuvent notamment donner des systèmes de générateurs de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$. Ils est aussi pertinent de présenter les relations de dépendance linéaire sur les colonnes d'une matrice échelonnée qui permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ donnée par $(P, A) \mapsto PA$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent exploiter les propriétés des systèmes d'équations linéaires pour définir la dimension des espaces vectoriels et obtenir une description de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels donnés par des systèmes générateurs, ou d'une somme de deux sous-espaces vectoriels donnés par des équations.

De même, des discussions sur la résolution de systèmes sur $\mathbf{Z}$ et la forme normale de Hermite peuvent trouver leur place dans cette leçon. Enfin, il est possible de présenter les décompostions LU et de Choleski, en évaluant le coût de ces méthodes ou encore d'étudier la résolution de l'équation normale associée aux problèmes des moindres carrés et la détermination de la solution de norme minimale par la méthode de décomposition en valeurs singulières.

170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

L 'intitulé implique implicitement que le candidat ne doit pas se contenter de travailler sur $\mathbf{R}$. On peut par exemple adopter le point de vue de l'action par congruence du groupe linéaire sur l'espace des matrices symétriques, ce qui permet de dégager quelques invariants (rang, discriminant), de s'interroger sur le nombre et la structure des orbites, L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être mis en œuvre sur une forme quadratique simple. En ajoût de la a classification sur $\mathbf{R}$, le candidat pourra parler de la classification des formes quadratiques sur le corps des complexes. Il est aussi possible de s'intéresser à la classification sur les corps finis. On peut s'intéresser au groupe orthogonal (générateurs, structure du groupe quand l'espace est de dimension 2). Le lien avec la dualité des espaces vectoriels permet de comprendre le sens de la décomposition de Gauss et de comparer les notions de sous-espace orthogonal, en s'interrogeant sur les conditions pour que que l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel en soit un supplémentaire.

Les notions d'isotropie et de cône isotrope doivent être connues. On pourra rattacher cette notion à la géométrie différentielle. Pour aller plus loin, l'étude de la géométrie d'un espace vectoriel muni d'une forme quadratique de signature (p,q) peut-être envidagée, notamment la structure du cône de lumière de l'espace-temps de Minkowski, avec la traduction géométrique de la notion d'orthogonal dans ce cas et des propriétés du groupe O(p,q).

171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Dans cette leçon, la loi d'inertie de Silvester doit être présentée ainsi que l'orthogonalisation simultanée. L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être expliqué sur une forme quadratique de $\mathbf{R}^3$; le lien avec la signature doit être clairement énoncé et la signification géométrique des deux entiers r et s composant la signature d'une forme quadratique réelle doit être expliqué. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante qui mérite d'être présentée dans cette leçon.

La définition et les propriétés classiques des coniques d'un plan affine euclidien doivent être connues. On peut présenter les liens entre la classification des formes quadratiques et celles des coniques ; de même il est intéressant d'évoquer le lien entre le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi aller vers la théorie des représentations et présenter l'indicatrice de SCHUR-FROBENIUS qui permet de réaliser une représentation donnée sur le corps des réels.

181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Dans cette leçon, la notion de coordonnées barycentriques est incontournable ; des illustrations dans le triangle (coordonnées barycentriques de certains points remarquables) sont envisageables. Les candidats doivent savoir reconnaître des lignes de niveau et des lieux de points en utilisant des coordonnées barycentriques. Il est important de parler d'enveloppe convexe et de savoir dessiner l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points dans le plan ; le théorème de GAUSS-LUCAS trouve parfaitement sa place dans cette leçon. Il semble approprié d'évoquer les points extrémaux, ainsi que des applications qui en résultent. Par ailleurs, il est important d'avoir compris le lien entre fonctions convexes et ensembles convexes.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en présentant le lemme de FARKAS, le théorème de séparation de HAHN-BANACH, les théorèmes de HELLY et de CARATHEODORY, ou parler des sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

géométrie.

190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Il est nécessaire de dégager clairement différentes méthodes de dénombrement et de les illustrer d'exemples significatifs. De nombreux domaines de mathématiques sont concernés par des problèmes de dénombrement, cet aspect varié du thème de la leçon doit être mis en avant. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. De plus, il est naturel de calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités. Il est important de connaître l'interprétation ensembliste de la somme des coefficients binomiaux et ne pas se contenter d'une justification par le binôme de NEWTON. L'introduction des corps finis (même en se limitant aux cardinaux premiers) permet de créer un lien avec l'algèbre linéaire. Les actions de groupes peuvent également conduire à des résultats remarquables.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter des applications de la formule d'inversion de MÖEBIUS ou de la formule de BURNSIDE. Des candidats ayant un bagage probabiliste pourront explorer le champ des permutations aléatoires, en présentant des algorithmes pour générer la loi uniforme sur le groupe symétrique S_n et analyser certaines propriétés de cette loi uniforme (points fixes, cycles, limite $n \to +\infty$...).

191 : Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie

Le jury souhaite proposer une leçon qui offre une ouverture large autour du thème de la géométrie. Avec cet intitulé, les candidats sont libres de présenter des résultats et des exemples très variés en lien avec la géométrie. L'objectif n'est pas de couvrir le plus d'aspects possible, mais plutôt d'en proposer certains suffisamment consistants et variés. À partir du moment où ils sont de nature géométrique, tous les éléments du programme peuvent être pertinents. En contrepartie de cette liberté laissée aux candidats, une difficulté est de structurer la présentation des objets et des notions choisies. Ainsi, plusieurs approches sont possibles pour organiser cette leçon, par exemple :

— en regroupant les outils par « famille » : outils matriciels (repérage des points par des matrices colonnes, des transformations par des matrices, rang, réduction, etc.), outils polynomiaux (formes quadratiques, déterminant, résultant, etc.), outils structurels (groupes, corps) ;
— ou par niveau d'abstraction/de généralité (nombres réels, complexes, matrices, groupes...) ;
— ou par type d'objectifs (identifier des objets géométriques, les mesurer, les classifier, démontrer des résultats en utilisant des transformations géométriques...)

Il est aussi possible de se focaliser sur un seul type d'outils (par exemple algèbre linéaire, géométrie affine ou groupes) en détaillant plusieurs applications en géométrie ou sur une question géométrique fouillée à l'aide de diverses techniques (par exemple sur des problèmes impliquant des figures géométriques comme les cercles et triangles, les polygones et polyèdres réguliers, etc.). Des situations « élémentaires », dans le plan, permettent certainement de mettre en valeur des connaissances et un recul mathématique. Il faut bien éviter l'écueil d'un catalogue fastidieux ou celui qui consisterait à recycler directement le contenu d'une autre leçon avec un vague habillage géométrique.

Parmi les nombreux éléments qui peuvent être discutés, on peut indiquer :

— les notions de distance, aire, volume. Notamment les propriétés de la matrice de Gram, le lien entre déterminant et aire d'un parallélogramme ou volume d'un parallélépipède, la construction du produit vectoriel et du produit mixte,... peuvent être exploités avec pertinence dans cette leçon. On peut ainsi être amené à étudier l'aire balayée par un arc paramétré du plan, la position d'un point par rapport à un cercle circonscrit à un triangle, etc. Le déterminant de Cayley-Menger permet de mettre en évidence des conditions pour que $n+1$ points de $\mathbf{R}^n$ forment une base affine, ou que $n+2$ points de $\mathbf{R}^n$ soient cocycliques. Dans une autre direction, la division euclidienne dans $\mathbf{Z}$ donne une preuve d'une forme du théorème de la base adaptée, avec pour conséquence le calcul du volume (d'une maille élémentaire) d'un sous réseau de $\mathbf{Z}^n$ comme étant le déterminant d'un système générateur dans la base canonique.
— l'apport de l'algèbre linéaire à la géométrie. On peut ainsi exploiter le calcul matriciel et les techniques de réduction pour mettre en évidence des informations de nature géométrique (avec les exemples fondamentaux des homothéties, projections, symétries, affinités, rotations, la classification des isométries vectorielles, etc.). On peut être alors amené à présenter le théorème de Cartan-Dieudonné sur la décomposition d'isométries euclidiennes en produit de réflexions ou encore évoquer une (ou des) interprétation(s) géométrique(s) de la décomposition en valeurs singulières. Dans cette même veine, la leçon peut être orientée vers la géométrie affine, en s'adossant à la théorie des espaces vectoriels pour définir certains objets (espaces et sous-espaces affines, applications affines, repères affines, etc), ce qui permet, par exemple, d'établir ainsi certains résultats classiques, comme les théorèmes de Thalès, Pappus, Desargues,...
— l'analyse des formes quadratiques permet d'aborder des problèmes géométriques : étude des coniques, quadriques, classification des quadriques de $\mathbf{R}^n$, interprétation géométrique de la signature, application des méthodes de réduction, etc.
— la théorie des groupes est un champ naturel pour cette leçon (mais qui n'est cependant pas indispensable) : groupes de transformations (isométries, déplacements, similitudes, translations), composition de transformations, mise en évidence d'invariants fondamentaux (angle, birapport, excentricité d'une conique). Il est possible de se focaliser sur des groupes de transformations préservant une certaine structure géométrique et en distinguant parmi eux les groupes finis (groupes d'isométries classiques), les groupes discrets infinis (avec des translations, groupes de pavages) et, pour aller plus loin, les groupes continus (groupes de Lie).
— les techniques de convexité constituent aussi un champ fructueux : le théorème de séparation par un hyperplan dans $\mathbf{R}^n$ de Hahn-Banach et, en corollaire, le théorème de Helly permettent par exemple d'établir des propriétés intéressantes sur les cordes de convexes compacts.
— certains candidats peuvent trouver intérêt à aborder les questions d'intersection de courbes

polynomiales, qui permettent notamment de mettre en œuvre le théorème de Bezout et des méthodes exploitant la notion de résultant.
- un grand nombre de problèmes de géométrie peuvent être traités en exploitant le formalisme des nombres complexes. Il est tout à fait approprié d'évoquer l'étude des inversions et, en particulier la possibilité de ramener un cercle à une droite et inversement ; la formule de Ptolémée illustre bien l'utilisation de cet outil. On peut parler des suites définies par récurrence par une homographie et leur lien avec la réduction dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ et aborder la construction de la sphère de Riemann.
- les problématiques de la construction à la règle et au compas constituent un autre axe pertinent pour cette leçon, avec le théorème de Wantzel, et peuvent conduire à s'intéresser à des extensions de corps.

Comme dans le cas des autres leçons, il est tout à fait bienvenu de chercher à illustrer cette leçon par des exemples issus de l'analyse, des probabilités, de la statistique (par exemple en évoquant l'interprétation géométrique de l'analyse en composantes principales), du calcul formel (par exemple avec les applications du résultant) ou du calcul scientifique (par exemple en présentant des problématiques de géométrie computationnelle, comme le calcul d'enveloppe convexe, les algorithmes de triangulation Delaunay, les diagrammes de Voronoi...). Les thèmes en lien avec la géométrie projective ou la géométrie algébrique peuvent permettre à certains candidats de présenter des résultats très avancés. Cette leçon nécessite une préparation très personnelle et réfléchie de la part des candidats. Les exemples et les résultats qui y sont présentés ont vocation à inciter les candidats à enrichir les autres leçons de cette épreuve d'exemples issus de la géométrie.

1.3 Épreuve orale d'analyse et probabilités

201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.

Sans sortir du programme, le candidat dispose d'au moins deux thèmes très riches pour nourrir son plan : espaces de fonctions continues sur un compact, espaces L^p sur le cercle ou sur la droite réelle.
Sur le premier sujet, le jury attend des candidats une bonne familiarité avec la convergence uniforme et son utilisation pour justifier des régularités. Le théorème de Stone-Weierstrass est évidemment incontournable, dans ses différentes versions, constructives ou non. La complétude peut également être exploitée, par exemple en lien avec les équations différentielles ou intégrales.
Sur le second, la convolution et ses applications, ainsi que l'analyse de Fourier fournissent un large terrain d'exploration.
Plusieurs prolongements s'offrent aux candidats solides : théorème de Baire et ses innombrables applications, espaces de fonctions holomorphes (théorème de Montel et ses applications, espaces de Hardy, etc.), espaces de fonctions régulières (fonctions lipschitziennes, C^k, classe de Schwartz), algèbres de Banach de fonctions (algèbre de convolution $L^1(\mathbf{R})$, algèbre du disque, algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, etc.), étude des parties compactes de $C(K)$ (K compact) voire de L^p.

203 : Utilisation de la notion de compacité.

Cette leçon ne porte pas sur la compacité en général mais sur son *utilisation*. On peut songer à plusieurs thèmes : théorèmes d'existence exploitant la compacité, utilisation de la compacité pour obtenir des uniformités.
Sur le premier sujet, on pourra s'intéresser à l'utilisation, dans les espaces compacts ou les espaces normés de dimension finie, des valeurs d'adhérence pour prouver des convergences ou des continuités, et bien sûr aux problèmes d'extrema. Un exemple est le théorème d'équivalence des normes sur un espace de dimension finie, qui repose sur un argument de compacité qu'il faut avoir bien compris.

Sur le second, on pourra explorer quelques unes des innombrables applications du théorème de Heine (intégrabilité au sens de Riemann des fonctions continues sur un segment, continuité des translations dans L^p, etc), mais aussi l'utilisation de sous-recouvrements finis (par exemple pour passer du local au global).
Les candidats solides pourront s'intéresser à la caractérisation des espaces normés de dimension finie par la compacité de la boule unité fermée (éventuellement assortie d'applications), aux équations différentielles non linéaires (phénomène de sortie de tout compact), à l'équicontinuité (théorème d'Ascoli), aux familles normales (théorème de Montel), aux opérateurs compacts.

204 : Connexité. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il convient de mettre en évidence le fait que la connexité formalise l'idée d'espace « d'un seul tenant », que la connexité par arcs permet d'illustrer géométriquement. Du point de vue opérationnel, les deux idées maîtresses sont la préservation de la connexité par image continue, et l'utilisation de la connexité pour passer du local au global.
La seconde sera abondamment illustrée dans le domaine du calcul différentiel, des équations différentielles non linéaires (passage d'une unicité locale à une unicité globale), des fonctions holomorphes (principe du prolongement analytique ou du maximum).
En cas de non-connexité, la notion pertinente est celle de composante connexe, dont une première application est la structure des ouverts de $\mathbf{R}$, et leur mesure. Les exemples issus de l'algèbre linéaire sont bien entendu les bienvenus, à condition de ne pas trop détourner la leçon...
Pour les candidats solides, de bons prolongements sont le théorème de Runge, l'ensemble triadique de Cantor comme prototype d'espace métrique compact, parfait et totalement discontinu, la notion de simple connexité.

205 : Espaces complets. Exemples et applications.

L'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence. Les illustrations ne manquent pas : existence de limites, utilisation de la convergence absolue ou normale, théorème du point fixe de Picard-Banach, prolongement des applications uniformément continues à valeurs dans un espace métrique complet, et leurs innombrables applications.
Le cas particulier des espaces de Hilbert est un riche terrain d'exploration : théorème de projection sur un convexe fermé et ses applications, analyse de Fourier sur le cercle ou sur la droite réelle.
Les espaces L^p peuvent être abordés dans le cadre de cette leçon, mais sous leur angle spécifique d'espaces de Banach.
Pour les candidats solides, le théorème de Baire fournit d'innombrables applications passionnantes. Ils pourront également songer à la théorie des algèbres de Banach, notamment l'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, ou à l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

206 : Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.

Cette leçon d'exemples sera pour le candidat l'occasion d'une réflexion sur de nombreuses parties du programme.
En topologie, il s'agit bien sûr des propriétés spécifiques aux espaces normés de dimension finie, notamment l'utilisation des valeurs d'adhérence, l'équivalence des normes ou encore l'identité entre parties compactes et parties fermées et bornées. D'autres champs d'application sont : la théorie de la mesure (mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}^d$), le calcul différentiel (utilisation de matrices jacobiennes, espaces tangents, extrema liés, etc.), les équations différentielles linéaires, les séries de Fourier et plus généra-

lement l'approximation dans un espace préhilbertien séparable par projection sur des sous-espaces de dimension finie.
Les candidats solides pourront aborder la question de l'unicité de la meilleure approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d, ou les liens entre la régularité et la qualité de l'approximation par des polynômes (algébriques ou trigonométriques) voire des fonctions rationnelles. D'autres pistes possibles sont l'étude des propriétés spectrales des opérateurs compacts, ou le théorème de Grothendieck sur les sous-espaces fermés de L^p contenus dans L^∞.

208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Cette leçon est particulièrement vaste, et sera pour le candidat une occasion de faire des choix. Il est inutile de commencer systématiquement le plan de cette leçon par de longs rappels sur les normes : comme toutes les autres, cette leçon ne doit pas tomber dans le formalisme, mais bien proposer des résultats significatifs illustrés par des exemples bien choisis, en particulier de normes équivalentes ou non, ou de calculs de normes subordonnées. En ce qui concerne le contenu, le programme offre de nombreuses possibilités : cas de la dimension finie, intervention de la complétude (en particulier le cas hilbertien), étude de la compacité de la boule unité fermée, lien entre continuité d'une forme linéaire (ou plus généralement, d'une application linéaire de rang fini) et fermeture du noyau.
Pour les candidats solides, des prolongements possibles sont : les conséquences du théorème de Baire dans le cadre des espaces de Banach (tout particulièrement le théorème de Banach-Steinhaus et son utilisation pour construire des objets pathologiques), le théorème de Hahn-Banach et ses conséquences, la théorie de algèbres de Banach, la détermination de duals topologiques.

209 : Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

Le programme offre aux candidats plusieurs pistes très riches pour nourrir cette leçon : l'approximation uniforme par des polynômes algébriques ou trigonométriques, la régularisation par convolution. Mais on pourra également penser à l'approximation des fonctions intégrables sur la droite réelle par des fonctions continues à support compact.
Les séries de Fourier s'intègrent parfaitement à cette leçon, mais le jury a constaté lors de la session 2022 que la théorie L^2 était très rarement abordée par les candidats. Dans la même thématique, on peut citer le théorème de Fejér (dans ses versions L^p ou $C(\mathbf{T})$) et ses applications.
Voici enfin quelques pistes à réserver aux candidats solides : le théorème de Runge, le théorème taubérien de Littlewood, l'unicité de la meilleure approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d, les liens entre la régularité et la qualité de l'approximation par des polynômes (algébriques ou trigonométriques) voire des fonctions rationnelles, l'approximation uniforme par des fonctions lipschitziennes.

213 : Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

L'analyse de Fourier, sur le cercle où la droite réelle, est évidemment une illustration fondamentale des résultats de ce chapitre. Le jury a noté que rares étaient les candidats qui maîtrisaient correctement la théorie L^2 des séries de Fourier.
Le fait que les polynômes constituent une base hilbertienne de l'espace des fonctions de carré intégrable relativement à certains poids est présenté quasi systématiquement en développement. Peut-être faudrait-il songer à trouver d'autres sources d'inspiration, d'autant que la preuve n'est pas toujours parfaitement comprise, et que de nombreux candidats sont incapables d'en déduire une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{R})$.
Les candidats solides pourront s'intéresser aux propriétés spectrales des opérateurs autoadjoints com-

pacts d'un espace de Hilbert, à la minimisation de fonctionnelles convexes et coercives sur un espace de Hilbert, ou encore au théorème de Paley-Wiener qui caractérise les fonctions de $L^2(\mathbf{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact, ou encore au théorème d'échantillonnage de Shannon.

214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

Les deux théorèmes fondamentaux auxquels cette leçon est consacrée offrent bien sûr une belle utilisation de la complétude, qu'on ne passera pas sous silence. Pour autant, pour traiter l'intégralité du sujet, il faut se garder d'un point de vue trop formel, et proposer des applications significatives aussi bien en analyse qu'en géométrie : étude locale de courbes, de surfaces ou d'intersection de surfaces, problèmes d'optimisation sous contraintes (si possible autres que la preuve de l'inégalité arithmético-géométrique), régularité des racines d'un polynôme en fonction des coefficients, etc.
Une bonne compréhension de la méthode des multiplicateurs de Lagrange requiert celle de la notion d'espace tangent, qui en donne une justification beaucoup plus claire que certains raisonnements purement matriciels.
Les candidats solides pourront s'intéresser à l'étude locale d'applications suffisamment régulières (submersions, immersions, théorème du rang constant, lemme de Morse), au lemme de Sard, ainsi qu'aux sous-variétés de $\mathbf{R}^n$.

215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

L'idée de base de cette leçon est qu'une fonction suffisamment régulière se comporte localement comme une application linéaire. De nombreuses différentielles usuelles (notamment issues de l'algèbre linéaire) peuvent ainsi être obtenues en calculant directement un développement limité. Sur ce point, une aisance raisonnable est attendue des candidats.
Un cas particulier important est la caractérisation des fonctions holomorphes parmi les fonctions différentiables, et son interprétation géométrique.
Les candidats semblent en général peu familiers avec les propriétés élémentaires des fonctions harmoniques, qui fournissent pourtant un riche champ d'applications.
Les candidats solides pourront s'intéresser à la différentielle de l'exponentielle matricielle, ainsi qu'aux points où celle-ci est un difféomorphisme local.
Pour ce qui concerne les applications, de nombreux thèmes relatifs aux leçons 214 ou 219 sont ici appropriés.

219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Cette leçon offre aux candidats une multitude d'approches possibles : utilisation de la topologie, du calcul différentiel, de la convexité (fonctions convexes, projection sur un convexe fermé et leurs multiples applications), de l'holomorphie.
Les candidats pourront proposer des problèmes d'optimisation sous contraintes, si possible autres que la preuve de l'inégalité arithmético-géométrique. À ce sujet, une bonne compréhension de la méthode des multiplicateurs de Lagrange requiert celle de la notion d'espace tangent, qui en donne une justification beaucoup plus claire que certains raisonnements purement matriciels.
Les algorithmes de recherche d'extremums ont également leur place dans cette leçon (méthode de Newton, du gradient à pas optimal, problème des moindres carrés, etc).
Les candidats solides pourront s'intéresser aux diverses versions du principe du maximum (fonctions holomorphes ou harmoniques, équations aux dérivées partielles), au calcul des variations, ou réfléchir à l'unicité de la meilleure approximation dans divers espaces fonctionnels, à commencer par celle des

fonctions continues sur un segment par des polynômes de degré au plus égal à d.

220 : Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

Cette leçon nécessite d'être soigneusement préparée. Bien entendu, la théorie de Cauchy-Lipschitz non linéaire y occupe une place centrale. Elle comporte plusieurs points subtils (passages du local au global, phénomènes d'explosion en temps fini) qui requièrent une attention particulière.
Cette leçon ne doit pas être abordée avec un point de vue purement formel, en se limitant aux énoncés et preuves des théorèmes fondamentaux. L'intitulé appelle clairement des études qualitatives d'équations différentielles non linéaires d'ordre 1 ou 2, sans forcément toujours se limiter au pendule ou au modèle de Lotka-Volterra.
Il est important d'avoir compris comment l'étude d'une équation d'ordre 2 se ramène à celle d'un système différentiel d'ordre 1.
Dans les exemples d'études proposés, on aura tout intérêt à mettre en évidence l'utilisation d'éléments géométriques : champs de vecteurs, points d'équilibre, barrières, isoclines, intégrales premières. Et, bien sûr, à faire des dessins ! Le cas autonome mérite une attention particulière, avec en particulier la recherche de trajectoires périodiques.

221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

La théorie de Cauchy-Lipschitz linéaire constitue une porte d'entrée obligée pour cette leçon. Elle constitue un des premiers triomphes historiques de l'utilisation de la complétude (méthode des approximations successives), et un exemple fondamental d'intervention de la dimension finie en analyse.
Sans que cet aspect devienne trop envahissant, les candidats pourront proposer quelques exemples de résolutions explicites : cas des coefficients constants (qui mobilise fortement la réduction des endomorphismes), utilisation de séries entières, variation des constantes, etc.
Même dans le cadre linéaire, les études qualitatives présentent un grand intérêt et fournissent de nombreuses possibilités aux candidats : étude du comportement asymptotique des solutions (pour lequel le lemme de Gronwall est un outil d'une grande efficacité), de la distribution des zéros, etc.
Les candidats solides pourront s'intéresser à la linéarisation d'équations non linéaires au voisinage d'un point d'équilibre, proposer des exemples de problèmes aux limites (théorie de Sturm-Liouville) ou d'études d'équations aux dérivées partielles linéaires.

222 : Exemples d'étude d'équations différentielles linéaires

Nous proposons de supprimer cette leçon, redondante avec 221.

223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

Cette leçon est limitée aux suites réelles ou complexes.
L'utilisation des valeurs d'adhérence pour montrer des convergences ou des continuités, ainsi que celle des limites inférieures et supérieures d'une suite réelle (qui permettent des rédactions expurgées d'epsilons superflus) sont des thèmes centraux.
Sans se limiter aux cas convergents, les candidats pourront également présenter des exemples d'études asymptotiques de suites définies par des sommes, des relations de récurrence, voire implicitement.
D'autres pistes sont les différentes méthodes d'approximation des réels par des irrationnels ou la résolution numérique d'équations.

Les candidats solides pourront s'intéresser par exemple à l'équirépartition, à l'accélération de la convergence, aux procédés de sommation des séries divergentes et aux théorèmes taubériens qui en découlent.

224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

Cette leçon est exclusivement consacrée à des exemples : on n'attend aucun exposé systématique sur les notions de développement asymptotique ou d'échelle de comparaison. Presque toutes les parties du programme peuvent être mises à contribution : suites définies par une relation de récurrence ou implicitement, estimation asymptotique de sommes partielles ou de restes, fonctions définies par une série ou une intégrale (comportement de la fonction ζ au voisinage de 1, méthode de Laplace, etc), mais aussi solutions d'équations différentielles dont on pourra étudier le comportement à l'infini ou la distribution des zéros.
Il ne s'agit pas de présenter un grand nombre d'exemples triviaux, mais quelques exemples significatifs bien choisis et diversifiés, pour lesquels on analysera avec soin les idées essentielles des méthodes utilisées.

226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

L'intitulé de la leçon permet de se placer dans des contextes variés : $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^n$, voire certains espaces de Banach fonctionnels.
En ce qui concerne le cadre réel, on pourra présenter des exemples d'études asymptotiques (si possible autres que $u_{n+1} = \sin u_n$), étudier l'itération d'une fonction suffisamment régulière au voisinage d'un point fixe, ou encore présenter des exemples de méthodes de résolution approchée d'équations. En ce qui concerne l'étude asymptotique des suites récurrentes, le jury souligne le fait que la mise en œuvre d'une analogie discret-continu permet souvent de faire surgir naturellement la suite auxiliaire adaptée, plutôt que de la parachuter.
En se plaçant dans $\mathbf{R}^n$, on peut aborder par exemple l'étude des suites vérifiant une relation de récurrence d'ordre $\geqslant 2$, la convergence en loi de chaînes de Markov à espace d'états fini, ou encore l'extension à ce cadre de la méthode de Newton ou plus généralement les méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires.
Dans le cadre banachique enfin, les applications de la méthodes des approximations successives ne manquent pas, qu'il s'agisse de la construction de solutions d'équations différentielles, intégrales, ou fonctionnelles.

228 : Continuité, dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Au delà des théorèmes de base, le programme offre de nombreuses pistes aux candidats pour élaborer leur plan : utilisations de la continuité uniforme, fonctions convexes et leur régularité, approximation par des fonctions régulières, utilisations des formules de Taylor, liens entre caractère C^∞ et analycité, etc.
Des exemples explicites de fonctions continues et nulle part dérivables, de fonctions continues et croissantes à dérivée nulle presque partout, de fonctions C^∞ à dérivées en un point prescrites, etc. sont les bienvenus dans cette leçon.
Les candidats solides pourront s'intéresser à la dérivabilité des fonctions monotones ou lipschitziennes ou à celle de l'intégrale indéfinie d'une fonction intégrable, proposer diverses applications du théorème de Baire (continuité d'une limite simple de fonctions continues, points de continuité d'une dérivée, généricité des fonctions nulle part dérivables parmi les fonctions continues ou des fonctions nulle part

analytiques parmi les fonctions C^∞, etc.)

229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

L'existence de limite à droite et à gauche pour les fonctions monotones ainsi que la régularité des fonctions convexes doivent bien sûr être abordées. La convexité est évidemment également une source inépuisable d'inégalités, dans divers domaines y compris les probabilités.
Si la monotonie concerne les fonctions réelles d'une seule variable réelle, la convexité concerne également les fonctions définies sur une partie convexe de $\mathbf{R}^n$. La recherche de leurs extrema constitue un riche thème d'étude.
Une autre piste est l'étude et l'utilisation des fonctions de répartition en probabilités.
Les candidats solides pourront s'intéresser à la dérivabilité des fonctions monotones, ou à la continuité, voire la différentiabilité, des fonctions convexes définies sur un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$.

230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Dans cette leçon, il faut se garder de proposer un interminable catalogue de propriétés et de « règles » illustrées de quelques rares exemples triviaux (Riemann, Bertrand). Mieux vaut se limiter à quelques résultats fondamentaux bien choisis et mis en perspective, et accompagnés de quelques exemples significatifs.
Plutôt que de se limiter à la seule étude de la convergence de séries, les candidats pourront par exemple s'intéresser à l'estimation de sommes partielles (pour laquelle la comparaison entre somme et intégrale, en présence ou non de monotonie, est un outil particulièrement efficace), à l'étude asymptotique de suites récurrentes (si possible autres que $u_{n+1} = \sin u_n$), ou encore à l'itération d'une fonction régulière au voisinage d'un point fixe.
L'utilisation de séries entières ou de séries de Fourier pour calculer la somme de certaines séries, le calcul de l'espérance d'une variable aléatoire discrète fournissent également de riches thèmes d'étude.
Les candidats solides pourront s'intéresser aux procédés de sommation des séries divergentes (qui interviennent naturellement dans la théorie des séries de Fourier, entre autres) ainsi qu'aux théorèmes taubériens qui s'y rapportent.

234 : Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.

Cette leçon est orientée vers l'étude et l'utilisation de l'espace L^1 (voire L^p) associé à la mesure de Lebesgue (supposée construite), voire d'autres mesures.
Les grands théorèmes de la théorie (permutation limite-intégrale, Fubini, etc.) sont évidemment incontournables, mais il faut éviter de s'en tenir à une liste désincarnée d'énoncés en proposant des exemples d'application significatifs.
Le thème de l'approximation (approximation des fonctions intégrables sur $\mathbf{R}$ par des fonctions continues à support compact, utilisation de la convolution) fournit de nombreuses applications, ainsi que celui de l'analyse de Fourier sur le cercle ou la droite réelle.
Les candidats solides pourront s'intéresser à la transformée de Fourier dans $L^2(\mathbf{R})$, la dualité dans L^p ($1 \leqslant p < \infty$), les liens entre intégration et dérivation, les procédés de sommation presque partout des séries de Fourier, l'algèbre de convolution $L^1(\mathbf{R})$, l'étude des parties compactes de L^p.

235 : Problèmes d'interversion en analyse.

L'intitulé de cette leçon a été volontairement élargi afin de permettre explicitement aux candidats d'aborder des problèmes plus diversifiés de permutations de symboles, qu'il s'agisse de limites, d'inté-

grales, de dérivées, d'espérances. Le choix est large !
Les candidats pourront également inclure dans leur leçon des exemples de permutations de quantificateurs, obtenus par des arguments de compacité ou (pour les candidats aguerris) utilisant le théorème de Baire.
Dans tous les cas, on évitera de présenter un catalogue désincarné d'énoncés, en privilégiant les exemples et applications significatifs.

236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Les exemples proposés par les candidats pourront cette leçon devront mettre en œuvre des techniques diversifiées : méthodes élémentaires, intégrales dépendant d'un paramêtre, utilisation de la formule des résidus, de sommes de Riemann, voire de la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbf{R})$ ou $L^2(\mathbf{R})$.
Il est attendu des candidats qu'ils proposent quelques exemples significatifs de calculs d'intégrales multiples (utilisation du théorème de Fubini, de changements de variables, de la formule de Green-Riemann, etc.).
Pour éviter de donner à la leçon un tour trop « académique », les candidats pourront également proposer des résultats dont la preuve *utilise* un calcul d'intégrale, comme par exemple (purement indicatif) celle du théorème d'inversion de Fourier utilisant la transformée de Fourier d'une gaussienne.
Il est enfin loisible de proposer quelques méthodes de calcul approché d'intégrales. La théorie des probabilités fournit également un champ d'applications fertile.

239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Le programme fournit aux candidats de multiples pistes pour élaborer leur plan : théorèmes usuels bien sûr (incluant celui d'holomorphie sous le signe somme) et qui devront absolument être illustrés par des exemples significatifs, transformée de Fourier, convolution.
Les candidats pourront également s'intéresser à la transformée de Laplace ou à certaines fonctions « spéciales » définies par une intégrale, ou proposer des études asymptotiques de fonctions définies par des intégrales.
Enfin, la notion de fonction caractéristique en probabilités a toute sa place dans cette leçon et fournit un riche champ d'applications.
Les candidats aguerris pourront s'intéresser aux théorèmes taubériens relatifs à la transformée de Fourier ou de Laplace.

241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

L'étude des différentes modes de convergence et leur utilisation ne doit pas donner lieu à un catalogue formel de théorèmes, mais être illustrée par des exemples significatifs et diversifiés.
Les fonctions « spéciales » définies par une série sont légion et fournissent aux candidats de multiples possibilités, sans éluder le champ complexe qui leur confère souvent leur pleine signification. Des exemples de sommes de séries continues nulle part dérivables, ou croissantes non constantes et à dérivée nulle presque partout pourront également être proposés.
Les candidats peuvent bien sûr aborder les séries entières (qui ont des applications combinatoires pouvant donner lieu à des études asymptotiques intéressantes), les fonctions génératrices des variables aléatoires à valeurs entières ou les séries de Fourier. Ils préféreront dans ce cas en présenter quelques applications significatives plutôt qu'un cours formel.
Les candidats solides pourront aborder l'étude des séries de variables aléatoires indépendantes, la for-

mule sommatoire de Poisson et ses applications aux fonctions spéciales (fonction θ de Jacobi, etc.), la théorie des séries de Dirichlet et ses utilisations en théorie des nombres.

243 : Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il faut se garder de présenter un interminable catalogue de définitions, règles et propriétés accompagnées de quelques rares exemples triviaux.
Le problème du domaine de convergence devra bien sûr être abordé, ainsi que celui des différents modes de convergence.
Les liens avec l'holomorphie doivent être connus et compris. En particulier, peu de candidats ont les idées claires sur les liens entre analycité et holomorphie. Or, l'existence de nombreux développements en série entière peut être établie de manière immédiate par cet argument, avec en prime une information sur le rayon de convergence, voire sur l'ordre de grandeur des coefficients.
Le théorème radial (ou non tangentiel) d'Abel est souvent proposé comme développement, mais de nombreux candidats pensent qu'il s'agit d'un théorème de prolongement, alors qu'il s'agit en réalité d'un résultat de continuité. En proposer comme application le calcul de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ n'est pas absolument pertinent, ce résultat pouvant être obtenu par un argument beaucoup plus direct. En réalité, ce théorème débouche naturellement sur la question plus générale des procédés de sommation des séries divergentes.
Les séries entières ont également des applications combinatoires pouvant donner lieu à des études asymptotiques très intéressantes. Les fonctions génératrices des variables aléatoires à valeurs entières ont également toute leur place dans cette leçon.
Les candidats solides pourront s'intéresser aux théorèmes taubériens relatifs aux séries entières, au problème du prolongement analytique de la somme d'une série entière, aux séries entières aléatoires ou encore aux fonctions C^∞ nulle part analytiques.

245 : Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.

L'intitulé de cette leçon permet de l'aborder sous l'angle moins intimidant des séries entières, pour lesquelles on renvoie à la leçon 243.
Au niveau de l'agrégation toutefois, on est en droit d'attendre des candidats une compréhension des résultats les plus fondamentaux de la théorie des fonctions holomorphes, ainsi qu'une autonomie raisonnable dans leur mise en œuvre. Ce thème devra donc être abordé, et il peut l'être à différents niveaux, les candidats les plus aguerris pouvant aborder par exemple les théorèmes de Rouché ou de Hurwitz, le problème de la représentation conforme, l'équation fonctionnelle de la fonction ζ et ses conséquences, le théorème de Paley-Wiener, etc.

246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

Dans cette leçon, la théorie L^2 est incontournable, et son interpétation en terme d'isométrie doit être mise en évidence. Les candidats doivent pouvoir écrire l'identité de Parseval pour exprimer le produit scalaire de deux fonctions de $L^2(\mathbf{T})$.
En ce qui concerne la convergence simple, ou uniforme ou en norme L^p au sens de Cesàro, les propriétés cruciales des noyaux utilisés devront être clairement explicitées.
Un autre thème important est le lien entre régularité de la fonction et vitesse de convergence vers 0 de ses coefficients de Fourier.
Il est important d'illustrer cette leçon de quelques unes des innombrables applications des séries de Fourier : calculs de sommes de séries, équations aux dérivées partielles (équation de la chaleur, problème de Dirichlet sur le disque unité, etc.), inégalité de Bernstein, formule sommatoire de Poisson et

ses applications, inégalité isopérimétrique, etc.
Les candidats solides pourront s'intéresser à la divergence des séries de Fourier dans divers contextes, soit en exhibant des contre-exemples, soit en utilisant la théorie de Baire. Mais aussi aux procédés de sommation presque partout des séries de Fourier, aux séries de Fourier lacunaires, à l'algèbre de Wiener des séries de Fourier absolument convergentes, la convergence de la série de Fourier d'une fonction α-höldérienne si $\alpha > \frac{1}{2}$, etc.

250 : Transformation de Fourier. Applications.

Cette leçon est consacrée à l'analyse de Fourier sur la droite réelle. Au niveau de l'agrégation, elle peut être abordée dans trois cadres : L^1, classe de Schwartz des fonction C^∞ à décroissance rapide, ou L^2. Les deux derniers points de vue sont les plus satisfaisants du point de vue de la symétrie obtenue, le dernier étant le plus délicat. Cette leçon exige donc une préparation soigneuse.
Les candidats ne manqueront pas d'illustrer leur leçon par quelques applications significatives : formule sommatoire de Poisson et ses applications, résolution d'équations aux dérivées partielles, etc. Bien entendu, les fonctions caractéristiques et leurs applications en probabilités ont toute leur place dans cette leçon.
Le fait que les polynômes constituent une base hilbertienne de l'espace des fonctions de carré intégrable relativement à certains poids est présenté quasi systématiquement en développement. Peut-être faudrait-il songer à trouver d'autres sources d'inspiration, d'autant que la preuve n'est pas toujours parfaitement comprise, et que de nombreux candidats sont incapables d'en déduire une base hilbertienne de $L^2(\mathbf{R})$.
De nombreux candidats proposent comme développement le théorème d'échantillonage de Shannon, ce qui est pertinent, à condition d'avoir bien compris qu'il traduit une isométrie entre deux espaces de Hilbert.
Les candidats solides pourront s'intéresser aux vecteurs propres de la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbf{R})$, à la non-dérivabilité de la fonction de Weierstrass dans le cas le plus général, à l'algèbre de convolution $L^1(\mathbf{R})$, au théorème de Paley-Wiener qui caractérise les fonctions de $L^2(\mathbf{R})$ dont la transformée de Fourier est à support compact, aux principes d'incertitude, etc.

253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

La convexité intervient dans plusieurs parties du programme, offrant ainsi aux candidats plusieurs pistes très riches pour élaborer leur leçon : convexité dans les espaces vectoriels réels, fonctions convexes (d'une ou plusieurs variables réelles), caractérisation parmi les fonctions C^1 ou C^2 sur un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$, projection sur un convexe fermé d'un espace de Hilbert, méthodes d'optimisation en dimension finie. Les applications de ces thèmes sont innombrables : inégalités classiques, optimisation, critère de densité d'un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert, etc.
Les candidats solides pourront s'intéresser à la continuité, voire à la différentiabilité d'une fonction convexe définie sur un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$, aux points extrémaux d'une partie convexe d'un espace vectoriel réel de dimension finie, à la minimisation de fonctionnelles convexes et coercives sur un espace de Hilbert, aux applications du théorème de Hahn-Banach, à la notion d'uniforme convexité et son application à l'existence d'un vecteur normant pour une forme linéaire continue.

261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

Cette leçon concerne bien entendu les diverses lois du programme, leurs interactions et leurs propriétés de stabilité, et appelle donc des illustrations concrètes. Le théorème de transfert, qui calcule $\mathbf{E}(f(X))$ à l'aide de la loi de X, les vecteurs aléatoires à coordonnées indépendantes, ainsi que la caractérisation

de la loi par la fonction génératrice ou caractéristique, sont au cœur de cette leçon. Les candidats pourront également aborder la convergence en loi en l'illustrant d'exemples variés.
Les candidats aguerris pourront aborder le problème de la caractérisation de la loi par les moments, les vecteurs gaussiens, le théorème central limite dans $\mathbf{R}^d$, les chaînes de Markov, les processus de Poisson.

262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

Les liens entre les différents modes de convergence d'une suite de variables aléatoires devront être illustrés par des exemples et contre-exemples variés. Les théorèmes de convergence du programme (lois des grands nombres, théorème central limite) sont bien sûr au cœur de cette leçon, et la preuve de la loi forte des grands nombres, éventuellement sous des hypothèses de confort, pourra être présentée.

Les candidats aguerris pourront aborder la convergence des séries de variables aléatoires indépendantes, les marches aléatoires, la loi du logarithme itéré, le théorème central limite dans $\mathbf{R}^d$, les chaînes de Markov, les lois stables ou infiniment divisibles.

264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Les techniques spécifiques aux variables discrètes, notamment à valeurs entières (caractérisation de la convergence en loi, notion de fonction génératrice) devront être mises en évidence et illustrées par des exemples variés. La marche aléatoire symétrique sur $\mathbf{Z}$ ou le processus de Galton-Watson fournissent des exemples à la fois élémentaires et riches.
Les candidats aguerris pourront aborder la loi du logarithme itéré (par exemple dans le cas de la marche aléatoire symétrique), les chaînes de Markov, les processus de Poisson.

265 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

Si les fonctions usuelles élémentaires (logarithme, exponentielles, fonctions trigonométriques, etc) font partie de la leçon et doivent être maîtrisées par les candidats, le jury attend un panel d'exemples plus ambitieux. Il ne s'agit bien sûr pas d'être exhaustif, et l'on se gardera de présenter une leçon catalogue. Il s'agit plutôt de proposer un choix pertinent de fonctions spéciales rencontrées dans divers domaines des mathématiques (fonction Γ en analyse complexe, densités de lois variées en probabilités, fonctions ζ, η ou séries L en théorie des nombres, etc.) avec des applications significatives. On peut très bien organiser l'exposé en fonction des techniques mathématiques utilisées, ou selon les applications envisagées.
Pour les candidats solides, la résolution d'équations aux dérivées partielles, la théorie analytique des nombres, les propriétés de stabilité de certaines lois en probabilités, les applications diverses des polynômes orthogonaux, etc., sont des sources d'inspiration possibles pour cette leçon.

266 : Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.

L'indépendance est centrale en probabilités et démarque cette théorie de celle de l'intégration. À partir de la notion élémentaire de probabilité conditionnelle, on pourra introduire l'indépendance de deux événements, l'indépendance mutuelle d'une suite d'événements, voire celle d'une suite de tribus, puis l'indépendance de familles de variables aléatoires. Le programme fournit plusieurs utilisations élémentaires de l'indépendance : lien avec l'espérance, la variance et la covariance, loi faible des grands nombres, lemmes de Borel-Cantelli, stabilité de certaines lois (normale, Cauchy). Pour aller plus loin, on pourra aborder la loi forte des grands nombres ou le théorème central limite, ou l'étude de la marche aléatoire symétrique sur $\mathbf{Z}$.
Les candidats aguerris pourront aborder la loi du 0-1 de Kolmogorov, la convergence des séries de variables aléatoires indépendantes, la loi du logarithme itéré, les vecteurs gaussiens.

267 : Exemples d'utilisations de courbes en dimension 2 ou supérieure.

Cette leçon de synthèse a pour objectif de mettre en évidence la variété et la richesse des interventions et des utilisations des courbes en mathématiques.
Le programme fournit au candidat de multiples angles d'attaque pour aborder cette leçon : géométrie (arcs paramétrés, études métriques, etc.), topologie (connexité par arcs), calcul différentiel (lien entre les différentes définitions d'une courbe, courbes définies comme intersection de deux surfaces, espace tangent), équations différentielles (tracé de trajectoires d'un système différentiel autonome plan), analyse complexe (intégrale curviligne, indice, théorème des résidus, etc.)
Les candidats solides pourront s'intéresser à l'homotopie, à la simple connexité, au théorème de Jordan, aux problèmes isopérimétriques, à la méthode du col en analyse asymptotique, à des exemples de courbes de Peano ou fractales.

Chapitre 2

Épreuves orales de modélisation

2.1 Présentation des épreuves de Modélisation

Lors de l'inscription au concours, trois options sont proposées :
A. Probabilités et Statistiques,
B. Calcul scientifique,
C. Algèbre et Calcul formel.

L'épreuve de modélisation est composée d'une première période de préparation de quatre heures et d'une seconde période d'interrogation d'une heure environ, elle-même subdivisée en un exposé de 35 minutes et d'un échange avec le jury de 25 minutes. Ces modalités s'appliqueront encore pour la session 2023. Les candidats commencent par tirer au sort un couple de textes. Le candidat a accès aux deux textes durant sa préparation et il est libre de choisir celui qu'il souhaite étudier et présenter durant la période d'interrogation.

Cette épreuve permet aux candidats de mettre en avant diverses qualités : les connaissances mathématiques, leur mise en perspective, l'aptitude à les appliquer à des problèmes concrets de modélisation, la réflexion, la pertinence des illustrations informatiques, les qualités pédagogiques de mise en forme d'un exposé construit et cohérent, la capacité à faire preuve d'initiative pour s'exprimer et manifester des qualités pédagogiques et de synthèse. L'aptitude des candidats à répondre aux questions fait partie intégrante de l'évaluation de cette épreuve. Comme pour l'ensemble des oraux, les exposés dynamiques et vivants sont particulièrement appréciés.

2.1.1 Textes

L'épreuve de modélisation repose sur l'exploitation d'un texte d'environ 5 à 6 pages que les candidats choisissent parmi les deux qui leur sont proposés lors du tirage et qu'ils pourront consulter en ligne dans la salle de préparation.

Le texte fourni est la base pour construire et exposer un traitement mathématique d'un problème « concret » en s'appuyant sur les éléments, généralement partiels, disséminés dans le texte. Les candidats doivent utiliser leurs connaissances mathématiques pour justifier les points de leur choix parmi ceux évoqués dans le texte, proposer un retour sur la problématique étudiée ainsi qu'une conclusion. Les textes peuvent présenter des arguments rapides, voire heuristiques, qui sont dans ce cas signalés comme tels, mais ils ne contiennent pas d'assertion délibérément trompeuse et se concluent par une liste de suggestions. Les principaux attendus de l'épreuve sont rappelés dans un bandeau surmontant chaque texte.

Même si la plupart des textes s'appuient sur des problématiques issues de sciences autres que les mathématiques, aucune connaissance dans ces domaines n'est exigée par le jury. Discuter la modélisation proposée par un texte consiste donc avant tout à dégager les comportements qualitatifs du modèle, la manière dont il dépend d'éventuels paramètres et s'il semble apte à rendre compte des phénomènes qu'il est censé représenter. Toutefois, le jury s'attend à ce que les candidats ne se contentent pas d'un exposé intégralement qualitatif et démontrent certains résultats évoqués dans le texte ; il apprécie particulièrement, sans toutefois l'exiger, qu'un candidat montre sa compréhension du modèle en exhibant par exemple les conséquences d'une variation de paramètres ou de données, notamment dans l'illustration informatique. *A contrario*, des interprétations qualitatives du comportement des modèles sont trop souvent absentes des exposés. Pourtant, montrer que l'on comprend un modèle ne se réduit pas à prouver un théorème, et nécessite d'exposer des expérimentations informatiques à fin d'illustration.

Chaque année, des textes sont rendus publics et sont disponibles sur le site de l'agrégation de mathématiques https://agreg.org. Ces textes sont représentatifs de l'épreuve et permettent aux candidats de se familiariser avec le format des textes, de se faire une idée des attentes du jury et de réfléchir à des illustrations numériques pertinentes dans le cadre du texte.

2.1.2 Période de préparation

Durant les quatre heures de préparation, les candidats ont accès à une bibliothèque numérique et disposent d'un ordinateur dont la configuration est décrite sur le site de l'agrégation de mathématiques, à l'adresse https://agreg.org. Les candidats retrouveront le même environnement sur l'ordinateur de la salle d'interrogation. Il n'est évidemment pas réaliste de découvrir les logiciels à disposition des candidats le jour de l'épreuve : la configuration informatique utilisée pour le concours et sa documentation sont accessibles et téléchargeables depuis le site https://agreg.org et permettent de se familiariser avec l'environnement offert lors de l'épreuve. Durant la période de préparation, les candidats ont à disposition une bibliothèque numérique dont la liste est disponible en fin de ce rapport ; ils peuvent également utiliser leurs propres ouvrages, dans les mêmes conditions que pour les épreuves de leçons.

Les candidats sont priés de ne pas écrire sur le texte imprimé qui leur est distribué car il est destiné à être utilisé à nouveau pendant la session.

Il est recommandé aux candidats de consacrer une partie de leur temps de préparation à s'interroger sur le discours qu'ils tiendront, sur l'exploitation du tableau, sur l'utilisation de l'outil informatique et sur le temps qu'ils vont consacrer à chacune des parties de leur plan, ce qui leur permettra de mettre au mieux en valeur leurs connaissances et leur compréhension du texte ou d'une partie de celui-ci. Proposer un exposé structuré et cohérent ne peut s'improviser au moment de l'oral et doit faire l'objet d'une réflexion préalable durant la préparation. Il est également conseillé aux candidats de consacrer quelques minutes à la fin de leur préparation à une prise de recul sur leur plan. Ce dernier est un élément important pour le jury, qui pourra, en s'y référant, aider les candidats dans leur gestion du temps de l'exposé, notamment en leur rappelant, si ce n'est fait avant les dernières minutes, que l'illustration informatique doit être présentée au cours de la présentation et non pendant le temps d'échange.

2.1.3 Période d'interrogation

Au début de l'interrogation, le jury rappelle les modalités de l'épreuve, puis invite les candidats à vérifier que les fichiers qu'ils ont créés lors de la préparation ont bien été transférés sur la machine servant pour l'épreuve (dont l'environnement est identique à celui de la salle de préparation). La période d'interrogation dure une heure et est scindée en deux temps : un exposé de 35 minutes maximum suivi d'échanges avec le jury jusqu'à la fin de l'heure impartie.

Exposé. Les candidats ont la recommandation de commencer par donner la structure de leur présentation sous forme d'un plan et le déroulement de l'exposé doit être en cohérence avec cette structure.

Grâce à ce plan, le jury pourra ainsi avoir une vision globale de l'exposé et aider, si besoin, les candidats à gérer leur temps. Comme les candidats se le voient rappeler en début d'épreuve, l'exposé doit être accessible à un public qui découvre les problématiques du texte et doit permettre d'en faire comprendre les enjeux à un public qui ne le connaîtrait pas. Ainsi, le jury n'est pas censé connaître le texte présenté par le candidat, mais chaque membre dispose néanmoins d'un exemplaire papier, afin que les candidats puissent y faire référence pour éviter de recopier les notations, les énoncés complets ou certaines formules. Le jury, tout en étant conscient des difficultés du concours, attend un minimum d'aisance au tableau, la manifestation d'une certaine volonté de capter l'attention de l'auditoire et un discours clair et précis.

Durant l'exposé, les candidats disposent de leurs notes, d'un tableau et d'un ordinateur. Ils peuvent alterner, quand bon leur semble, entre un exposé oral, quelques éléments rédigés au tableau de façon propre et lisible et la présentation de ce qui a été préparé à l'aide de l'outil informatique. Les candidats doivent gérer correctement le tableau et demander, si besoin, au jury les parties qu'ils peuvent effacer, ce dernier pouvant souhaiter conserver certains passages et y revenir lors des échanges avec les candidats. Même si les programmes informatiques ne fonctionnent pas comme ils l'auraient souhaité ou si les simulations numériques n'ont pas abouti, les candidats sont invités à expliquer ce qu'ils voulaient mettre en œuvre, illustrer ou programmer. Si, lors de la phase d'exposé, les candidats n'ont pas du tout utilisé l'ordinateur dix minutes avant la fin du temps qui leur est imparti, le jury les en alertera.

Comme dans tout oral, la construction de l'exposé doit être une préoccupation importante des candidats : l'exposé doit s'appuyer sur un dosage cohérent et harmonieux entre introduction motivée de modèles, preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, réponses aux questions, mise en lumière des connaissances. Une réflexion s'impose afin de produire un tout cohérent et intelligible par un public qui, dans l'esprit de l'épreuve, découvre le texte à travers l'exposé des candidats.

Les candidats sont libres de la gestion de leur exposé : il n'y a pas de « format type » pour cette épreuve. Sur un même texte, des formats très différents de prestation ont été valorisés : certains s'éloignant du découpage opéré par le texte et arrangeant les éléments autrement ; d'autres présentant un survol du problème, de la méthode et des résultats obtenus avant de détailler des aspects plus mathématiques ; d'autres au contraire suivant de près la progression du texte mais en y apportant les éclairages et les illustrations nécessaires. De bons exposés ont parfois choisi d'aller loin dans le texte pour en décrire la dynamique globale et l'aboutissement (quitte à ne pas traiter toutes les démonstrations) ; d'autres exposés, tout aussi bons, ont traité un passage plus limité du texte mais de manière détaillée et en fournissant tous les arguments pertinents.

Le jury est sensible à l'honnêteté du discours. Tenter de faire semblant de connaître une notion ou d'avoir compris un passage du texte est pénalisé. Un regard critique (« il faudrait prouver que... mais je n'ai pas réussi à le faire », « les hypothèses du théorème de XXX que je connais pour aborder des problèmes similaires ne sont pas satisfaites dans le cas présent »...) est une attitude bien plus payante.

Échanges avec le jury. Durant 25 minutes, le jury revient sur certains propos des candidats qui méritent précision. Il peut demander un énoncé précis d'un théorème utilisé pour démontrer une assertion ou des éléments de démonstration d'un résultat énoncé par les candidats. Les échanges peuvent également porter sur la modélisation ou les illustrations informatiques.

2.2 Recommandations du jury communes aux trois options

2.2.1 Organisation de l'exposé

L'exercice de l'exposé en temps limité nécessite un certain entraînement. Il est malheureusement fréquent de voir des exposés un peu trop lents pendant les 20 à 25 premières minutes qui accélèrent brutalement dans les 10 dernières minutes et que les candidats peinent à conclure dans le temps imparti.

La rigueur et la clarté de l'organisation, la gestion du temps, la pertinence des choix opérés parmi les différentes questions soulevées par le texte sont des éléments de l'évaluation. Les qualités de synthèse sont aussi appelées à s'exprimer : il vaut mieux indiquer les étapes cruciales d'un raisonnement que de se lancer dans un long calcul fastidieux qu'on aura du mal à mener à bien et à mettre en valeur.

Par ailleurs, si le jury sanctionne un exposé significativement trop bref, la démarche consistant à « jouer la montre » est encore plus sévèrement pénalisée. Utiliser une portion excessive du temps de parole pour recycler un chapitre de cours ou un développement d'une leçon d'Analyse et Probabilités ou d'Algèbre et Géométrie, en s'éloignant des enjeux du texte, est considéré comme un hors sujet et est sévèrement sanctionné. Enfin, l'aspect pédagogique de l'exposé, même si le texte n'est restitué que partiellement mènera à une note bien plus élevée qu'un catalogue de type paraphrase.

Une brève introduction à la problématique avant de s'engager dans une longue digression sans lien avec le problème de départ ne peut conduire à une prestation jugée comme satisfaisante et sera sanctionnée par le jury. De même, un exposé se réduisant à la présentation de la problématique du texte et à des illustrations informatiques, ou à l'énumération linéaire des suggestions proposées par le texte, sans contribution des candidats, ne peut conduire au mieux qu'à un résultat médiocre. Plutôt qu'un survol superficiel de l'intégralité du texte sans apport mathématique ou critique scientifique, les candidats doivent préférer traiter le texte de façon partielle mais substantielle et en profondeur, ce qui peut aboutir à une bonne note.

2.2.2 Contenu de l'exposé

Le jury rappelle que, même s'il s'agit d'une épreuve plus appliquée ou moins académique que les deux autres épreuves orales, cela ne dispense en aucun cas les candidats de faire preuve de la rigueur mathématique requise : quand on utilise un théorème, il faut impérativement être capable d'en restituer un jeu d'hypothèses. Par jeu d'hypothèses correct, on entend que le théorème soit vrai et qu'il s'applique effectivement au contexte considéré. Le jury n'attend pas nécessairement un énoncé avec les hypothèses les plus générales possibles.

Le jury regrette de ne pas voir davantage de dessins (soignés) ou schémas explicatifs qui peuvent rendre l'argumentation plus claire et convaincante. La capacité à revenir sur le problème de départ et à conclure quant à l'efficacité de l'approche mathématique proposée pour y répondre est une qualité très appréciée.

Pour enrichir leur propos, les candidats sont invités à mobiliser leurs connaissances sur des aspects variés du programme, en étayant les arguments seulement esquissés dans le texte par des énoncés précis. Il est totalement illusoire de chercher à impressionner le jury par une logorrhée de mots savants : les textes proposés peuvent être discutés en exploitant un bagage technique qui n'utilise pas les éléments les plus sophistiqués du programme. En particulier, le jury ne manque pas de s'attarder sur toute notion amenée par les candidats durant leur présentation et il est toujours dommageable de s'aventurer sur des terrains méconnus. Bien plus qu'une démonstration de virtuosité technique, le jury attend que les candidats montrent leur maîtrise d'énoncés relativement simples « en situation » : c'est là que réside une des difficultés principales de l'épreuve. Nombre de candidats peinent à formaliser précisément des notions de base du programme ou à mettre en œuvre certaines de leurs connaissances.

2.2.3 Illustration informatique

Le jury rappelle son fort attachement à cet aspect de l'épreuve, dont les ambitions sont clairement délimitées. Il ne s'agit en aucun cas, et pour aucune des trois options, d'un exercice de programmation.

L'objectif est d'être capable d'utiliser l'outil informatique pour illustrer, de façon pertinente, le contenu du texte.

La réalisation de cet objectif constitue une part incompressible de la note finale attribuée à l'épreuve. Une très bonne évaluation peut résulter d'une exploitation judicieuse de programmes simples, reposant largement sur les routines standards des logiciels fournis. La forme et la nature des illustrations proposées n'obéissent à aucun format préétabli. En revanche, elles doivent faire la preuve d'une véritable réflexion scientifique et être agrémentées de commentaires, sur les résultats et les méthodes. En particulier, le choix des jeux de paramètres d'entrée pour leurs codes doit être pertinent. Les illustrations informatiques devraient plus souvent permettre de faire un retour sur la problématique du texte et il convient de commenter les résultats obtenus dans le cadre du modèle proposé par le texte. Des illustrations peuvent mettre en valeur les limites du modèle étudié et le jury apprécie particulièrement que les candidats aient un regard critique sur le texte et ne prennent pas celui-ci pour vérité absolue.

Si un bel effort est produit par la majorité des candidats, un nombre très limité d'entre eux rechignent encore à toucher à l'outil informatique. Cette stratégie, dont on pourrait naïvement penser qu'elle permet de consacrer plus de temps à l'analyse du texte et à la préparation de l'exposé oral, est fortement sanctionnée.

Il est important de se rappeler qu'il s'agit d'une illustration. Les candidats peuvent choisir de présenter leur code, s'ils le souhaitent, mais ils doivent réfléchir à en extraire les points clés ; une présentation exhaustive et linéaire est préjudiciable à l'exposé, car elle risque d'empiéter sur le temps à consacrer à la restitution du texte. Cependant, le jury peut demander des précisions sur un point du code. Dans le cas d'une représentation graphique, il est important de préciser, au moins oralement, ce qui est représenté en abscisses et ordonnées.

Pour finir, le jury est tout à fait conscient de la difficulté de l'utilisation de l'outil informatique en temps limité et en situation de stress. Il reste bienveillant face aux candidats dont les illustrations informatiques n'ont pas abouti au résultat souhaité. Dans une telle situation les candidats sont encouragés à expliquer ce qu'ils ont fait et quel type de résultats ils espéraient obtenir. Le jury sait prendre en compte dans sa notation la démarche suivie lorsqu'elle est clairement argumentée et permettrait, avec des aménagements mineurs, de mettre en évidence des aspects intéressants du texte.

2.3 Option A : Probabilités et Statistiques

2.3.1 Généralités

Les textes proposés à l'option A abordent indifféremment des thèmes provenant des probabilités ou des statistiques, ils peuvent même aborder les deux avec une pondération plus ou moins grande selon les textes. Une préparation homogène sur l'ensemble du programme de l'option A est donc attendue.

Le jury a encore noté en option A un niveau global toujours en progrès depuis 2019 : les candidates ou candidats maîtrisent mieux les notions essentielles, et l'outil informatique est en général plus pertinent. Les rapports des sessions précédentes ont visiblement été bien lus et les attentes de l'épreuves semblent mieux comprises. Le professionnalisme moyen est croissant et certaines prestations ont été exceptionnelles.

Il faut garder en tête que toute étude mathématique d'une situation réelle passe par une étape de modélisation, laquelle implique des choix d'outils mathématiques adaptés à l'étude. Il est ainsi apprécié de justifier la pertinence de l'introduction d'une chaîne de Markov dans un modèle. Il en va de même pour le choix d'une loi géométrique (premier succès), exponentielle (absence de mémoire), normale (accumulation d'erreurs indépendantes) ou de Poisson (événements rares), etc. pour modéliser certaines variables aléatoires.

Naturellement, le candidat peut mener une réflexion critique sur les choix du modèle (par exemple : des hypothèses d'indépendance pour certaines lois) tant qu'elle n'est pas gratuite et qu'elle reste argumentée.

2.3.2 Recommandations spécifiques

Le jury signale ici quelques points du programme sur lesquels des progrès ont été notables sur la session 2022, ou a contrario, pour lesquels des problèmes récurrents apparaissent. Des suggestions d'illustrations informatiques de ces notions figurent dans la section suivante.

— **La loi des grands nombres et le théorème central limite** (attention à la confusion variance/écart-type) sont des résultats essentiels qui, comme on l'a dit, semblent mieux maîtrisés (hypothèses et modes de convergence).

— **Convergences de suites de variables aléatoires.** Le jury rappelle qu'il en existe différents modes (presque-sûre, dans L^p, en probabilité, en loi). Leurs définitions, caractérisations et liens sont des questions fréquemment soulevées : elles posent toujours quelques problèmes.

— **Intervalles de confiance.** La maîtrise de cette notion essentielle (savoir estimer un paramètre du modèle) est très hétérogène : certains sont capables de donner l'intervalle immédiatement, tout en maîtrisant chaque étape sa de construction. Pour d'autres, la notion même d'intervalle de confiance reste floue et la démarche qui y mène est de plus en plus confondue avec la pratique d'un test statistique. Le lemme de Slutsky, qui peut mener à des intervalles asymptotiques, est en général connu.
Signalons encore qu'un intervalle de confiance ne relève pas systématiquement du théorème central limite, certains intervalles peuvent être exacts : dans le contexte gaussien par exemple, où avec l'utilisation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff si la variance de l'estimateur est connue ou majorée.

— Plus largement, les définitions sur les **estimateurs** (convergence, biais, risque quadratique, etc.) doivent être connues et utilisées pour savoir hiérarchiser des estimateurs d'un même paramètre.

— **Chaînes de Markov.** Depuis 2021, le programme inclus les propriétés de Markov faible ou forte. La propriété faible est assez connue, mais il est difficile d'obtenir un énoncé correct de la forte. En revanche, les définitions et résultats associées aux chaînes de Markov : états récurrents, irréductibilité, apériodicité, théorèmes limites (ergodique, sur l'eventuelle probabilité invariante), etc. semblent mieux connus pour cette session 2022.

— **Vecteurs gaussiens.** On observe toujours des lacunes étonnantes sur les vecteurs gaussiens, surtout dans le cas d'une dimension $\geqslant 2$. Le théorème central limite vectoriel pose donc des problèmes dès son énoncé. La définition de la matrice de covariance d'un vecteur gaussien doit être connue ainsi que la loi d'un vecteur gaussien par une transformation affine $X \mapsto AX + B$. Au contraire, le théorème de Cochran, très utile pour donner la loi de certaines statistiques, semble mieux connu sur la session 2022.

— **Processus de Poisson.** Le jury a observé une amélioration sensible des connaissances sur cette partie du programme, autrefois très méconnue : les propriétés de ce processus, l'allure typique de ses trajectoires, une idée de sa construction à partir de variables exponentielles sont à connaître.

— **Tests statistiques.** C'est certainement l'un des points les plus problématiques du programme pour beaucoup, alors que deux tests y figurent explicitement (χ^2 et Kolmogorov-Smirnov). Les candidats doivent en connaître le principe, le contexte où ils peuvent être appliqués et, surtout, être capable d'expliquer comment mener un test. Il n'est pas rare d'avoir des discours confus qui mélange la pratique d'un test et la détermination d'un intervalle de confiance, la distinction doit être travaillée. La notion de p-valeur, parfois abordée dans certains exposés (voir la partie informatique), semble embarrasser celles ou ceux qui l'utilisent quand on demande son interprétation. Elle semble très souvent confondue avec les risques de première ou deuxième espèce.

2.3.3 Mise en œuvre informatique

Les possibilités d'utilisation de l'outil informatique pour une illustration pertinente de résultats probabilistes ou statistiques sont nombreuses et nous ne pouvons pas espérer en donner une liste exhaustive. Le logiciel Python est devenu prédominant par rapport à Scilab en 2022. Dans tous les cas, les compétences en informatique sont en progrès constants ces dernières années.

Nous donnons ici quelques conseils et les exemples les plus importants.

— **Les candidats peuvent choisir de présenter leur code informatique** s'ils le souhaitent (surtout en cas de dysfonctionnement à l'exécution), mais alors de manière synthétique afin de ne pas porter préjudice au déroulement de l'exposé.

— **tout tracé d'un graphique devrait être accompagné d'une légende explicite** à l'adresse du jury. Si c'est un graphe, il faut systématiser l'emploi de labels sur les axes : qui est en abscisse, qui est en ordonnée ?

— Les **convergences en loi** peuvent être facilement illustrées par des confrontations graphiques d'histogrammes contre la densité d'une loi limite, ou de fonctions de répartition empiriques contre fonction de répartition limite. La plupart des candidats privilégient les histogrammes, en se contentant d'une appréciation visuelle de l'adéquation, mais sans que sa pertinence soit expliquée ou quantifiée. Il faut avoir à l'esprit que la comparaison des fonctions de répartition peut trouver son ancrage dans le théorème de Glivenko-Cantelli, et que le test de Kolmogorov-Smirnov peut prolonger cette discussion.

— Les candidats peuvent également prendre l'initiative de valider une convergence en loi par des **tests statistiques (χ^2 ou Kolmogorov-Smirnov)**. Ils peuvent le faire de manière classique en se donnant un risque α (classiquement $\alpha = 0.05$), en définissant une statistique et une région de rejet permettant de conclure. Certaines routines ou modules de logiciels offrent la possibilité de réaliser très rapidement des tests à partir d'un échantillon, et nombre d'entre eux renvoient la p-valeur qui a déjà été évoquée dans ce rapport : les candidats abordant cette notion doivent s'attendre à des questions dessus, et ne doivent donc pas se retrouver en situation d'improvisation pour leurs réponses le jour de l'oral.

— Les chaînes de Markov donnent lieu à d'intéressantes possibilités de simulation : simulation de trajectoires et analyse asymptotique. Dans des cas simples (marche aléatoire sur trois sites par exemple), on peut se voir demander comment programmer des itérations d'une chaîne à partir de variables aléatoires uniformes sur $[0,1]$. La convergence presque-sûre de moyennes $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i)$, la vérification de convergence en loi (ou pas) vers une mesure stationnaire donnent lieu à des illustrations informatiques de choix.

Le jury rappelle que certains textes sont assortis d'un jeu de données numériques sur lequel les candidats sont invités à mettre en œuvre des illustrations. Le jury se réjouit de l'augmentation du nombre de candidats traitant effectivement ces données. Cela constitue une réelle plus-value pour l'exposé. Signalons que ces textes sont accompagnés d'une notice expliquant comment ouvrir les fichiers de données avec les logiciels Python, Scilab, Octave et R, logiciels que le jury estime les mieux adaptés à l'option A.

2.4 Option B : Calcul scientifique

2.4.1 Généralités

Si les modalités et les attentes de cette épreuve semblent connues par une fraction croissante des candidats admissibles, une part d'entre eux ne maîtrisent pas suffisamment les rudiments du programme général intervenant dans les textes. Quelques notions sont centrales pour cette option et reviennent, sous une forme ou une autre, dans un grand nombre de textes. S'exercer à les manipuler et à énoncer les principaux résultats afférents permet d'aborder sereinement les textes proposés. Le jury attend des candidats de :

- connaître le théorème de Cauchy-Lipschitz et être en mesure de l'appliquer pour des systèmes différentiels simples en citant correctement toutes les hypothèses nécessaires à son utilisation.
- construire la méthode d'Euler explicite et en analyser les propriétés de convergence.
- connaître les principes des méthodes directes de résolution de systèmes linéaires (pivot de GAUSS, LU), la notion de conditionnement, la recherche d'éléments propres de matrices, analyser et mettre en œuvre la méthode de la puissance.
- analyser et mettre en œuvre la méthode de NEWTON (cas vectoriel).
- construire la matrice correspondant à la discrétisation par différences finies de $(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2})$ et connaître ses propriétés.
- être capable d'énoncer et appliquer le théorème des extrema liés (typiquement pour des problèmes de minimisation de fonctionnelles convexes sur $\mathbb{R}^N$ avec contraintes linéaires), analyser et mettre en œuvre un algorithme du gradient.
- maîtriser les outils d'analyse de FOURIER.
- connaître les méthodes de quadratures classiques.

Le jury souligne que les textes exploitent ces notions dans leurs versions les plus élémentaires et ne requièrent aucun raffinement technique. Un énoncé précis des théorèmes utilisés est exigible, on prendra par ailleurs soin à citer des énoncés adaptés à la problématique plutôt que des résultats trop généraux ou des listes de mots-clefs sans rapport direct avec le texte.

2.4.2 Recommandations spécifiques

Le jury émet les recommandations plus spécifiques suivantes :

- **Quadratures numériques.** L'erreur commise par la méthode des rectangles doit être connue et une preuve élémentaire est exigible des candidats.
- **Analyse des équations différentielles ordinaires et calcul différentiel.** La dérivation de fonctions de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$, et notamment le calcul de la différentielle des applications linéaires, bilinéaires et des applications composées, ne devrait pas poser de difficulté au niveau de l'agrégation. Les formules de développements de TAYLOR contiennent généralement un terme de reste, dont l'analyse est un point souvent crucial. La lecture de la moindre équation différentielle ordinaire devrait déclencher des automatismes. Par exemple, un texte indiquant « la solution de l'équation différentielle [...] est définie pour tout temps et reste positive » doit amener à :
  1. énoncer de façon précise le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ le plus adapté au problème (version linéaire si le problème est linéaire, version globale quand elle s'applique,...) et donner une définition claire de la notion de solution utilisée.
  2. expliquer comment il s'applique dans le contexte présent (détailler explicitement la fonction $(t, X) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n \mapsto f(t, X) \in \mathbb{R}^n$ qui permet de mettre le problème sous la forme $X'(t) = f(t, X(t))$, distinguer la variable vectorielle X et la fonction $X : t \mapsto X(t)$ sont malheureusement des obstacles majeurs pour certains candidats).
  3. exploiter les critères classiques garantissant la positivité de la solution et sa globalité en temps. Le jury attend des candidats une bonne maîtrise de la notion de solution maximale.
- **Schémas numériques pour les équations différentielles.** Le jury considère la description des schémas d'EULER comme un élément central du programme de l'option B. Les candidats doivent être capables de présenter clairement les principes guidant l'écriture de ces schémas et l'analyse de leurs propriétés de convergence, ainsi que les avantages et inconvénients des méthodes explicites et implicites. Le jury note un effort pour énoncer des définitions claires qui distinguent l'approximation X_n de l'évaluation $X(t_n)$, et permettent de relier le nombre de points de discrétisation et le pas Δt. Néanmoins, de nombreux candidats se contentent ensuite de citer les notions de consistance, stabilité et convergence sans les définir rigoureusement, ni

les mettre en lien avec les méthodes proposées pour illustrer le texte. La mise en œuvre de ces méthodes peut être l'occasion de discuter des difficultés potentielles liées à la stabilité et aux contraintes portant sur le pas de temps.

— **Equations aux dérivées partielles.** Le jury précise que les textes qui évoquent des problèmes d'équations aux dérivées partielles peuvent être abordés avec des outils rudimentaires et ne nécessitent *a priori* aucune connaissance sur la théorie des distributions, bien que ces notions figurent programme commun, ni ne réclament de dextérité particulière d'analyse fonctionnelle. Il est néanmoins important de savoir faire la différence entre un problème aux limites et un problème de CAUCHY, et d'utiliser la discrétisation adaptée au type de problème considéré. Le jury s'attend à ce que les matrices associées à la discrétisation de $(-\frac{d^2}{dx^2})$ par différences finies pour des conditions aux limites classiques (DIRICHLET, NEUMANN, périodiques) soient connues.

— **Algèbre linéaire.** Des lacunes profondes et inquiétantes sont relevées chez certains candidats. Au grand étonnement du jury, les candidats ne font pas toujours le lien entre matrices symétriques et formes quadratiques. Les raisonnements liés à la réduction des matrices peuvent être extrêmement laborieux et les méthodes pratiques de calcul (résolution de systèmes, calcul de puissance et d'exponentielle de matrice, inverse d'une matrice,...) méconnues. La notion de conditionnement est bien souvent trop imprécise et les liens entre rayon spectral et normes matricielles doivent être maîtrisés.

— **Optimisation.** Les théorèmes de base se rapportant aux extrema doivent être connus. On s'attend à ce que les candidats soient capables de préciser les hypothèses requises pour :

1. obtenir l'existence d'un extremum,
2. obtenir l'unicité,
3. caractériser l'extremum (sans contrainte ou avec contraintes d'égalité).

— **Analyse de FOURIER.** Le jury s'étonne que de nombreux candidats aient du mal à préciser les hypothèses de régularité assurant la convergence de la série de FOURIER. Le lien entre la régularité de la fonction et le comportement asymptotique de ses coefficients de FOURIER doit être connu.

2.4.3 Mise en œuvre informatique

Le jury de l'option B rappelle qu'une illustration réalisée avec les routines de base des logiciels fournis est tout à fait satisfaisante si elles sont clairement présentées, motivées et discutées. En particulier, la programmation d'une méthode d'Euler dans une illustration informatique n'est nullement un passage obligé. `Scilab` ou `Python` sont certainement les langages les mieux adaptés à l'esprit de l'épreuve. Par ailleurs, le jury insiste sur le fait qu'il est important de commenter les résultats informatiques (courbes, solutions, erreurs...) obtenus et de les relier au problème de modélisation traité par le texte ou à des résultats mathématiques sous-jacents. Une présentation `libreoffice` ne pourra pas être considérée comme une illustration informatique.

2.5 Option C : Algèbre et Calcul formel

2.5.1 Généralités

La ligne directrice de l'option C est dans un premier temps la recherche de l'*effectivité*, puis de l'*efficacité* (souvent en temps, parfois en espace) du calcul algébrique. Cela va des aspects les plus élémentaires (algèbre linéaire, groupes, calcul avec les entiers, les polynômes, les entiers modulo) aux aspects plus avancés (élimination, géométrie effective, codes correcteurs d'erreurs). Si l'option dispose d'un programme spécifique, les textes peuvent traiter de toute notion au programme, en particulier au programme d'algèbre. De fait, il est tout à fait possible qu'un texte parle de réduction d'endomorphismes ou de groupes, même si ces notions ne sont pas mentionnées dans le programme spécifique de l'option.

2.5.2 Recommandations spécifiques

Le programme de l'option est résolument orienté sur les problématiques du calcul algébrique effectif. Lorsqu'un énoncé du texte affirme l'existence d'un objet (scalaire, vecteur, matrice, élément d'un groupe, entier, polynôme, etc...), le jury apprécie que le candidat mène la réflexion suivante :
- peut-on calculer cet objet ?
- si oui, par quelle(s) méthodes ?
- ces méthodes sont-elles efficaces ? quel est leur coût ?

Si la démarche reste rare, le jury observe une progression du nombre de candidats se saisissant spontanément d'une question de complexité. Cette démarche est perçue très positivement par le jury. Pour prendre un exemple, quand le texte parle de cryptographie, comparer le coût des opérations de chiffrement et déchiffrement du système proposé avec le coût d'une attaque, même naïve, est une initiative intéressante et valorisée. Une telle étude est beaucoup plus à sa place qu'un exposé détaillé de RSA plaqué sur un texte qui n'en parle pas – la mention rapide de RSA dans un texte introduisant un système de chiffrement pour comparer des complexités restant bien sûr pertinente.

Sur les aspects mathématiques et la maîtrise des éléments du programme, les principales observations du jury sont les suivantes.
- **Algorithmes et complexité.** Il s'agit d'un point fondamental de l'option C que les candidats ne peuvent négliger. Il est malheureusement encore trop rare de voir des candidats prendre spontanément l'initiative d'analyser la complexité d'un algorithme pendant leur exposé. Le jury observe toutefois une progression des connaissances dans ce domaine même si certains points restent méconnus :
  - si l'algorithme d'EUCLIDE est bien connu des candidats, la plupart d'entre eux ne savent obtenir des relations de BÉZOUT qu'en effectuant l'algorithme d'EUCLIDE classique puis en procédant à une laborieuse « remontée ». Rappelons que l'algorithme d'EUCLIDE *étendu* est explicitement au programme de l'option.
  - pour analyser une complexité en temps, il faut compter des opérations et il est donc nécessaire dans un premier temps de bien identifier l'anneau dont on compte les opérations. Pour donner un exemple simple, le produit de deux polynômes de degré n dans $\mathbf{K}[X]$ coûte une seule opération dans $\mathbf{K}[X]$, mais en coûte $O(n^2)$ dans $\mathbf{K}$.
- **Codes correcteurs d'erreurs.** Depuis quelques années, le jury constate une sensible progression des connaissances des candidats sur le sujet. Les codes correcteurs sont une partie limitée du programme et très peu de connaissances sont exigibles et exigées. Toutefois, il est nécessaire de s'y être confronté pour se familiariser avec les problématiques sous-jacentes. À savoir, typiquement qu'un bon code correcteur a une grande dimension et grande distance minimale par rapport à sa longueur.
  Si les définitions de base (codes, distance de HAMMING, distance minimale) sont souvent connues, les candidats peinent toujours à en donner une interprétation pratique. Par exemple, peu de candidats sont capables d'interpréter le ratio k/n pour un code de dimension k dans $\mathbf{F}_q^n$ comme un rendement ou un taux d'information. Certains candidats ne savent même pas expliquer comment utiliser concrètement un code donné et que le nombre d'erreurs suit un modèle probabiliste. Enfin il faut être conscient que la méconnaissance des corps finis est souvent rédhibitoire pour ce sujet.
- **Corps finis.** Sur cette notion, les connaissances des candidats sont très inégales. Tout d'abord, il n'est pas acceptable de n'avoir pas d'autres exemples de corps finis en tête que $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. La construction d'extensions de $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ doit être connue ainsi que la manière dont les opérations de corps s'effectuent. Par ailleurs, il est important de savoir différentier les structures algébriques sous-jacentes : par exemple, savoir que $\mathbf{F}_{p^n}$ est isomorphe en tant que $\mathbf{F}_p$-espace-vectoriel à $\mathbf{F}_p^n$ mais pas en tant que corps.
- **Résultant.** Le jury regrette de constater que cette notion est boudée par les candidats. Rappelons que si le résultant ne fait plus partie du programme de mathématiques générales, il continue

à figurer parmi les notions au programme de l'option.

2.5.3 Mise en œuvre informatique

Quasiment tous les candidats sont maintenant en mesure d'utiliser l'outil informatique durant leur présentation. Il est important que les programmes et les calculs effectués avec l'outil informatique s'intègrent de façon pertinente dans l'exposé. L'aptitude à présenter, discuter et mettre en valeur les résultats d'exécution d'un programme puis à les relier à certains énoncés du texte est une démarche qui sera bien plus valorisée que la dextérité en programmation.

Le jury attire particulièrement l'attention sur les points suivants :

— les candidats sont libres de leur choix en ce qui concerne le logiciel parmi ceux présents dans la `ClefAgreg`. Nous avons constaté que les candidats ont tenu compte de l'invitation du jury à réfléchir sur le choix d'un logiciel adapté à l'épreuve : nous incitons les futurs candidats à continuer sur cette voie.

— le jury est parfois surpris de voir des candidats développer de longs et fastidieux calculs au tableau alors que l'utilisation de l'outil informatique leur aurait permis de gagner en temps et en clarté.

— certains textes présentent des algorithmes pour résoudre efficacement un problème donné. De nombreux candidats se contentent de les tester pour une valeur d'entrée très petite, ce qui présente un intérêt moindre. Nous encouragerons les futurs candidats à tester leurs algorithmes sur plusieurs entrées de taille différente.