MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DE LA JEUNESSE
ET DES SPORTS
Liberté
Égalité
Fraternité

Concours de recrutement du second degré

Rapport de jury

Concours : Agrégation externe

Section : Mathématiques

Session 2021

Version allégée du rapport de jury présenté par : Claudine Picaronny
Présidente du jury

Chapitre 1

Épreuves orales de leçons

1.1 Présentation des épreuves

Modalités. Pour les épreuves de leçons, les candidats tirent au sort un couple de sujets. Le candidat est libre de choisir le sujet qui lui plaît parmi ces deux sujets proposés, celui où il se sent le plus à même de mettre en valeur ses connaissances. Il n'a pas à justifier ou commenter son choix.

Les candidats préparent l'interrogation pendant 3 heures. Durant tout ce temps, ils ont libre accès aux livres de la bibliothèque de l'agrégation ou à leurs propres ouvrages. Seuls sont autorisés les ouvrages avec un numéro ISBN et jouissant d'un minimum de diffusion commerciale. L'attention des candidats est attirée sur le fait que l'ISBN ne suffit pas, une « diffusion commerciale avérée »est tout autant importante. Ainsi, un polycopié de cours, propre à un établissement, même muni d'un ISBN, pourra être refusé. Cette restriction est motivée par le principe d'égalité des candidats : les ressources documentaires autorisées doivent être facilement accessibles à tout candidat au concours. Les ouvrages imprimés par les candidats eux-mêmes (ou les bibliothèques universitaires) ne sont pas autorisés et les livres doivent être vierges d'annotation. Il n'est pas autorisé non plus de venir avec des livres dont certaines pages auraient été marquées au préalable, fût-ce de manière amovible, au moyen de post-it par exemple. (Il est toutefois possible de se munir de tels marque-pages à apposer durant la préparation.) Le représentant du directoire présent lors de la préparation peut interdire tout ouvrage personnel ou envoyé par une préparation universitaire. Évidemment, les notes personnelles, manuscrites ou dactylographiées, ne sont autorisées ni pendant l'épreuve proprement dite, ni pendant la préparation. Il est possible, et même recommandé, de venir muni d'un exemplaire du rapport du jury de l'agrégation externe de mathématiques, relié et sans annotation. Les candidats n'ont pas accès à Internet et la possession d'un dispositif de communication ou de stockage de données (téléphone, calculatrice, clé USB, montre connectée,...) serait considérée comme une tentative de fraude, susceptible d'entraîner l'exclusion du concours. À l'issue de cette phase de préparation, le jury fait procéder à la photocopie des plans de la leçon élaborés par les candidats. Le temps de préparation est décompté dès l'ouverture des enveloppes contenant les sujets. Lorsque les plans des leçons sont ramassés pour leur reproduction, les candidats disposent encore de quelques minutes pour finaliser leur réflexion et ils peuvent, bien sûr, continuer à noter leurs idées sur leurs brouillons qu'ils emmèneront en salle d'interrogation.

Les plans sont donc des documents manuscrits, communiqués à la commission d'interrogation. Ils comportent *au maximum 3 pages* au format A4, éventuellement complétées par une page de figures. Les candidats doivent veiller à la lisibilité de leur document, en tenant en compte le fait qu'ils vont être photocopiés : écrire suffisament gros, soigner la présentation, faire apparaître des titres, éviter l'utilisation de couleurs et les encres très claires... Le candidat doit clairement signaler sur ce plan les résultats qu'il estime significatifs, représentatifs de la leçon et qu'il propose de développer devant le jury.

L'épreuve s'organise en trois temps, prévus pour une durée totale de *55 minutes environ* : une présentation du plan de la leçon éventuellement suivie d'une brève discussion, un développement de 15 minutes maximum et enfin une partie consacrée au dialogue et aux questions. *Le candidat peut utiliser sa copie du plan pendant toute l'épreuve*. Pendant la première phase de l'interrogation consacrée à la présentation du plan, il peut utiliser toutes les notes manuscrites produites durant la préparation. Le développement doit quant à lui se faire sans utiliser ces notes manuscrites ; si le plan comporte lui-même trop de détails sur les développements proposés, le jury peut restreindre l'utilisation de ce document durant cette seconde phase de l'épreuve.

Commentaires généraux. Le jury met en garde contre trois écueils qui peuvent altérer les performances des candidats :

— *le hors-sujet*. Le hors-sujet se manifeste de deux manières, qui dans tous les cas sont lourdement sanctionnées. Quelques candidats prennent des libertés quant au libellé de la leçon et s'en écartent notablement : les titres des leçons définissent le champ précis qu'il faut traiter. Par ailleurs, le jury constate l'abus de « recyclage »de thèmes plus ou moins classiques, mais qui ne sont pas exploités avec à propos dans les leçons et qui, parfois, prennent une place sans commune mesure avec leur importance mathématique.

— une mauvaise évaluation des attentes et du niveau, conduisant à un *défaut de maîtrise*. Trop de candidats proposent plan ou développements qu'(ils ne peuvent défendre. Des connaissances des bases fermement maîtrisées et intelligemment utilisées valent mieux qu'un étalage de savoirs emmagasinés sans recul et à peine digérés, voire pas assimilés du tout. Une maîtrise avérée et solide des bases assure déjà une note très convenable, certainement de nature à permettre l'admission, en l'état du concours.

— *la fatigue et le stress*. Une grande majorité des candidats se présente avec une forte charge émotionnelle, à la mesure de l'enjeu et de leur investissement personnel, qui peut nuire à l'expression de leurs connaissances. Cela est d'autant plus vrai que l'épreuve ne se réduit pas à la simple récitation d'un cours mais à un échange avec le jury et donc, là encore, à une réflexion personnelle, à une prise de hauteur et à la démonstration, dans un temps court, non seulement de la maîtrise technique mais aussi de l'aptitude à construire un raisonnement. Le jury est pleinement conscient de ces difficultés et s'emploie à en réduire les effets négatifs en mettant en pratique une posture de bienveillance constante. Le jury ne cherche en rien à déstabiliser le candidat pendant l'épreuve, mais au contraire cherche à valoriser les connaissances du candidat. Les premières questions, parfois très simples, visent souvent à préciser une notation, un point du plan ou du développement, pour que le jury s'assure de la compréhension par le candidat des notions qu'il vient d'exposer et non pour lui tendre un quelconque piège. Mettre le candidat en confiance, le respecter, l'écouter, poser des questions ouvertes, permettre au candidat déstabilisé de se reprendre sans l'acculer au silence, stimuler le dialogue sont autant d'objectifs que s'assignent les membres du jury.

Une liste d'énoncés, quelque sophistiqués qu'ils soient, ne peut suffire à convaincre le jury. Il faut savoir motiver ces énoncés et expliquer comment ils s'enchaînent et en quoi ils sont pertinents. Les leçons doivent donc être illustrées avec des exemples judicieusement choisis. De nombreux titres de leçons se terminent d'ailleurs par « exemples et applications » : le jury attend donc que le plan soit riche en exemples et applications et/ou que le candidat puisse en développer lors de la présentation de son plan.

Recommandations. On trouvera ci-dessous des commentaires sur chaque leçon de la session 2022.

La rédaction des commentaires sur les leçons tente de distinguer les notions « de base », incontournables pour l'intitulé proposé et dont la maîtrise est attendue des candidats, et des suggestions d'ouverture. Ces suggestions sont de niveaux variés et peuvent concerner des champs différents, par exemple qui trouvent leurs motivations dans des problématiques propres aux options de modélisation. Certaines pistes se placent aussi aux frontières du programme et peuvent faire écho à des sujets spécialisés abordés durant la formation du candidat. Il ne s'agit là que de propositions qui ne revêtent aucun caractère obligatoire, introduites par des formulations comme « pour aller plus loin »ou « si les candidats le désirent » ; le jury n'attend certainement pas un balayage exhaustif de ces indications et il n'est pas nécessaire de développer les éléments les plus sophistiqués pour obtenir une note élevée. Enfin, certains commentaires font part de l'expérience du jury pour évoquer le dosage pas toujours approprié entre théorie et exemples, souligner des points de faiblesse qui méritent une attention particulière ou mettre en garde contre de possibles écueils (oublis, hors-sujets, erreurs fréquentes, positionnement mal à propos, etc). Le jury espère que candidats et préparateurs sauront se saisir de ces indications pour proposer des développements originaux : il n'y a pas de format standard et des manières différentes d'aborder les leçons peuvent toutes permettre d'obtenir d'excellents résultats.

Les leçons proposées ont toutes leurs spécificités qu'un principe unique ne saurait résumer ou englober. Une partie des sujets sont très délimités, alors que certains intitulés de leçons sont très ouverts et obligent le candidat à opérer des choix thématiques et de points de vue. Ces sujets sont pensés pour offrir de multiples points d'entrée, avec une échelle de niveaux techniques assez large, l'objectif étant de permettre à l'ensemble des candidats de s'exprimer au mieux et de mettre en valeur leurs connaissances. La pertinence des choix adoptés et leur motivation au regard de l'intitulé de la leçon entrent alors tout particulièrement dans l'appréciation, ainsi, bien entendu, que la maîtrise du contenu proposé. Ces leçons de synthèse exigent certainement un important recul ; elles réclament un effort conséquent de réflexion et méritent tout particulièrement d'être préparées en amont du concours. En retour, elles permettent de consolider un matériel mathématique qui peut être réinvesti avec profit dans d'autres thèmes.

1.1.1 Première partie : présentation de la leçon

Dans cette première phase de l'épreuve, le candidat est convié à utiliser son temps de parole, *6 minutes maximum*, pour présenter, argumenter, mettre en valeur et faire une synthèse de sa leçon.

Pour cette partie de l'épreuve, le candidat devrait s'imaginer dans la situation où il doit introduire à un auditoire, pendant 6 minutes, une leçon destinée ensuite à être développée sur plusieurs séances. Quel est l'intérêt du sujet ? Comment se positionne-t-il dans un paysage mathématique plus large ? Comment s'articulent les différentes sections qui composent la leçon ? Comment s'expliquent et se motivent les enchaînements ? Comment se hiérarchisent les résultats et les difficultés ? Il s'agit aussi de s'interroger sur les enjeux didactiques de la leçon, c'est-à-dire dans quel ordre et comment présenter les choses pour que le tout soit cohérent, compréhensible et pédagogiquement efficace. De plus, cette présentation gagne à être illustrée. Des exemples peuvent être utilisés pour mettre en évidence les difficultés, faire ressortir le rôle des hypothèses et décrire des applications met en valeur l'intérêt des résultats. Enfin, des figures peuvent aussi contribuer à expliquer les idées maîtresses. Si l'enjeu principal est d'argumenter la construction du plan de la leçon, il est aussi parfois pertinent de mettre en valeur les liens logiques et l'intérêt des notions présentées dans d'autres domaines (sans forcément les introduire dans le plan écrit).

Le rapport du concours indique des pistes pour chaque leçon ; il ne s'agit que de suggestions que le candidat n'est pas tenu de suivre et qui ne constituent pas une trame obligatoire pour le plan. Notamment le rapport distingue clairement le cœur des leçons et des extensions dont le contenu peut être techniquement plus exigeant. La vocation de ces commentaires n'est donc pas d'être repris de manière exhaustive ; il ne s'agit que de guider les candidats dans leur auto-évaluation et les encourager à présenter des notions avec lesquelles ils sont à l'aise. Notamment, ils peuvent tout à fait exploiter des notions ou des applications qui trouvent leur motivation dans les options de modélisation qu'ils ont choisies.

Le jury ne cherche pas des plans absolument originaux, le plus important est que le plan soit bien structuré, maîtrisé par le candidat et qu'y figure une quantité substantielle d'exemples et de mathématique. Le jury alerte les candidats sur les dangers d'utiliser les plans *tout faits* disponibles dans la littérature. Indépendamment de leur qualité et leur pertinence, qui peuvent être contrastées, le candidat ne peut se contenter de recopier un der ces plans, il doit s'approprier ce travail de façon à pouvoir l'expliquer, le commenter et le défendre.

Il s'agit d'une épreuve *orale*. Le document écrit transmis au jury se justifie pour servir de base pour la discussion et constitue un fil conducteur qui guide le jury pour mener la partie consacrée au dialogue et aux questions. Ce plan ne doit être ni une énumération d'énoncés, ni un cours ou un exposé complet avec développement des démonstrations. En revanche, il doit définir avec suffisamment de précision les notions mathématiques introduites, donner les énoncés complets (notamment les hypothèses) des résultats fondamentaux, citer des exemples et des applications. Le plan est important puisqu'il calibre l'ensemble de la leçon, il détermine l'orientation et le niveau choisis par le candidat. Les choix doivent être motivés lors de la présentation et éventuellement lors de la discussion avec le jury. Il est nécessaire d'être en mesure de démontrer les résultats importants et de pouvoir les illustrer avec des exemples simples. Soigner la présentation d'un document écrit qui sert de support pour un cours est une compétence professionnelle importante du métier d'enseignant. Aussi, la formalisation mathématique et le français doivent être soignés, ainsi que la mise en forme, autant que possible dans le temps de préparation imparti : ces éléments ne peuvent que faciliter les interactions avec le jury. Il est inutile, voire contre-productif, de chercher à remplir à tout prix les 3 feuilles autorisées, surtout avec des éléments que le candidat ne maîtrise manifestement pas.

Pendant les 6 minutes de présentation, le candidat doit tenter de faire une synthèse de son plan en en expliquant les grandes lignes et les articulations. Il est inutile de recopier le plan au tableau, puisque le jury dispose d'une copie de ce document. Toutefois le jury encourage les candidats à exploiter le tableau comme support pédagogique. Faire apparaître la structure de la leçon, illustrer une difficulté technique ou le principe d'une démonstration par une figure... permet au candidat de s'affranchir de ses notes et rend l'exposé plus vivant. La présentation orale, la qualité d'expression, la compréhension synthétique, la plus-value de l'exposé par rapport au plan écrit, la capacité du candidat à intéresser son auditoire sur une leçon donnée, constituent des éléments importants d'évaluation. Le jury se réjouit d'ailleurs des progrès constatés sur cette partie de l'épreuve.

Le jury attache une grande importance à la *maîtrise du plan* qui intervient de manière substantielle dans la grille de notation. Le plan ne peut être considéré comme maîtrisé si l'exposé ressemble à une récitation. Les résultats exposés doivent être compris ainsi que l'organisation d'ensemble de la leçon. Il est souhaitable que le candidat connaisse dans leurs grandes lignes les démonstrations des résultats figurant au programme du concours. Il est indispensable que le candidat ait une idée assez claire de la difficulté des démonstrations des résultats qu'il évoque dans son plan. Le jury rappelle qu'il n'est pas nécessaire de s'aventurer au-delà des contours du programme pour prétendre à une très bonne note ! Plus généralement, il vaut mieux se cantonner à un niveau où l'on se sait solide plutôt que de chercher à placer des énoncés débordant du programme mais sans le recul, ni l'assurance technique nécessaires. Bien entendu, réussir cette partie de l'épreuve ne s'improvise pas et le discours doit avoir été réfléchi durant la préparation de l'épreuve, et plus largement tout au long du parcours qui conduit les candidats jusqu'au concours.

À la fin de cette présentation de la leçon, le jury peut éventuellement questionner très brièvement le candidat et aborder quelques points techniques, sans entrer dans des détails qui retarderaient le début du développement.

1.1.2 Deuxième partie : le développement

Le jury demande au candidat de proposer *deux développements au moins*. Il s'agit de résultats représentatifs de la leçon que le candidat est en mesure d'exposer en détail et sans notes.

Proposer un seul développement ou des développements de niveaux trop disparates conduit à une minoration de la note. Ces propositions de développements doivent être clairement mentionnées sur le plan écrit et non pas vaguement évoquées à l'oral. Dans cet esprit, le candidat doit pouvoir motiver le choix des développements qu'il propose et en quoi ces résultats ou énoncés sont centraux ou jouent à ses yeux un rôle particulier sur le sujet. Le candidat doit aussi préciser, sur son plan écrit, ce qu'il va démontrer et, le cas échéant, les résultats de son plan qu'il va admettre pour mener à bien son développement. Il faut prendre garde dans ce choix à ne pas déclarer admis un énoncé majeur qui, une fois acquis, rend l'objet du développement trivial. De même il faut prendre garde aux « raisonnements circulaires »en faisant appel à un énoncé qu'on interpréterait comme une conséquence de celui qu'on cherche à démontrer. De telles maladresses sont perçues comme un défaut de maîtrise et de recul qui est pénalisé.

Le jury choisit le développement qui va être effectivement exposé par le candidat. Le candidat dispose de 15 minutes (maximum) pour mener à bien son développement. La gestion du temps est une des difficultés de l'épreuve. Un exposé trop court est le signe d'un sujet mal choisi, inapproprié au concours ; une démonstration inachevée dans le temps imparti témoigne d'un manque de maîtrise. Le jury demande au candidat de bien gérer son tableau, en particulier le candidat doit demander aux membres du jury l'autorisation d'effacer. Lors du développement, le jury attend du candidat des explications sur la preuve et sur l'utilisation pertinente des notions développées durant l'exposé oral ; il peut être opportun, lors du développement, de se référer explicitement au plan présenté. Trop peu de candidats commencent leur développement par une rapide synthèse des grandes idées ou des étapes qui le composent. Expliquer l'approche adoptée, et les difficultés, au début du développement est une démarche pédagogique appréciée. Un ou plusieurs dessins peuvent aider à clarifier la discussion technique. Il est inutile de se précipiter ou de parler trop vite ; on veillera au contraire à préciser ses notations, à soigner sa présentation, à placer sa voix et à regarder de temps en temps le jury. Le développement ressemble parfois à une succession plus ou moins convaincante de résultats intermédiaires *ad hoc*. Cette phase de l'épreuve vise à mettre en valeur des qualités pédagogiques autant que techniques et l'exposé doit faire la preuve de la compréhension du sujet par le candidat. La récitation mécanique d'un développement ne peut pas être convaincante ; le jury veille à ce que les futurs enseignants comprennent ce qu'ils exposent et sachent exposer ce qu'ils comprennent. C'est une qualité essentielle d'un futur agrégé. Un choix judicieux des notations utilisées contribuent à la clarté de l'exposé ; par exemple il peut être maladroit de noter deux polynômes P et P'... surtout si on doit travailler avec les dérivées de ceux-ci. Enfin, même si le jury laisse évoluer le candidat durant son développement, en intervenant le moins possible, il peut, en cas de lacunes ou d'erreurs manifestes, interrompre le candidat pour demander des explications. Cette intervention ne donne pas droit à une extension du temps consacré au développement.

Le jury veille à la cohérence du plan et des propositions de développements. Il est souhaitable que le candidat recherche une adéquation entre le niveau auquel il souhaite se placer et les développements proposés. Un candidat ne sera pas avantagé s'il présente un développement non maîtrisé, manifestement mal compris. Si le niveau de l'agrégation ne peut se cantonner aux notions abordées dans une classe de Terminale ou une première année post-bac, trop de candidats se lancent, curieusement, dans des propositions, parfois aux limites du programme, qui dépassent largement leur niveau technique. Dans un cas comme dans l'autre, il en résulte une appréciation négative. Le développement doit être en lien direct avec le thème de la leçon présentée. L'utilisation d'un résultat qui n'apparaît pas dans le plan écrit doit être explicitement signalée par le candidat. Toute utilisation d'un lemme non démontré et enfermant l'essence de la preuve est sanctionnée. Le jury peut exiger la démonstration d'un lemme admis, si celui-ci est essentiellement le cœur du développement. Il faut éviter de présenter ou d'utiliser un résultat préliminaire ou intermédiaire sans explication convaincante. Dans le cas d'un développement difficile, il ne faut pas négliger les cas élémentaires et les détails utiles à la compréhension du jury. Le jury déplore l'abus de certains développements plus ou moins classiques, qui ne sont pas toujours utilisés à bon escient et qui occupent parfois une place disproportionnée (l'ellipsoïde de JOHN, la décomposition de DUNFORD, le théorème de BERNSTEIN, le processus de GALTON-WATSON,...). Trop de candidats ont tendance à replacer exagérément et de manière inappropriée de tels développements et se retrouvent ainsi hors sujet, impair qui est sévèrement sanctionné. Il faut aussi veiller au fait que des thèmes peuvent être exploités dans des leçons différentes... mais avec des points de vue différents, qu'il faut savoir mettre en exergue.

Le programme du concours comprend maintenant un chapitre spécifique consacré aux méthodes numériques. Les candidats sont invités à explorer ce champ, éventuellement en s'appuyant sur leurs connaissances spécifiques à l'option de modélisation qu'ils ont choisie, pour proposer des développements originaux en lien avec l'analyse d'algorithmes de calcul. La description des leçons indique quelques pistes dans cette direction. Le jury se réjouit qu'un nombre croissant de candidats saisisse ces opportunités et espère que cette tendance, qui enrichit les contenus, se renforcera.

La pertinence des explications, le souci pédagogique, la capacité à mener à bien et complètement le sujet dans le temps imparti, l'aisance technique sont des éléments importants d'appréciation. Par ailleurs, le candidat doit s'attendre à être interrogé lors de la période de discussion sur des applications ou illustrations élémentaires de son développement. Il est donc essentiel qu'il soit capable de reconnaître dans une question donnée un cas particulier simple du résultat général qu'il vient d'exposer.

1.1.3 Troisième partie : questions et dialogue

Le jury teste systématiquement la maîtrise du plan présenté. Une part importante de la discussion porte donc sur le plan, ou trouve sa source dans le plan présenté par le candidat. Il faut éviter que ce plan dépasse largement le niveau que l'on maîtrise. Le candidat doit se préparer à des questions élémentaires voire considérées comme « évidentes »sur tout énoncé mis dans son plan, questions auxquelles il doit répondre avec précision. Des candidats après des prestations relevées ont parfois pu être surpris par de telles questions portant sur les bases ; elles sont pourtant quasi-systématiques, le jury souhaitant précisément s'assurer de la maîtrise de ces bases. Le jury peut aussi proposer des calculs illustrant les notions évoquées par le plan.

Cette phase de l'épreuve requiert un certain recul qui ne peut être que le fruit d'un travail de préparation approfondi en amont du concours où l'on doit se demander si on est capable de mettre en œuvre des énoncés sur des situations simples et, pour certains théorèmes, réfléchir à des exemples ou des contre-exemples.

Les réponses aux questions des examinateurs ne prennent pas forcément une forme unique et ceux-ci se placent dans une posture de dialogue avec le candidat. Le jury pose aussi des exercices en rapport direct avec la leçon et le plan proposé mais ne s'attend pas à ce que le candidat trouve une solution immédiatement. Ces exercices ont plutôt pour objectif de voir évoluer le futur agrégé dans une démarche scientifique rigoureuse et méthodique. Le candidat doit réfléchir, utiliser son plan et rattacher l'exercice à sa leçon. Le fait de ne pas résoudre un exercice ne doit pas être perçu comme un échec et le candidat ne doit pas se décourager : plus qu'achever l'exercice, ce sont les réactions du candidat qui importent (par exemple en identifiant l'énoncé de la leçon qui permettrait de traiter le problème et en se demandant si les hypothèses d'application sont satisfaites). Dans cette partie de l'épreuve le candidat doit faire preuve de capacité d'écoute, qui est aussi évaluée ; il doit rester attentif aux suggestions du jury. Il est souvent utile d'exploiter le tableau pour bien reformuler la question, formaliser les pistes de réflexion et donner un support écrit à l'échange. Pendant cette discussion, le jury veille à laisser un temps raisonnable au candidat pour réfléchir, sans le submerger de questions.

Enfin, l'objet du concours étant de recruter de futurs enseignants, le jury peut aussi, comme l'indique l'article 8 de l'arrêté du 25 juillet 2014, poser toute question qu'il juge utile *lui permettant d'apprécier la capacité du candidat, en qualité de futur agent du service public d'éducation, à prendre en compte dans le cadre de son enseignement la construction des apprentissages des élèves et leurs besoins, à se représenter la diversité des conditions d'exercice du métier, à en connaître de façon réfléchie le contexte, les différentes dimensions (classe, équipe éducative, établissement, institution scolaire, société) et les valeurs qui le portent, dont celles de la République. Le jury peut, à cet effet, prendre appui sur le référentiel des compétences professionnelles des métiers du professorat et de l'éducation fixé par l'arrêté du 1er juillet 2013.*

1.2 Épreuve orale d'algèbre et géométrie

Comme y invite clairement l'intitulé de l'épreuve, les exemples et applications motivés par la géométrie sont particulièrement bienvenus. Les thèmes relevant de la théorie des groupes se prêtent tout particulièrement à de telles illustrations. De plus, les connaissances spécifiques à chacune des trois options A, B et C fournissent des exemples d'applications très appréciés par le jury.
Les notions de quotients sont importantes, il est important de savoir utiliser la projection canonique et de maîtriser le passage au quotient dans le cadre d'un morphisme.
La théorie des représentations est naturellement reliée à bon nombre de leçons, en particulier dans les leçons 101, 102, 103, 104, 105, 106, 150, 151 et 154.

101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Dans cette leçon, au-delà de la présentation du matériel théorique indispensable, le choix, l'organisation et la pertinence des illustrations sont des éléments forts de l'appréciation. Les deux facettes de l'action d'un groupe G sur un ensemble X doivent être maîtrisées : l'application de $G \times X$ vers X et le morphisme de G vers $\mathfrak{S}(X)$. La relation entre orbite et stabilisateur qui en découle est incontournable ainsi que des exemples de son utilisation. Il faut savoir utiliser des actions bien choisies pour obtenir des informations soit sur un ensemble X donné, soit sur un groupe G donné et faire apparaître des sous-groupes intéressants de G comme stabilisateurs. Par ailleurs, la présentation doit illustrer comment l'étude des orbites de certaines actions revient à classifier certains objets, soit en trouvant un représentant simple de chaque orbite, soit en dégageant des invariants caractérisant les orbites. Les actions de groupes interviennent aussi efficacement dans des problèmes de dénombrements, notamment via la formule de Burnside.

Les exemples peuvent être internes à la théorie des groupes (action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{1, ..., n\}$, action par translation ou par conjugaison, etc). Mais il est souhaitable d'emprunter aussi à d'autres domaines (action sur des anneaux, des espaces de matrices ou des espaces de polynômes, représentations de groupes, groupes d'isométries, etc). La géométrie fournit aussi de nombreux exemples pertinents (groupes d'isométries d'un solide ou d'un polygone régulier).

Pour aller plus loin, on peut aborder l'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{K})$ sur la droite projective menant au birapport ou celle de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré ou les preuves par actions de groupes des théorèmes de Sylow ou encore d'autres actions donnant lieu à des isomorphismes exceptionnels. Il est aussi possible de s'intéresser aux aspects topologiques ou différentiels liés à certaines actions.

102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

Cette leçon ne peut faire l'impasse sur les aspects élémentaires du sujet (définitions, exponentielle complexe, trigonométrie, etc.), mais elle ne doit s'y cantonner. Elle doit aborder l'aspect « groupe »de S^1 en considérant son lien avec $(\mathbf{R}, +)$ et en examinant ses sous-groupes (en particulier finis). Il faut aussi envisager des applications en géométrie plane. Plus généralement, la leçon invite à expliquer où et comment les nombres complexes de module 1 et les racines de l'unité apparaissent dans divers domaines des mathématiques : spectres de matrices remarquables, polynômes cyclotomiques, représentations de groupes, etc. On peut également s'intéresser aux sous-groupes compacts de $\mathbf{C}^*$

Pour aller plus loin, on peut s'intéresser aux nombres de module 1 et aux racines de l'unité dans $\mathbf{Q}[i]$, ou à la dualité des groupes abéliens finis (notamment la preuve du théorème de structure par prolongement de caractère) ou encore aux transformées de Fourier discrètes et rapides.

Des aspects analytiques du sujet peuvent être évoqués (théorème de relèvement, logarithme complexe, analyse de Fourier sur $\mathbf{R}^n$) mais ne doivent occuper ni le coeur de l'exposé, ni l'essentiel d'un développement.

103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

Dans cette leçon, le jury souhaite que les candidats mettent tout d'abord l'accent sur la conjugaison dans un groupe. Ensuite, ils doivent expliciter la structure de groupe obtenue sur le quotient d'un groupe par un sous-groupe distingué.

La notion de conjugaison doit être illustrée dans des situations variées : groupes de petit cardinal, groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, groupe linéaire d'un espace vectoriel, groupe affine d'un espace affine, groupe orthogonal, etc. On donne des exemples où la conjugaison aide à résoudre certains problèmes (par exemple, en transformant un élément en un autre plus simple à manipuler ou en considérant l'action par conjugaison). L'étude des classes de conjugaison de divers groupes peut être menée. Dans le cadre d'une action d'un groupe, il faut savoir que les stabilisateurs d'éléments d'une même orbite sont conjugués. On peut aussi illustrer et utiliser le principe du « transport par conjugaison » voulant que hgh^{-1} ait la même « nature géométrique » que g et que ses caractéristiques soient les images par h des caractéristiques de g (conjugaison d'une transvection, d'une translation, d'une réflexion, etc.).

Concernant la notion de sous-groupe distingué, il faut indiquer en quoi c'est précisément la notion qui permet de munir le quotient d'une structure de groupe héritée. Cette notion permet aussi de donner une caractérisation interne des produits directs. Le lien entre sous-groupe distingué et noyau de morphisme ϕ est incontournable ainsi que l'isomorphisme $G/\mathrm{Ker}\phi \cong \mathrm{Im}\phi$. Des exemples bien choisis mettent en évidence comment certains problèmes portant sur l'un des deux groupes G ou G/H peuvent être résolus en utilisant l'autre (par exemple, le lien entre les sous-groupes de l'un et de l'autre). L'examen de la simplicité de certains groupes peut être proposé.

Il est important de s'attarder sur l'utilité des notions présentées. Les applications en arithmétique sont nombreuses, mais il est pertinent de présenter aussi des applications en géométrie ou en algèbre linéaire. On peut ainsi expliquer comment l'étude des classes de conjugaison permet de démontrer la simplicité de certains groupes comme SO_n, étudier le groupe des homothéties-translations distingué dans le groupe affine, établir que les groupes orthogonaux de formes quadratiques congruentes sont conjugués ou encore qu'un sous groupe compact de $\mathrm{GL}(n)$ est conjugué à un sous groupe de $\mathrm{O}(n)$. En algèbre linéaire, des propriétés topologiques de la classe de conjugaison d'un endomorphisme permettent d'établir son caractère diagonalisable ou nilpotent. Enfin, on peut interpréter le discriminant d'une forme quadratique non-dégénérée comme élément du quotient $\mathbf{K}^\times/(\mathbf{K}^\times)^2$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent poursuivre en illustrant ces notions en théorie des représentations des groupes finis (classes de conjugaison et nombres de représentations irréductibles, treillis des sous-groupes distingués lu dans la table de caractères, liens entre représentations de G et de G/H, etc.). La notion de produit semi-direct et les théorèmes de Sylow débordent du programme. Il est possible de les évoquer, mais en veillant à les illustrer par des exemples et des applications.

104 : Groupes abéliens et non abéliens finis. Exemples et applications.

La richesse de cette leçon ne doit pas nuire à sa présentation. Le candidat devra sans doute faire des choix qu'il doit être en mesure de justifier.

La notion d'ordre (d'un groupe, d'un élément et d'un sous-groupe) est très importante dans cette leçon ; le théorème de Lagrange est incontournable. Les groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et $\mathfrak{S}_n$ sont des exemples très pertinents. Pour ces groupes, il est indispensable de savoir proposer un générateur ou une famille de générateurs. Dans $\mathfrak{S}_n$, il faut savoir calculer un produit de deux permutations et savoir décomposer une permutation en produit de cycles à supports disjoints. Le théorème de structure des groupes abéliens finis doit figurer dans cette leçon. Sa démonstration est techniquement exigeante, mais il faut que l'énoncé soit bien compris, en particulier le sens précis de la clause d'unicité, et être capable de l'appliquer dans des cas particuliers. Il est important de connaître les groupes d'ordre premier ainsi que les groupes d'ordre inférieur à 7.

Les exemples doivent figurer en bonne place dans cette leçon. L'étude des groupes d'isométries laissant fixe un polygone (ou un polyèdre) régulier peut être opportunément exploitée sous cet intitulé. Afin d'illustrer leur présentation, les candidats peuvent aussi s'intéresser à des groupes d'automorphismes ou à des représentations de groupes, ou étudier les groupes de symétries $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5$ et relier sur ces exemples géométrie et algèbre.

Pour aller plus loin, les candidats peuvent s'attarder sur la dualité dans les groupes abéliens finis. Comme application, la cyclicité du groupe multiplicatif d'un corps fini est tout à fait adaptée. Des exemples de caractères, additifs, ou multiplicatifs dans le cadre des corps finis, sont les bienvenus. Il est aussi possible de s'intéresser aux sommes de GAUSS. S'ils le désirent, les candidats peuvent ensuite introduire la transformée de FOURIER discrète qui pourra être vue comme son analogue analytique, avec ses formules d'inversion, sa formule de PLANCHEREL. Ainsi, la leçon peut mener à introduire la transformée de FOURIER rapide sur un groupe abélien dont l'ordre est une puissance de 2 ainsi que des applications à la multiplication d'entiers, de polynômes et éventuellement au décodage de codes via la transformée de HADAMARD.

105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

Parmi les attendus, il faut savoir relier la leçon avec les notions d'orbites et d'actions de groupes. Il faut aussi savoir décomposer une permutation en cycles à supports disjoints, tant sur le plan théorique (preuve du théorème de décomposition), que pratique (sur un exemple). Il est important de savoir déterminer les classes de conjugaisons du groupe symétrique par la décomposition en cycles, d'être capable de donner des systèmes de générateurs. L'existence du morphisme signature est un résultat non trivial mais ne peut pas constituer, à elle seule, l'objet d'un développement. Il est bon d'avoir en tête que tout groupe fini se plonge dans un groupe symétrique et de savoir calculer la signature des permutations ainsi obtenues dans des cas concrets. Les applications sont nombreuses, il est très naturel de parler du déterminant, des polynômes symétriques ou des fonctions symétriques des racines d'un polynôme. On peut également parler du lien avec les groupes d'isométries des solides.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant par exemple aux automorphismes du groupe symétrique, à des problèmes de dénombrement, aux représentations des groupes des permutations ou encore aux permutations aléatoires.

106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

Cette leçon ne doit pas se résumer à un catalogue de résultats épars sur $\mathrm{GL}(E)$. Il est important de savoir faire correspondre les sous-groupes du groupe linéaire avec les stabilisateurs de certaines actions naturelles (sur des formes quadratiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe, etc.). On doit présenter des systèmes de générateurs de $\mathrm{GL}(E)$ et étudier la topologie de ce groupe en précisant pourquoi le choix du corps de base est important. Les liens avec le pivot de GAUSS sont à détailler. Il faut aussi savoir réaliser $\mathfrak{S}_n$ dans $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ et faire le lien entre signature et déterminant. S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en remarquant que la théorie des représentations permet d'illustrer l'importance de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ et de son sous-groupe unitaire. Ils peuvent également étudier les sous-groupes compacts maximaux et les sous-groupes fermés de $\mathrm{GL}(n)$.

108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

La description ensembliste du groupe engendré par une partie doit être connue et les groupes monogènes et cycliques doivent être évoqués. C'est une leçon qui doit être illustrée par des exemples très variés. Il est indispensable de donner des parties génératrices pour tous les exemples proposés. Les groupes $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ fournissent des exemples naturels tout comme les groupes de permutations, les groupes linéaires ou leurs sous-groupes (par exemple $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$, $\mathrm{O}_n(\mathbf{R})$ ou $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$). Ainsi, on peut s'attarder sur l'étude du groupe des permutations avec différents types de parties génératrices en discutant de leur intérêt (ordre, simplicité de $\mathcal{A}_5$ par exemple). On peut présenter le groupe $\mathrm{GL}(E)$ généré par des transvections et des dilatations en lien avec le pivot de Gauss, le calcul de l'inverse ou du rang (par action sur $M_{n,p}(\mathbf{K})$), le groupe des isométries d'un triangle équilatéral qui réalise S_3 par identifications des générateurs. Éventuellement, il est possible de discuter des conditions nécessaires et suffisantes pour que $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$ soit cyclique ou la détermination de générateurs du groupe diédral.

On illustre comment la connaissance de parties génératrices s'avère très utile dans certaines situations, par exemple pour l'analyse de morphismes de groupes, ou pour montrer la connexité par arcs de certains sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

S'il le souhaite, le candidat peut s'intéresser à la présentation de certains groupes par générateurs et relations. Pour aller plus loin, il est également possible de parler du logarithme discret et de ces applications à la cryptographie (algorithme de Diffie-Hellman, cryptosystème de El Gamal).

120 : Anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Applications.

On construit rapidement $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, puis on en décrit les éléments inversibles, les diviseurs de zéro et les idéaux. Ensuite, le cas où l'entier n est un nombre premier doit être étudié. La fonction indicatrice d'Euler ainsi que le théorème chinois et sa réciproque sont incontournables.

Les applications sont très nombreuses. Les candidats peuvent, par exemple, choisir de s'intéresser à la résolution d'équations diophantiennes (par réduction modulo n bien choisi) ou bien au cryptosystème RSA. Si des applications en sont proposées, l'étude des morphismes de groupes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ ou le morphisme de Frobenius peuvent figurer dans la leçon.

S'ils le désirent, les candidats peuvent poursuivre en donnant une généralisation du théorème chinois lorsque deux éléments ne sont pas premiers entre eux, ceci en faisant apparaître le PGCD et le PPCM de ces éléments.

Enfin, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant au calcul effectif des racines carrées dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, au logarithme discret, ou à la transformée de Fourier rapide.

121 : Nombres premiers. Applications.

Le sujet de cette leçon, souvent appréciée des candidats, est très vaste. Elle doit donc être abordée en faisant des choix qui devront être clairement motivés. Des conjectures classiques ont aussi leur place dans cette leçon. On peut définir certaines fonctions importantes en arithmétique, les relier aux nombres premiers et illustrer leurs utilisations. Il est particulièrement souhaitable de s'intéresser aussi aux aspects algorithmiques du sujet (tests de primalité). En plus d'une étude purement interne à l'arithmétique des entiers, il est important d'exhiber des applications dans différents domaines : théorie des corps finis, théorie des groupes, arithmétique des polynômes, cryptographie, etc. La réduction modulo p n'est pas hors-sujet et constitue un outil puissant pour résoudre des problèmes arithmétiques simples. La répartition des nombres premiers doit être évoquée : certains résultats sont accessibles dans le cadre du programme du concours, d'autres peuvent être admis et cités pour leur importance culturelle.

122 : Anneaux principaux. Applications.

Comme l'indique son intitulé, cette leçon ne doit pas se cantonner aux aspects théoriques. L'arithmétique des anneaux principaux doit être décrite et les démonstrations doivent être maîtrisées (lemme d'Euclide, théorème de Gauss, décomposition en irréductibles, PGCD et PPCM, etc.). Les anneaux euclidiens représentent une classe importante d'anneaux principaux et l'algorithme d'Euclide a toute sa place dans cette leçon pour effectuer des calculs. Les applications en algèbre linéaire ne manquent pas et doivent être mentionnées (par exemple, le lemme des noyaux ou la notion de polynôme minimal pour un endomorphisme, pour un endomorphisme relativement à un vecteur ou pour un nombre algébrique). Si les anneaux classiques $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$ doivent impérativement figurer, il est possible d'en évoquer d'autres (décimaux, entiers de Gauss $\mathbf{Z}[i]$ ou d'Eisenstein $\mathbf{Z}[e^{2i\pi/3}]$) accompagnés d'une description de leurs inversibles, de leurs irréductibles et éventuellement d'applications à des problèmes arithmétiques (équations diophantiennes).

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en s'intéressant à l'étude des réseaux, à des exemples d'anneaux non principaux, mais aussi à des exemples d'équations diophantiennes résolues à l'aide d'anneaux principaux. À ce sujet, il sera fondamental de savoir déterminer les unités d'un anneau, et leur rôle au moment de la décomposition en facteurs premiers. De même, le calcul effectif des facteurs invariants de matrices à coefficients dans un anneau principal peut être présenté.

123 : Corps finis. Applications.

Une construction des corps finis doit être connue et une bonne maîtrise des calculs dans les corps finis est indispensable. Les injections des divers $\mathbf{F}_q$ doivent être connues. Les applications des corps finis (y compris pour $\mathbf{F}_q$ avec q non premier !) ne doivent pas être oubliées. Par exemple, l'étude de polynômes à coefficients entiers et de leur irréductibilité peut figurer dans cette leçon. Le calcul des degrés des extensions et le théorème de la base téléscopique sont incontournables. La structure du groupe multiplicatif doit aussi être connue. L'étude des carrés dans un corps fini et la résolution d'équations de degré 2 sont envisageables.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en détaillant des codes correcteurs ou en étudiant l'irréductiblilité des polynômes à coefficients dans un corps fini.

125 : Extensions de corps. Exemples et applications.

Le théorème de la base téléscopique et ses applications à l'irréductibilité de certains polynômes, ainsi que les corps finis, sont incontournables. De même il faut savoir calculer le polynôme minimal d'un élément algébrique dans des cas simples, notamment pour quelques racines de l'unité. La leçon peut être illustrée par des exemples d'extensions quadratiques et leurs applications en arithmétique, ainsi que par des extensions cyclotomiques.

S'ils le désirent, les candidats peuvent montrer que l'ensemble des nombres algébriques forme un corps algébriquement clos et expliquer comment l'utilisation du résultant permet de calculer des polynômes annulateurs de sommes et de produits de nombres algébriques. Pour aller plus loin, les candidats peuvent parler des nombres constructibles à la règle et au compas, et éventuellement s'aventurer en théorie de GALOIS.

126 : Exemples d'équations en arithmétique.

Dans cette leçon, il est indispensable de s'intéresser à des équations sur $\mathbf{Z}$ mais aussi des équations dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et dans les corps finis. On doit présenter les notions de bases servant à aborder les équations de type $ax + by = d$ (identité de BEZOUT, lemme de GAUSS). On doit présenter des exemples d'utilisation effective du lemme chinois.

Ensuite, la méthode de descente de FERMAT et l'utilisation de la réduction modulo un nombre premier p méritent d'être mis en œuvre. La leçon peut aussi dériver vers la notion de factorialité, illustrée par des équations de type MORDELL, PELL-FERMAT, et même FERMAT (pour $n = 2$, ou pour les nombres premiers de Sophie GERMAIN). La résolution des systèmes linéaires sur $\mathbf{Z}$ peut être abordée. Il est de plus naturel de s'intéresser à la résolution des systèmes de congruences, à la recherche de racines carrées dans les corps finis. Les candidats peuvent plus généralement aborder la recherche des racines des polynômes dans les corps finis.

S'ils le désirent, les candidats peuvent étudier les coniques sur les corps finis et la recherche de points sur ces coniques.

141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

La présentation du bagage théorique permettant de définir corps de rupture, corps de décomposition, ainsi que des illustrations dans différents types de corps (réel, rationnel, corps finis) sont inévitables. Les corps finis peuvent être illustrés par des exemples de polynômes irréductibles de degré 2, 3, 4 sur $\mathbf{F}_2$ ou $\mathbf{F}_3$. Il est nécessaire de présenter des critères d'irréductibilité de polynômes et des polynômes minimaux de quelques nombres algébriques.

Il est bon de savoir montrer que l'ensemble des nombres algébriques sur le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels est un corps algébriquement clos. Le théorème de la base téléscopique, ainsi que les utilisations arithmétiques (utilisation de la divisibilité) que l'on peut en faire dans l'étude de l'irréductibilité des polynômes, est incontournable.

142 : PGCD et PPCM, algorithmes de calcul. Applications.

Le champ d'étude de cette leçon ne peut se limiter au cas de $\mathbf{Z}$; il s'agit de définir et manipuler les notions de PGCD et PPCM dans un anneau factoriel et comme générateurs de sommes/intersections d'idéaux dans un anneau principal. Le candidat doit prendre soin de différencier le cadre théorique des anneaux factoriels ou principaux dans lequel sont définis les objets et dans lequel s'appliquent les énoncés des théorèmes proposés et le cadre euclidien fournissant les algorithmes. Bien sûr, la leçon peut opportunément s'illustrer d'exemples élémentaires d'anneaux euclidiens, comme $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{K}[X]$.

Une part substantielle de la leçon doit être consacrée à la présentation d'algorithmes : algorithme d'Euclide, algorithme binaire, algorithme d'Euclide étendu. Dans le cas des polynômes, il faut étudier l'évolution de la suite des degrés et des restes. On peut évaluer le nombre d'étapes de ces algorithmes dans les pires cas et faire le lien avec les suites de Fibonacci.

Des applications élémentaires sont particulièrement bienvenues : calcul de relations de Bezout, résolutions d'équations diophantiennes linéaires, inversion modulo un entier ou un polynôme, calculs d'inverses dans les corps de ruptures, les corps finis. On peut aussi évoquer le théorème chinois effectif, la résolution d'un système de congruences et faire le lien avec l'interpolation de Lagrange.

Pour aller plus loin, on peut évoquer le rôle de algorithme d'Euclide étendu dans de nombreux algorithmes classiques en arithmétique (factorisation d'entiers, de polynômes, etc). Décrire l'approche matricielle de l'algorithme d'Euclide et l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Z}^2$ est tout à fait pertinent. On peut aussi établir l'existence d'un supplémentaire d'une droite dans $\mathbf{Z}^2$, ou d'un hyperplan de $\mathbf{Z}^n$, la possibilité de compléter un vecteur de $\mathbf{Z}^n$ en une base.

La leçon peut amener à étudier les matrices à coefficients dans un anneau principal ou euclidien, et, de manière plus avancée, la forme normale d'Hermite et son application à la résolution d'un système d'équations diophantiennes linéaires. De même, aborder la forme normale de Smith, et son application au théorème de la base adaptée, permet de faire le lien avec la réduction des endomorphismes *via* le théorème des invariants de similitude.

La leçon invite aussi, pour des candidats familiers de ces notions, à décrire le calcul de PGCD dans $\mathbf{Z}[X]$ et $\mathbf{K}[X,Y]$, avec des applications à l'élimination de variables. On peut rappeler les relations entre PGCD et résultant et montrer comment obtenir le PGCD en échelonnant la matrice de Sylvester. Sur l'approximation diophantienne, on peut enfin envisager le développement d'un rationnel en fraction continue et l'obtention d'une approximation de Padé-Hermite à l'aide de l'algorithme d'Euclide, la recherche d'une relation de récurrence linéaire dans une suite ou le décodage des codes BCH.

144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications

Dans cette leçon, il est indispensable de bien définir l'ordre de multiplicité d'une racine (définition algébrique et analytique, quand c'est possible). Les fonctions symétriques élémentaires et les relations entre cœfficients et racines doivent être maîtrisées et pouvoir être mises en œuvre. Des méthodes, même élémentaires, de localisation des racines ont toute leur place et peuvent déboucher sur des résultats de topologie à propos de la continuité des racines.

Il peut être pertinent d'introduire la notion de polynôme scindé et de citer le théorème de d'Alembert-Gauss. Il est apprécié de faire apparaître le lien entre la recherche des racines d'un polynôme et la réduction des matrices. Les candidats peuvent également s'intéresser aux racines des polynômes orthogonaux, ou aux règles des signes de Descartes et de Sturm. L'étude des propriétés des nombres algébriques peuvent trouver leur place dans cette leçon. La théorie des corps et le cas particulier des corps finis peuvent aussi être évoqués de façon pertinente.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser à des problèmes de localisation des valeurs propres, comme les disques de Gershgorin.

Il ne s'agit par contre en aucun cas d'adapter le plan de la leçon 141 : l'irréductibilité des polynômes peut être évoquée mais ne doit pas être l'élément central de la leçon.

149 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.

Cette leçon doit aborder la notion de vecteurs propres et de valeurs propres de façon générale et mettre en lumière l'exploitation de techniques d'algèbre ou d'analyse pour aborder leur recherche. Après avoir exploré la détermination théorique exacte des éléments propres et donné des exemples de situations où la connaissance d'éléments propres s'avère utile on doit connaître les limites du calcul exact, même si le cadre mathématique nécessaire est non exigible et hors programme et introduire sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ une ou plusieurs méthodes itératives, dont on démontre la convergence. Les notions de norme matricielle, de rayon spectral doivent être maîtrisées. Le lien avec la convergence des suites du type $X_{n+1} = AX_n$ doit être connu et illustré. La problématique du conditionnement doit être abordée.

Le conditionnement d'une matrice symétrique définie positive peut être connu et un lien avec $\sup_{||x||=1} x^\top Ax$ doit alors être fait. Le résultat général de convergence, relié au théorème du point fixe de Banach, peut être enrichi de considérations sur la vitesse de convergence. On peut illustrer cette leçon optimisation de fonctionnelles quadratiques (du type $\frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x)$), recherche de valeurs propres,... Parmi les points intéressants à développer, on peut citer les méthodes de type Jacobi pour la résolution de systèmes linéaires, les méthodes de gradient dans le cadre quadratique, les méthodes de la puissance, puissance inverse et QR pour la recherche d'éléments propres. Les candidats pourront illustrer leur propos sur des matrices issues de problèmes de moindres carrés ou de schémas numériques pour les équations différentielles ou aux dérivées partielles linéaires. Il est aussi possible de s'intéresser au comportement de la suite des itérées de matrices stochastiques ou plus généralement de matriices à coefficients positifs, au moins dans ds cas particuliers.

150 : Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

Le choix des exemples doit être fait avec soin, en évitant de présenter des actions dont on ne maîtrise pas les bases.

Dans un premier temps, il faut présenter différentes actions (translation à gauche, congruence, similitude, équivalence, ...) et quelques orbites. Dans chaque cas on pourra dégager d'une part des invariants simples (matrices échelonnées réduites, rang...) et d'autre part des algorithmes, comme le pivot de Gauss. On peut détailler le cas particulier de l'action de $O_n(\mathbf{R})$ sur $S_n(\mathbf{R})$.

Les candidats peuvent s'intéresser au fait que les polynômes caractéristiques et minimaux ne suffisent pas à caractériser les classes de similitudes. Dans le cas de l'action par congruence, le théorème de Sylvester et son interprétation en termes de changements de bases méritent de figurer dans la leçon. Il est possible de limiter l'action aux matrices de produits scalaires et de caractériser les éléments des stabilisateurs. Si l'on veut aborder un aspect plus théorique, il est possible de faire apparaître à travers différentes actions quelques décompositions célèbres ; on peut décrire les orbites lorsque la topologie s'y prête.

S'ils le désirent, les candidats peuvent travailler sur des corps finis et utiliser le dénombrement dans ce contexte.

151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il est indispensable de présenter les résultats fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves. Ces théorèmes semblent simples car ils ont été très souvent pratiqués, mais leur preuve demande un soin particulier. Il est important de savoir justifier pourquoi un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est aussi de dimension finie.

On peut montrer, sur des exemples, comment la dimension finie intervient dans la démonstration de certains résultats (récurrence sur la dimension, égalité de sous-espaces par inclusion et égalité des dimensions, isomorphisme par injectivité et dimension, etc.). À cette occasion, on pourra signaler des résultats qui ne subsistent pas en dimension infinie. Le pivot de Gauss ainsi que les diverses notions et caractérisations du rang trouvent leur place dans cette leçon. Les applications sont nombreuses : existence de polynômes annulateurs, dimension de l'espace des formes n-linéaires alternées en dimension n, isomorphisme avec le dual dans le cadre euclidien et théorème de Riesz, espaces de solutions d'équations différentielles ordinaires, caractérisation des endomorphismes diagonalisables, décomposition d'isométries en produits de réflexions, dimensions des représentations irréductibles d'un groupe fini, théorie des corps finis, etc.

Les caractérisations du rang peuvent aussi être utilisées pour démontrer l'invariance du rang par extension de corps, ou pour établir des propriétés topologiques (sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). S'ils le désirent, les candidats peuvent déterminer des degrés d'extensions dans la théorie des corps ou s'intéresser aux nombres algébriques. Il est également possible d'explorer des applications en analyse comme les extrémas liés. Dans un autre registre, il est pertinent d'évoquer la méthode des moindres carrés dans cette leçon, par exemple en faisant ressortir la condition de rang maximal pour garantir l'unicité de la solution et s'orienter vers les techniques de décomposition en valeurs singulières pour le cas général. On peut alors naturellement analyser l'approximation d'une matrice par une suite de matrices de faible rang.

152 : Déterminant. Exemples et applications.

Dans cette leçon, il faut commencer par définir correctement le déterminant. et savoir démontrer ses propriétés fondamentales (en particulier le fait que l'espace des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1). La distinction entre le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base donnée et le déterminant d'un endomorphisme doit être comprise. L'interprétation en termes de volume est essentielle. Le calcul explicite est important, mais le jury ne peut se contenter d'un déterminant de Vandermonde ou d'un déterminant circulant. Les opérations élémentaires permettant de calculer des déterminants doivent être présentées et illustrées. Le polynôme caractéristique est incontournable (on prendra garde que $A - XI_n$ est à coefficients dans $\mathbf{K}[X]$ qui n'est pas un corps). Parmi les autres applications possibles, on peut penser aux déterminants de Gram (permettant des calculs de distances), au déterminant jacobien (utile en calcul intégral et en probabilités), à l'utilisation du déterminant en géométrie (coordonnées barycentriques, colinéarité, etc.) ou encore à son rôle dans l'étude des formes quadratiques. Il est bienvenu d'illustrer la continuité du déterminant par une application. On pourra aussi s'intéresser à sa différentielle.

Pour aller plus loin, les candidats peuvent s'intéresser aux calculs de déterminants sur $\mathbf{Z}$. Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent aussi trouver leur place dans cette leçon pour des candidats ayant une pratique de ces notions.

153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

Cette leçon ne doit pas être un catalogue de résultats autour de la réduction qui est ici un moyen pour démontrer des théorèmes ; les polynômes d'endomorphismes doivent y occuper une place importante. Il faut consacrer une courte partie de la leçon à l'algèbre $\mathbf{K}[u]$ et aux liens entre réduction de l'endomorphisme u et structure de l'algèbre $\mathbf{K}[u]$. Il faut connaître la dimension de $\mathbf{K}[u]$ sans hésitation. Il est ensuite possible de s'intéresser aux propriétés globales de cette algèbre (inversibles, condition nécessaire et suffisante assurant que ce soit un corps...). De même il est important de mettre en évidence les liens entre les idempotents et la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques.

Le lemme des noyaux, les polynômes caractéristiques et minimaux doivent figurer dans la leçon. Il faut bien préciser que, dans la réduction de DUNFORD, les composantes sont des polynômes en l'endomorphisme, et en connaître les conséquences théoriques et pratiques. L'aspect *applications* est trop souvent négligé. Il est possible, par exemple, de mener l'analyse spectrale de matrices stochastiques. On attend d'un candidat qu'il soit en mesure, pour une matrice simple de justifier la diagonalisabilité et de déterminer un polynôme annulateur (voire minimal). Il est bien sûr important de ne pas faire de confusion entre diverses notions de multiplicité pour une valeur propre λ donnée (algébrique ou géométrique). Enfin, calculer A^k ne nécessite pas, en général, de réduire A (la donnée d'un polynôme annulateur de A suffit souvent). Il est possible d'envisager des applications aux calculs d'exponentielles de matrices.

S'il le souhaite, le candidat pourra étudier des équations matricielles et de calcul fonctionnel, avec par exemple l'étude de l'extraction de racines ou du logarithme.

154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Dans cette leçon, il faut présenter des propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme. Des études détaillées sont les bienvenues, par exemple dans le cas d'une matrice diagonalisable ou dans le cas d'une matrice nilpotente d'indice maximum.

L'étude des endomorphismes cycliques et des endomorphismes semi-simples trouvent tout à fait leur place dans cette leçon. Dans le cas des corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on pourra, si on le souhaite, caractériser ces derniers par la fermeture de leur orbite.

La réduction des endomorphismes normaux et l'exemple de résolutions d'équations matricielles peuvent être présentés en applications.

La décomposition de FROBENIUS constitue également une application intéressante de cette leçon. Il ne faut pas oublier d'examiner le cas des sous-espaces stables par des familles d'endomorphismes. Ceci peut déboucher par exemple sur des endomorphismes commutants entre eux ou sur la théorie des représentations.

155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

Dans cette leçon, on attend des exemples naturels d'endomorphismes diagonalisables et des critères de diagonalisabilité. On doit notamment savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable est encore diagonalisable. Il ne faut pas oublier de parler du cas des endomorphismes symétriques. On peut étudier certaines propriétés topologiques en prenant le soin de donner des précisions sur le corps $\mathbf{K}$ et la topologie choisie pour $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Les candidats doivent disposer de méthodes efficaces de calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable. On peut dénombrer les endomorphismes diagonalisables dans les corps finis, ou possédant des propriétés données, liées à la diagonalisation.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'intéresser aux liens qui peuvent aussi être fait avec la théorie des représentations et la transformée de FOURIER rapide.

156 : Exponentielle de matrices. Applications.

Bien que ce ne soit pas une leçon d'analyse, il faut toutefois pouvoir justifier clairement la convergence de la série exponentielle.

Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées. Par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels ? La matrice définie par blocs $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels ?

La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de $\exp(A)$ trouve toute son utilité dans cette leçon. L'exponentielle fait bon ménage avec la décomposition polaire dans bon nombre de problèmes sur les sous-groupes du groupe linéaire. L'étude du logarithme (quand il est défini) peut être menée dans cette leçon.

Il est bon de connaître l'image par exponentielle de certains sous-ensembles de matrices (ensemble des matrices symétriques, hermitiennes, ou antisymétriques).

Les applications aux équations différentielles méritent d'être présentées sans toutefois constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidats de proposer ce thème dans un développement de cette leçon, sauf à avoir bien compris comment les apports algébriques permettent ici de simplifier les conclusions analytiques.

S'ils le désirent, les candidats peuvent s'aventurer vers les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire (on peut alors voir si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$) ou vers les algèbres de Lie.

157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Il est indispensable de connaître les polynômes caractéristiques et minimaux d'un endomorphisme nilpotent et de savoir justifier son caractère trigonalisable. Il est bon de savoir expliquer pourquoi l'application induite par un endomorphisme trigonalisable (respectivement nilpotent) sur un sous-espace stable est encore trigonalisable (respectivement nilpotent). L'utilisation des noyaux itérés est fondamentale dans cette leçon, par exemple pour déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables. Il est intéressant de présenter des conditions suffisantes de trigonalisation simultanée ; l'étude des endomorphismes cycliques a toute sa place dans cette leçon. L'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter la décomposition de Frobenius, ou des caractérisations topologiques des endomorphismes nilpotents, ou encore des propriétés topologiques de l'ensemble des endomorphismes nilpotents.

158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Le théorème spectral est indispensable dans cette leçon. Une place importante mérite d'être faite au cas particulier des matrices symétriques positives et définies positives ; les candidats doivent connaître leurs propriétés fondamentales, leur rôle, et la structure de leur ensemble. La notion de signature pourra être présentée en montrant comment elle détermine la classe de congruence d'une matrice symétrique réelle. L'action du groupe linéaire et du groupe orthogonal sur l'espace des matrices symétriques peut donner un cadre naturel à cette leçon. Le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes est incontournable. L'orthogonalisation simultanée est un résultat important de cette leçon. Il faut en connaître les applications géométriques aux quadriques.

Les candidats familiers avec ces notions pourront illustrer la leçon en évoquant le cas des matrices de covariance de vecteurs aléatoires et discuter les conditions en assurant le caractère inversible.

Une discussion de la décomposition de Cholesky, qui a de nombreuses applications pour le calcul scientifique (en lien avec la résolution de systèmes linéaires ou de problèmes de moindres carrés) ou en probabilités (construction d'un vecteur gaussien de matrice de covariance donnée à partir d'un vecteur gaussien de matrice de covariance identité), peut mériter sa place dans cette leçon. On poura également évoquer la décomposition en valeurs singulières d'une matrice (particulièrement importante pour le traitement massif de données).

159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.

Il est important de bien placer la thématique de la dualité dans cette leçon ; celle-ci permet de mettre en évidence des correspondances entre un morphisme et son morphisme transposé, entre un sous-espace et son orthogonal (canonique), entre les noyaux et les images ou entre les sommes et les intersections. Bon nombre de résultats d'algèbre linéaire se voient dédoublés par cette correspondance. Les liens entre base duale et fonctions de coordonnées doivent être parfaitement connus. Le passage d'une base à sa base duale ou antéduale, ainsi que les formules de changement de base, doivent être maîtrisés. On pourra s'intéresser aux cas spécifiques où l'isomorphisme entre l'espace et son dual est canonique (cas euclidien, cas des matrices).

Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans via la dualité est important dans cette leçon. L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans.

Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrique, algébrique, topologique ou analytique. Il faut que les développements proposés soient en lien direct avec la leçon. Enfin rappeler que la différentielle d'une fonction à valeurs réelles est une forme linéaire semble incontournable.

Il est possible d'illustrer la leçon avec un point de vue probabiliste, en rappelant que la loi d'un vecteur aléatoire X est déterminée par les lois unidimensionnelles de $X \cdot u$ pour tout vecteur u.

160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

Dans cette leçon, le caractère euclidien de l'espace est essentiel pour que l'endomorphisme soit remarquable. Le théorème spectral pour les auto-adjoints et la réduction des endomorphismes orthogonaux sont des résultats incontournables. Le jury met les candidats en garde sur le fait que le lemme des noyaux ou la décomposition de Dunford ne sont pas des développements adaptés à cette leçon. En revanche, l'utilisation du fait que l'orthogonal d'un sous-espace stable par un endomorphisme est stable par l'adjoint doit être mis en valeur. De même la réduction d'endomorphismes normaux peut être évoquée.

L'étude des projections orthogonales (en lien ave le calcul de distances), des rotations, des réflexions, des renversements, etc. fournit des exemples dignes d'intérêt. Une illustration pertinente peut s'appuyer sur la description de problèmes de moindres carrés en faisant ressortir le rôle de l'hypothèse de rang plein de A sur le caractère inversible de $A^{\intercal}A$.

161 : Distances et isométries d'un espace affine euclidien.

Cette leçon ne doit pas se restreindre aux seuls cas des dimensions 2 et 3, même s'il est naturel que ceux-ci y occupent une place importante. La classification des isométries en dimension 2 et 3 est exigible. En dimension 3, il faut savoir classifier les rotations et connaître les liens avec la réduction. On peut aussi penser aux isométries laissant stables certains objets en dimension 2 et 3. Il faut savoir prouver qu'une isométrie est affine, pouvoir donner des générateurs du groupe des isométries affines et savoir composer des isométries affines.

Les candidats peuvent en outre parler de la définition de la distance, de la distance à un sous-espace vectoriel et de déterminant de Gram. Les groupes de similitude peuvent également être abordés.

S'ils le désirent, les candidats peuvent évoquer l'interprétation de l'écart-type comme une distance, et présenter la matrice de covariance comme un exemple pertinent de matrice de Gram. Ainsi, les déterminants de Gram permettent de calculer l'erreur commise dans le cadre de prédictions affines.

162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Dans cette leçon, les techniques liées au simple pivot de Gauss constituent l'essentiel des attendus. Il est impératif de faire le lien avec la notion de système échelonné (dont on donnera une définition précise et correcte) et de situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire, sans oublier la dualité. Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique et l'intérêt algorithmique des méthodes présentées doit être expliqué, éventuellement en l'illustrant par des exemples simples (où l'on attend parfois une résolution explicite).

Parmi les conséquence théoriques, les candidats peuvent notamment donner des systèmes de générateurs de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$. Ils est aussi pertinent de présenter les relations de dépendance linéaire sur les colonnes d'une matrice échelonnée qui permettent de décrire simplement les orbites de l'action à gauche de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ donnée par $(P, A) \mapsto PA$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent exploiter les propriétés des systèmes d'équations linéaires pour définir la dimension des espaces vectoriels et obtenir une description de l'intersection de deux sous-espaces vectoriels donnés par des systèmes générateurs, ou d'une somme de deux sous-espaces vectoriels donnés par des équations.

De même, des discussions sur la résolution de systèmes sur $\mathbf{Z}$ et la forme normale de Hermite peuvent trouver leur place dans cette leçon. Enfin, il est possible de présenter les décompostions LU et de Choleski, en évaluant le coût de ces méthodes ou encore d'étudier la résolution de l'équation normale associée aux problèmes des moindres carrés et la détermination de la solution de norme minimale par la méthode de décomposition en valeurs singulières.

170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

L'intitulé implique implicitement que le candidat ne doit pas se contenter de travailler sur $\mathbf{R}$. L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être mis en œuvre sur une forme quadratique simple. Le candidat pourra parler de la classification des formes quadratiques sur le corps des complexes et sur les corps finis.

Les notions d'isotropie et de cône isotrope doivent être connues. On pourra rattacher cette notion à la géométrie différentielle.

171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Dans cette leçon, la loi d'inertie de Silvester doit être présentée ainsi que l'orthogonalisation simultanée. L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être expliqué sur une forme quadratique de $\mathbf{R}^3$; le lien avec la signature doit être clairement énoncé et la signification géométrique des deux entiers r et s composant la signature d'une forme quadratique réelle doit être expliqué. La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante qui mérite d'être présentée dans cette leçon.

La définition et les propriétés classiques des coniques d'un plan affine euclidien doivent être connues. On peut présenter les liens entre la classification des formes quadratiques et celles des coniques ; de même il est intéressant d'évoquer le lien entre le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2 + bxy + cy^2$.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi aller vers la théorie des représentations et présenter l'indicatrice de Schur-Frobenius qui permet de réaliser une représentation donnée sur le corps des réels.

181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

Dans cette leçon, la notion de coordonnées barycentriques est incontournable ; des illustrations dans le triangle (coordonnées barycentriques de certains points remarquables) sont envisageables. Les candidats doivent savoir reconnaître des lignes de niveau et des lieux de points en utilisant des coordonnées barycentriques. Il est important de parler d'enveloppe convexe et de savoir dessiner l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points dans le plan ; le théorème de GAUSS-LUCAS trouve parfaitement sa place dans cette leçon. Il semble approprié d'évoquer les points extrémaux, ainsi que des applications qui en résultent. Par ailleurs, il est important d'avoir compris le lien entre fonctions convexes et ensembles convexes.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aller plus loin en présentant le lemme de FARKAS, le théorème de séparation de HAHN-BANACH, les théorèmes de HELLY et de CARATHEODORY, ou parler des sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

182 : Applications des nombres complexes à la géométrie.

Cette leçon ne sera pas proposée à la session 2020.

183 : Utilisation des groupes en géométrie.

Cette leçon ne sera pas proposée à la session 2020.

Les thèmes propres à ces deux leçons trouveront à s'exprimer dans le nouvel intitulé 191.

190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

Il est nécessaire de dégager clairement différentes méthodes de dénombrement et de les illustrer d'exemples significatifs. De nombreux domaines de mathématiques sont concernés par des problèmes de dénombrement, cet aspect varié du thème de la leçon doit être mis en avant. L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux. De plus, il est naturel de calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités. Il est important de connaître l'interprétation ensembliste de la somme des coefficients binomiaux et ne pas se contenter d'une justification par le binôme de NEWTON. L'introduction des corps finis (même en se limitant aux cardinaux premiers) permet de créer un lien avec l'algèbre linéaire. Les actions de groupes peuvent également conduire à des résultats remarquables.

S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter des applications de la formule d'inversion de MÖEBIUS ou de la formule de BURNSIDE. Des candidats ayant un bagage probabiliste pourront explorer le champ des permutations aléatoires, en présentant des algorithmes pour générer la loi uniforme sur le groupe symétrique S_n et analyser certaines propriétés de cette loi uniforme (points fixes, cycles, limite $n \to +\infty$...).

Une nouvelle leçon est ouverte pour la session 2020 :

191 : Exemples d'utilisation des techniques d'algèbre en géométrie

Le jury souhaite proposer une leçon qui offre une ouverture large autour du thème de la géométrie. Avec cet intitulé, les candidats sont libres de présenter des résultats et des exemples très variés en lien avec la géométrie. L'objectif n'est pas de couvrir le plus d'aspects possible, mais plutôt d'en proposer certains suffisamment consistants et variés. À partir du moment où ils sont de nature géométrique, tous les éléments du programme peuvent être pertinents. En contrepartie de cette liberté laissée aux candidats, une difficulté est de structurer la présentation des objets et des notions choisies. Ainsi, plusieurs approches sont possibles pour organiser cette leçon, par exemple :

— en regroupant les outils par « famille » : outils matriciels (repérage des points par des matrices colonnes, des transformations par des matrices, rang, réduction, etc.), outils polynomiaux

(formes quadratiques, déterminant, résultant, etc.), outils structurels (groupes, corps) ;
— ou par niveau d'abstraction/de généralité (nombres réels, complexes, matrices, groupes...) ;
— ou par type d'objectifs (identifier des objets géométriques, les mesurer, les classifier, démontrer des résultats en utilisant des transformations géométriques...)

Il est aussi possible de se focaliser sur un seul type d'outils (par exemple algèbre linéaire, géométrie affine ou groupes) en détaillant plusieurs applications en géométrie ou sur une question géométrique fouillée à l'aide de diverses techniques (par exemple sur des problèmes impliquant des figures géométriques comme les cercles et triangles, les polygones et polyèdres réguliers, etc.). Des situations « élémentaires », dans le plan, permettent certainement de mettre en valeur des connaissances et un recul mathématique. Il faut bien éviter l'écueil d'un catalogue fastidieux ou celui qui consisterait à recycler directement le contenu d'une autre leçon avec un vague habillage géométrique.

Parmi les nombreux éléments qui peuvent être discutés, on peut indiquer :
— les notions de distance, aire, volume. Notamment les propriétés de la matrice de Gram, le lien entre déterminant et aire d'un parallélogramme ou volume d'un parallélépipède, la construction du produit vectoriel et du produit mixte,... peuvent être exploités avec pertinence dans cette leçon. On peut ainsi être amené à étudier l'aire balayée par un arc paramétré du plan, la position d'un point par rapport à un cercle circonscrit à un triangle, etc. Le déterminant de Cayley-Menger permet de mettre en évidence des conditions pour que $n+1$ points de $\mathbf{R}^n$ forment une base affine, ou que $n+2$ points de $\mathbf{R}^n$ soient cocycliques. Dans une autre direction, la division euclidienne dans $\mathbf{Z}$ donne une preuve d'une forme du théorème de la base adaptée, avec pour conséquence le calcul du volume (d'une maille élémentaire) d'un sous réseau de $\mathbf{Z}^n$ comme étant le déterminant d'un système générateur dans la base canonique.
— l'apport de l'algèbre linéaire à la géométrie. On peut ainsi exploiter le calcul matriciel et les techniques de réduction pour mettre en évidence des informations de nature géométrique (avec les exemples fondamentaux des homothéties, projections, symétries, affinités, rotations, la classification des isométries vectorielles, etc.). On peut être alors amené à présenter le théorème de Cartan-Dieudonné sur la décomposition d'isométries euclidiennes en produit de réflexions ou encore évoquer une (ou des) interprétation(s) géométrique(s) de la décomposition en valeurs singulières. Dans cette même veine, la leçon peut être orientée vers la géométrie affine, en s'adossant à la théorie des espaces vectoriels pour définir certains objets (espaces et sous-espaces affines, applications affines, repères affines, etc), ce qui permet, par exemple, d'établir ainsi certains résultats classiques, comme les théorèmes de Thalès, Pappus, Desargues,...
— l'analyse des formes quadratiques permet d'aborder des problèmes géométriques : étude des coniques, quadriques, classification des quadriques de $\mathbf{R}^n$, interprétation géométrique de la signature, application des méthodes de réduction, etc.
— la théorie des groupes est un champ naturel pour cette leçon (mais qui n'est cependant pas indispensable) : groupes de transformations (isométries, déplacements, similitudes, translations), composition de transformations, mise en évidence d'invariants fondamentaux (angle, birapport, excentricité d'une conique). Il est possible de se focaliser sur des groupes de transformations préservant une certaine structure géométrique et en distinguant parmi eux les groupes finis (groupes d'isométries classiques), les groupes discrets infinis (avec des translations, groupes de pavages) et, pour aller plus loin, les groupes continus (groupes de Lie).
— les techniques de convexité constituent aussi un champ fructueux : le théorème de séparation par un hyperplan dans $\mathbf{R}^n$ de Hahn-Banach et, en corollaire, le théorème de Helly permettent par exemple d'établir des propriétés intéressantes sur les cordes de convexes compacts.
— certains candidats peuvent trouver intérêt à aborder les questions d'intersection de courbes polynomiales, qui permettent notamment de mettre en œuvre le théorème de Bezout et des méthodes exploitant la notion de résultant.
— un grand nombre de problèmes de géométrie peuvent être traités en exploitant le formalisme des nombres complexes. Il est tout à fait approprié d'évoquer l'étude des inversions et, en particulier la possibilité de ramener un cercle à une droite et inversement ; la formule de Ptolémée

illustre bien l'utilisation de cet outil. On peut parler des suites définies par récurrence par une homographie et leur lien avec la réduction dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ et aborder la construction de la sphère de RIEMANN.

— les problématiques de la construction à la règle et au compas constituent un autre axe pertinent pour cette leçon, avec le théorème de WANTZEL, et peuvent conduire à s'intéresser à des extensions de corps.

Comme dans le cas des autres leçons, il est tout à fait bienvenu de chercher à illustrer cette leçon par des exemples issus de l'analyse, des probabilités, de la statistique (par exemple en évoquant l'interprétation géométrique de l'analyse en composantes principales), du calcul formel (par exemple avec les applications du résultant) ou du calcul scientifique (par exemple en présentant des problématiques de géométrie computationnelle, comme le calcul d'enveloppe convexe, les algorithmes de triangulation DELAUNAY, les diagrammes de VORONOI...). Les thèmes en lien avec la géométrie projective ou la géométrie algébrique peuvent permettre à certains candidats de présenter des résultats très avancés. Cette leçon nécessite une préparation très personnelle et réfléchie de la part des candidats. Les exemples et les résultats qui y sont présentés ont vocation à inciter les candidats à enrichir les autres leçons de cette épreuve d'exemples issus de la géométrie.

1.3 Épreuve orale d'analyse et probabilités

201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.

C'est une leçon riche où le candidat doit choisir soigneusement le niveau auquel il souhaite se placer et bien délimiter le champ qu'il se propose d'explorer. Le jury attend que les candidats aient réfléchi à leur choix et les illustrent avec des applications et exemples, ce qui parfois peut manquer dans la présentation.

Les candidats peuvent se concentrer dans un premier temps sur les espaces normés composés de fonctions continues sur $\mathbf{R}$ ou une partie compacte de $\mathbf{R}$ et les propriétés de l'espace selon la norme dont il est muni. La norme $\|\cdot\|_\infty$ est naturellement associée à la convergence uniforme dont il faut avoir assimilé les bases (en particulier, le jury attend une maîtrise du fait qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue). On peut aussi envisager les variantes faisant intervenir une ou plusieurs dérivées.

Les espaces de HILBERT de fonctions comme l'espace des fonctions L^2 constituent ensuite une ouverture déjà significative. Pour aller plus loin, d'autres espaces de BANACH usuels tels que les espaces L^p ont tout à fait leur place dans cette leçon, ainsi que les espaces de SOBOLEV, certains espaces de fonctions holomorphes (HARDY, BERGMAN), ou dans une autre direction, la structure de l'espace de SCHWARTZ $\mathscr{S}(\mathbf{R})$ ou de l'espace des fonctions C^∞ à support compact sur $\mathbf{R}$ peuvent offrir des ouvertures de très bon niveau.

Il est tout à fait bienvenu, et nombre de candidats ne s'en privent pas, de discuter les relations entre ces espaces, notamment de densité et de présenter des applications de ces propriétés.

203 : Utilisation de la notion de compacité.

Cette leçon ne porte pas sur la compacité en général mais sur son *utilisation*. Il semble important de parler des théorèmes de HEINE et de ROLLE dont la démonstration doit être connue. Le candidat doit savoir que les boules fermées d'un espace vectoriel normé sont compactes si et seulement si l'espace est de dimension finie (théorème de compacité de RIESZ). Il est également souhaitable de faire figurer un énoncé du théorème d'ASCOLI dont la preuve doit être connue. Des exemples significatifs d'utilisation de la compacité comme le théorème de STONE-WEIERSTRASS, des théorèmes de point fixe, voire l'étude qualitative d'équations différentielles, sont tout à fait pertinents. Le rôle de la compacité pour des problèmes d'existence d'extrema mériterait d'être davantage étudié. S'il est important que les candidats aient une vision générale de la compacité, il est tout à fait envisageable qu'une leçon ne présente des applications que dans le cadre des espaces métriques.

Pour aller plus loin, les familles normales de fonctions holomorphes fournissent des exemples fondamentaux d'utilisation de la compacité. La caractérisation de la compacité dans les espaces L^p peut aussi tout à fait illustrer cette leçon. Les opérateurs auto-adjoints compacts sur un espace de Hilbert relèvent également de cette leçon, et il est possible développer l'analyse de leurs propriétés spectrales, éventuellement en exploitant un exemple particulier.

204 : Connexité. Exemples et applications.

L'objectif de cette leçon est de dégager clairement l'intérêt de la notion de connexité en analyse. Deux aspects sont notamment à mettre en valeur dans cette leçon : le fait que la connexité est préservée par image continue avec les théorèmes du type « valeurs intermédiaires » qui en résultent et le rôle clef de la connexité dans le passage du local au global, par exemple en calcul différentiel, voire pour les fonctions holomorphes. Il est important de présenter des résultats naturels dont la démonstration utilise la connexité. La stabilité par image continue, la structure des ouverts de $\mathbf{R}$, l'identification des connexes de $\mathbf{R}$ sont des résultats incontournables.

La caractérisation des fonctions constantes parmi les fonctions différentiables sur un ouvert connexe trouve tout à fait sa place dans cette leçon, incluant éventuellement la version « distributions » de ce résultat.

La connexité par arcs permet, lorsqu'elle se produit, de conclure immédiatement à la connexité. Toutefois, il est important de bien distinguer connexité et connexité par arcs en général (avec des exemples compris par le candidat), et il est pertinent de présenter des situations où ces deux notions coïncident. La notion de composante connexe doit également trouver sa place dans cette leçon (pouvant être illustrée par des exemples matriciels). L'illustration géométrique de la connexité est un point apprécié par le jury.

Des exemples issus d'autres champs (algèbre linéaire notamment) sont valorisés. Pour aller plus loin, le principe des zéros isolés, son lien avec le prolongement analytique, ainsi que des illustrations avec des fonctions spéciales telles que ζ, θ, Γ, ou encore le principe du maximum, fournissent des thèmes très riches pour cette leçon.

Dans une autre direction, on peut s'intéresser aux solutions d'une équation différentielle non linéaire avec le passage d'un théorème d'existence et d'unicité local à un théorème d'existence et d'unicité de solutions maximales.

Enfin, le choix des développements doit être pertinent, même s'il fait aussi appel à des thèmes différents ; on peut ainsi suggérer le théorème de Runge pour les candidats qui le souhaitent. Pour aller plus loin, on peut éventuellement évoquer certaines parties totalement discontinues remarquables telles que l'ensemble triadique Cantor et ses applications.

205 : Espaces complets. Exemples et applications.

L'un des intérêts essentiels de la complétude est de fournir des théorèmes d'existence : que ce soit tout simplement dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ mais aussi dans certains espaces de dimension infinie (par exemple dans certains espaces de fonctions). Il est important de présenter des exemples d'espaces usuels, dont on sait justifier la complétude. Un candidat à l'agrégation doit manifester une bonne maîtrise de la convergence uniforme. On peut évoquer dans cette leçon des théorèmes classiques tels que le théorème du point fixe des applications contractantes et le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Les espaces L^p sont des exemples pertinents qui ne sont pas sans danger pour des candidats aux connaissances fragiles (les $\ell^p(\mathbf{N})$, peut-être plus accessibles, fournissent déjà de beaux exemples).

On ne s'aventurera pas à parler du théorème de Baire sans applications pertinentes et maîtrisées (elles sont nombreuses). Un développement autour des fonctions continues nulle part dérivables est très souvent proposé, mais extrêmement rares sont les candidats qui arrivent avec succès jusqu'au bout. Le jury attire l'attention sur le fait qu'il existe des preuves constructives de ce résultat qui n'utilisent pas le théorème de BAIRE.

La construction de l'espace $H_0^1(]0,1[)$ pourra être abordée par les candidats qui le souhaitent avec des applications illustrant l'intérêt de cet espace.

207 : Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

Cette leçon de synthèse offre de très nombreuses orientations possibles et le choix du niveau auquel se place le candidat doit être bien clair.

Il ne faut pas hésiter à commencer par des exemples très simples tels que le prolongement en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ avec des exemples d'utilisations, mais il faut aller plus loin que le simple prolongement par continuité. Trop de candidats ne connaissent pas bien les résultats élémentaires autour du prolongement par continuité en un point d'une fonction d'une variable réelle, ou les résultats autour du prolongement C^1 (lorsque la dérivée a une limite par exemple).

Pour aller plus loin, le prolongement analytique relève bien sûr de cette leçon, et des exemples sur des fonctions classiques (ζ, Γ,...) seront appréciés. On peut également parler de l'extension à L^2, voire à l'espace des distributions tempérées, de la transformation de FOURIER. Le théorème de HAHN-BANACH, dans le cas séparable voire simplement en dimension finie, peut être un exemple de résultat très pertinent. La résolution d'un problème de DIRICHLET, correctement formulé, associé à une équation aux dérivées partielles classique, vu comme prolongement de la donnée au bord, peut être envisagée.

208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Le jury rappelle qu'une telle leçon doit contenir beaucoup d'illustrations et d'exemples, notamment avec quelques calculs élémentaires de normes subordonnées (notion qui met en difficulté un trop grand nombre de candidats). Le lien avec la convergence des suites du type $X_{n+1} = AX_n$ doit être connu (et éventuellement illustré, sans que cela puisse être mis au cœur de la leçon, de considérations d'analyse numérique matricielle). Lors du choix de ces exemples, le candidat veillera à ne pas mentionner des exemples pour lesquels il n'a aucune idée de leur pertinence et à ne pas se lancer dans des développements trop sophistiqués.

Il faut savoir énoncer et justifier le théorème de RIESZ sur la compacité de la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé. Le théorème d'équivalence des normes en dimension finie, ou le caractère fermé de tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé, sont des résultats fondamentaux à propos desquels les candidats doivent se garder des cercles vicieux. Des exemples d'espaces vectoriels normés de dimension infinie ont leur place dans cette leçon et il faut connaître quelques exemples de normes usuelles non équivalentes, notamment sur des espaces de suites ou des espaces de fonctions et également d'applications linéaires qui ne sont pas continues. On peut aussi illustrer le théorème de RIESZ sur des exemples simples dans le cas des espaces classiques de dimension infinie.

Les espaces de HILBERT ont également leur place dans cette leçon, mais le jury met en garde contre l'écueil de trop s'éloigner du cœur du sujet.

209 : Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques. Exemples et applications

Pour la session 2020, le titre de cette leçon évolue en

Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples et applications.

Ce nouvel intitulé ouvre le sujet et permet de mettre en lumière des points de vue de natures différentes, avec des points d'accès de niveaux aussi variés. Bien entendu l'approximation polynomiale ou par polynômes trigonométriques reste un des thèmes centraux de cette leçon et un certain nombre de classiques trouveront à s'exprimer, comme par exemple l'approximation par les polynômes de Bernstein, éventuellement agrémentée d'une estimation de la vitesse de convergence (en termes de module de continuité).

Il n'est pas absurde de voir la formule de Taylor comme une approximation locale d'une fonction par des polynômes mais on veillera à ne pas trop s'attarder sur ce point. Les polynômes d'interpolation de Lagrange peuvent être mentionnés à condition de maîtriser la différence fondamentale entre interpolation et approximation.

L'approximation d'une fonction par des fonctions de classe C^∞ par convolution est une technique qui s'intègre parfaitement dans ce nouvel intitulé et qui doit être illustrée d'applications (approximation de fonctions indicatrices, obtention, par densité, d'inégalités ou de résultats asymptotiques, résolution de l'équation de la chaleur,...)

Dans la même veine, pour aller plus loin, le théorème de Fejér (versions L^1, L^p ou $C(\mathbf{T})$) offre la possibilité d'un joli développement, surtout s'il est agrémenté d'applications (polynômes trigonométriques lacunaires, injectivité de la transformée de Fourier sur L^1,...). La convolution avec d'autres noyaux (Dirichlet, Jackson) est aussi une source de résultats intéressants.

213 : Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

Il est important de faire la différence entre base algébrique et base hilbertienne, notions qui mettent en difficulté nombre de candidats. Toutefois cette année, le jury se réjouit d'avoir pu constater de réels efforts sur ce point. La formule de la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie d'un espace de Hilbert doit absolument être connue de même que l'interprétation géométrique de la méthode de Gram-Schmidt. La leçon doit être illustrée par des exemples de bases hilbertiennes (polynômes orthogonaux, séries de Fourier, entre autres).

Les candidats doivent s'intéresser au sens des formules

$$x = \sum_{n\geqslant 0}(x|e_n)e_n \quad \text{et} \quad ||x||^2 = \sum_{n\geqslant 0}|(x|e_n)|^2$$

en précisant les hypothèses sur la famille $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et en justifiant la convergence. La notation $\sum_{n\in\mathbf{Z}}$ doit être manipulée avec précaution : beaucoup de candidats l'introduisent mais sans en maîtriser les subtilités.

Si le théorème de projection sur les convexes fermés (ou sur un sous-espace vectoriel fermé) d'un espace de Hilbert H est régulièrement mentionné, ses conséquences les plus directes (théorème de projection de Riesz, orthogonal de l'orthogonal et densité d'un sous-espace via la nullité de son orthogonal,...) le sont malheureusement nettement moins.

La notion d'adjoint d'un opérateur continu peut alors être introduite et, pour aller plus loin, le théorème spectral pour les opérateurs auto-adjoints compacts peut alors être abordé.

Pour aller plus loin dans une autre direction, le programme permet d'aborder la résolution et l'approximation de problèmes aux limites en dimension 1 par des arguments exploitant la formulation variationnelle de ces équations. La construction de l'espace de Hilbert–Sobolev $H_0^1(]0,1[)$ pourra donc éventuellement être abordée, ainsi que le théorème de Lax-Milgram avec des applications pertinentes. Plus généralement, l'optimisation de fonctionnelles convexes sur les espaces de Hilbert peut être explorée.

214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.

Il s'agit d'une leçon qui exige une bonne maîtrise du calcul différentiel. Même si le candidat ne propose pas ces thèmes en développement, on est en droit d'attendre de lui des idées de démonstration des deux théorèmes fondamentaux qui donnent son intitulé à la leçon. Il est indispensable de savoir mettre en pratique le théorème des fonctions implicites au moins dans le cas de deux variables réelles. On attend des applications en géométrie différentielle notamment dans la formalisation de la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE. En ce qui concerne la preuve du théorème des extrema liés, la présentation de la preuve par raisonnement « sous-matriciel »est souvent obscure ; on privilégiera si possible une présentation géométrique s'appuyant sur l'espace tangent. Plusieurs inégalités classiques de l'analyse peuvent se démontrer avec ce point de vue : arithmético-géométrique, HÖLDER, CARLEMAN, HADAMARD,...

Pour aller plus loin, l'introduction des sous-variétés est naturelle dans cette leçon. Il s'agit aussi d'agrémenter cette leçon d'exemples et d'applications en géométrie, sur les courbes et les surfaces.

215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$. Exemples et applications.

Cette leçon requiert une bonne maîtrise de la notion de différentielle première et de son lien avec les dérivées partielles, mais aussi de ce qui les distingue. Beaucoup de candidats sont mis en difficulté sur les concepts de base du calcul différentiel et ces notions sont à consolider, au-delà de cette leçon en particulier. On doit savoir trouver la différentielle d'applications classiques, comme, par exemple, $M \in GL_n(\mathbf{R}) \mapsto M^{-1}$, $M \mapsto M^2$ ou encore $M \mapsto \det(M)$ en revenant à la définition. Il est important de bien comprendre le développement sous-jacent de $f(x+h)$. La notation o est souvent source de confusions ; trop de candidats l'utilisent sans en maîtriser la signification. On doit pouvoir mettre en pratique le théorème de différentiation composée pour calculer des dérivées partielles de fonctions composées dans des situations simples (par exemple le laplacien en coordonnées polaires). La différentiation à l'ordre 2 est attendue, en lien avec la hessienne, notamment pour les applications classiques quant à l'existence d'extrema locaux. On peut aussi faire figurer dans cette leçon la différentielle d'applications issues de l'algèbre linéaire (ou multilinéaire). La méthode du gradient pour la minimisation de la fonctionnelle $\frac{1}{2}(Ax|x)-(b|x)$, où A est une matrice symétrique définie positive, conduit à des calculs de différentielles qui doivent être acquis par tout candidat.

Pour aller plus loin, l'exponentielle matricielle est une ouverture pertinente. D'autres thèmes issus de la leçon 214 trouvent aussi leur place ici.

219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

Comme souvent en analyse, il est tout à fait opportun d'illustrer dans cette leçon un exemple ou un raisonnement à l'aide d'un dessin. Il faut savoir faire la distinction entre propriétés locales (caractérisation d'un extremum local) et globales (existence par compacité, par exemple). Dans le cas important des fonctions convexes, un minimum local est également global. Les applications de la minimisation des fonctions convexes, qui peuvent être introduites par des problématiques motivées par les options de modélisation, sont nombreuses et sont tout à fait à propos pour illustrer cette leçon.

L'étude des algorithmes de recherche d'extremum y a toute sa place : méthode du gradient et analyse de sa convergence, méthode à pas optimal,... Le cas particulier des fonctionnelles sur $\mathbf{R}^n$ de la forme $\frac{1}{2}(Ax|x)-(b|x)$, où A est une matrice symétrique définie positive, ne devrait pas poser de difficultés (la coercivité de la fonctionnelle pose problème à de nombreux candidats). Les problèmes de minimisation sous contrainte amènent à faire le lien avec les extrema liés et la notion de multiplicateur de LAGRANGE. Sur ce point, certains candidats ne font malheureusement pas la différence entre recherche d'extremum sur un ouvert ou sur un fermé. Une preuve géométrique des extrema liés sera fortement valorisée par rapport à une preuve algébrique, formelle et souvent mal maîtrisée. On peut ensuite mettre en œuvre ce théorème en justifiant une inégalité classique : arithmético-géométrique, HÖLDER, CARLEMAN, etc... Enfin, la question de la résolution de l'équation d'EULER-LAGRANGE peut donner l'opportunité de mentionner la méthode de NEWTON.

Les candidats pourraient aussi être amenés à évoquer les problèmes de type moindres carrés (avec une discussion qui peut comprendre motivation, formalisation, rôle de la condition de rang maximal, jusqu'aux principes de la décomposition en valeurs singulières), ou, dans un autre registre, le principe du maximum avec des applications.

220 : Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études des solutions en dimension 1 et 2.

Équations différentielles ordinaires. Exemples de résolution et d'études de solutions en dimension 1 et 2.

Cette reformulation a pour but de mettre en garde sur le fait que la résolution explicite de certaines équations différentielles standard telles que $y' = y^2$ ou $y'' + ay' + by = \cos(\omega t)$ pose des difficultés à de trop nombreux candidats ; il est important de disposer de méthodes de résolution efficaces. Mais le jury souhaite que les candidats soient conscients que la résolution exacte de telles équations est rare et qu'ils soient donc capables de mener une étude qualitative des solutions sur des exemples et éventuellement d'envisager des stratégies d'approximation numérique des solutions.

Le jury note un effort sur la maîtrise du théorème de Cauchy-Lipschitz ; sa démonstration dans le cadre le plus général est délicate : elle est souvent mal maîtrisée. Une preuve dans le cas globalement lipschitzien constitue déjà un développement appréciable. Le jury attire l'attention sur les notions de solution maximale et de solution globale qui sont souvent confuses. Bien qu'ils ne soient pas souvent mentionnés, le lemme de Grönwall a toute sa place dans cette leçon ainsi que le théorème de sortie de tout compact.

L'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz doit pouvoir être mise en œuvre sur des exemples concrets. Il est souhaitable de produire des exemples d'équations non-linéaires qui pour certaines permettent une résolution exacte et pour d'autres donnent lieu à une étude qualitative (dont on rappelle qu'elle doit être préparée et soignée). Pour les équations autonomes, la notion de point d'équilibre permet des illustrations pertinentes comme par exemple les petites oscillations du pendule. Trop peu de candidats pensent à tracer et discuter des portraits de phase alors que l'intitulé de la leçon y invite clairement.

Le nouvel intitulé est aussi une invitation plus franche à évoquer les problématiques de l'approximation numérique en présentant le point de vue du schéma d'Euler et de sa convergence notamment, voire, pour les candidats qui le souhaitent, d'autres schémas qui seraient mieux adaptés à l'exemple présenté. On peut aller jusqu'à aborder la notion de problèmes raides et la conception de schémas implicites pour autant que le candidat ait une maîtrise convenable de ces questions.

221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Le jury attend d'un candidat qu'il sache déterminer rigoureusement la dimension de l'espace vectoriel des solutions. Le cas des systèmes à coefficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée. Le jury attend qu'un candidat puisse mettre en œuvre la méthode de variation des constantes pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 simple (à coefficients constants par exemple) avec second membre ; un trop grand nombre de candidats se trouve déstabilisés par ces questions.

L'utilisation des exponentielles de matrices a toute sa place ici et doit être maîtrisée. Les problématiques de stabilité des solutions et le lien avec l'analyse spectrale devraient être davantage exploités dans cette leçon.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire constitue un exemple de développement pertinent pour cette leçon. Les résultats autour du comportement des solutions, ou de leurs zéros, de certaines équations linéaires d'ordre 2 (Sturm, Hill-Mathieu,...) sont aussi d'autres possibilités.

Pour aller plus loin, la résolution au sens des distributions d'équations du type $T' + aT = S$ via la méthode de variation de la constante, ou des situations plus ambitieuses, trouvera sa place dans cette leçon.

222 : Exemples d'étude d'équations différentielles linéaires et d'équations aux dérivées partielles linéaires.

Cette leçon peut être abordée en faisant appel à des techniques variées et de nombreux développements pertinents peuvent être construits en exploitant judicieusement les éléments les plus classiques du programme. Le candidat ne doit pas hésiter à donner des exemples très simples (par exemple les équations de transport).

Les techniques d'équations différentielles s'expriment par exemple pour traiter $\lambda u - u'' = f$ sur $[0,1]$ avec des conditions de DIRICHLET en $x = 0$, $x = 1$ ou pour analyser l'équation de transport par la méthode des caractéristiques.

Les séries de FOURIER trouvent dans cette leçon une mise en pratique toute désignée pour résoudre l'équation de la chaleur dans différents contextes, l'équation des ondes ou de SCHRÖDINGER dans le cadre des fonctions périodiques. Des raisonnements exploitant la transformée de FOURIER peuvent également être présentés.

Le point de vue de l'approximation numérique donne lieu à des développements originaux, notamment autour de la matrice du Laplacien et de l'analyse de convergence de la méthode des différences finies.

Pour aller plus loin, la notion de solution faible d'équations aux dérivées partielles linéaires peut également être présentée, avec des applications à la résolution des équations de LAPLACE, de la chaleur, des ondes, ou de l'équation de transport. Des développements sophistiqués se placeront sur le terrain de l'analyse hilbertienne avec par exemple l'application du théorème de LAX–MILGRAM voire la décomposition spectrale des opérateurs compacts dans un espace fonctionnel approprié.

223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications

Cette leçon permet souvent aux candidats de s'exprimer. Il ne faut pas négliger les suites de nombres complexes mais les suites vectorielles (dans $\mathbf{R}^n$) ne sont pas dans le sujet. Le jury attire l'attention sur le fait que cette leçon n'est pas uniquement à consacrer à des suites convergentes, mais tout comportement asymptotique peut être présenté. Le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS doit être cité et le candidat doit être capable d'en donner une démonstration. On attend des candidats qu'ils parlent des limites inférieure et supérieure d'une suite réelle bornée, et qu'ils en maîtrisent le concept. Les procédés de sommation peuvent être éventuellement évoqués mais le théorème de CESÀRO doit être mentionné et sa preuve maîtrisée par tout candidat à l'agrégation. Les résultats autour des sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$ permettent d'exhiber des suites denses remarquables et l'ensemble constitue un joli thème. Des thèmes des leçons 225, 226 et 264 peuvent également se retrouver dans cette leçon.

Pour aller plus loin, un développement autour de l'équirépartition est tout à fait envisageable. La méthode de NEWTON peut aussi illustrer la notion de vitesse de convergence.

226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.

Le concept de point fixe d'une fonction est évidemment au coeur de cette leçon et l'énoncé d'au moins un théorème de point fixe, qu'il faut savoir mettre en œuvre sur des exemples simples, est évidemment pertinent. Le jury est parfois surpris que des candidats évoquent un théorème de point fixe dans les espaces de BANACH... sans être capables de définir ce qu'est un espace de BANACH ou d'en donner un exemple !

Au niveau élémentaire, les questions de monotonie, les notions de points attractifs ou répulsifs peuvent structurer l'exposition et l'aspect graphique n'est pas à négliger. Le jury attend quelques exemples illustrant la variété des situations et la suite récurrente $u_{n+1} = \sin(u_n)$ n'est que l'un d'entre eux : il doit certes être maîtrisé mais ne peut être le seul exemple. L'aspect vectoriel, pourtant présent dans l'intitulé, est trop souvent négligé. Le comportement des suites vectorielles définies par une relation linéaire $X_{n+1} = AX_n$ fournit pourtant un matériel d'étude conséquent.

L'étude des suites numériques linéaires récurrentes d'ordre p est souvent mal connue, notamment le lien avec l'aspect vectoriel.

La formulation de l'intitulé de cette leçon invite résolument à évoquer les problématiques de convergence d'algorithmes (notamment savoir estimer la vitesse) d'approximation de solutions de problèmes linéaires et non linéaires : dichotomie, méthode de NEWTON (avec sa généralisation au moins dans $\mathbf{R}^2$), algorithme du gradient, méthode de la puissance, méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires, schéma d'EULER,...

228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Cette leçon est reformulée pour la session 2020 sous la forme

Continuité, dérivabilité, dérivation faible des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Cette leçon permet des exposés de niveaux, et de forme, très variés. Les théorèmes de base doivent être maîtrisés et illustrés par des exemples intéressants, par exemple le théorème des valeurs intermédiaires pour la dérivée, le théorème de ROLLE... Le jury s'attend évidemment à ce que les candidats connaissent et puissent calculer la dérivée des fonctions usuelles. Les candidats doivent disposer d'un exemple de fonction dérivable de la variable réelle qui ne soit pas continûment dérivable. La stabilité par passage à la limite des notions de continuité et de dérivabilité doit être comprise par les candidats. Pour aller plus loin, les propriétés de régularité des fonctions monotones et des fonctions convexes peuvent être mentionnées. La dérivabilité presque partout des fonctions lipschitziennes peut aussi relever aussi de cette leçon. On peut enfin s'intéresser à des exemples de fonctions continues nulle part dérivables.

Le nouvel intitulé doit conduire à analyser la généralisation de la notion de dérivée d'une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ à l'aide du principe de calcul « par dualité/transposition »de la théorie des distributions. Plus qu'une analyse fonctionnelle poussée, le jury attend une certaine familiarité avec le *calcul de dérivées faibles*, dans ce cadre particulier de *fonctions* de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, qu'on n'hésitera pas à motiver par des applications (en physique, en théorie du signal,...). On peut étudier les liens entre dérivée classique et dérivée faible, calculer la dérivée faible de fonctions discontinues (formule des sauts, par exemple pour des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ et C^∞ par morceaux sur $\mathbf{R}$ comme la fonction de Heaviside, la valeur absolue) ou de fonctions du type $x \mapsto \int_a^x f(y)\mathrm{d}y$, f étant intégrable. On peut aussi relier la dérivée faible et la limite du taux d'accroissement au sens des distributions et établir le lien entre fonction croissante et dérivée faible positive. Il est également possible de parler du peigne de DIRAC. Pour aller encore plus loin, des exemples de convergence au sens des distributions peuvent tout à fait illustrer cette leçon.

229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

L'énoncé et la connaissance de la preuve de l'existence de limites à gauche et à droite pour les fonctions monotones sont attendues. Ainsi on doit parler des propriétés de continuité et de dérivabilité à gauche et à droite des fonctions convexes de la variable réelle. Il est souhaitable d'illustrer la présentation de la convexité par des dessins clairs. On notera que la monotonie concerne les fonctions réelles d'une seule variable réelle, mais que la convexité concerne également les fonctions définies sur une partie convexe de $\mathbf{R}^n$, qui fournissent de beaux exemples d'utilisation. L'étude de la fonctionnelle quadratique ou la minimisation de $||Ax - b||^2$ illustrent agréablement cette leçon.

Pour aller plus loin, la dérivabilité presque partout des fonctions monotones est un résultat remarquable (dont la preuve peut être éventuellement admise). L'espace vectoriel engendré par les fonctions monotones (les fonctions à variation bornée) relève de cette leçon. Enfin, la dérivation au sens des distributions fournit les caractérisations les plus générales de la monotonie et de la convexité ; les candidats peuvent s'aventurer utilement dans cette direction.

230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

De nombreux candidats commencent leur plan par une longue exposition des conditions classiques assurant la convergence ou la divergence des séries numériques. Sans être hors sujet, cette exposition ne doit pas former l'essentiel de la matière de la leçon. Un thème important de la leçon est en effet le comportement asymptotique des restes et sommes partielles (équivalents, développements asymptotiques — par exemple pour certaines suites récurrentes — cas des séries de RIEMANN, comparaison séries et intégrales, ...). Trop de présentations manquent d'exemples.

On peut aussi s'intéresser à certaines sommes particulières, que ce soit pour exhiber des nombres irrationnels (voire transcendants), ou mettre en valeur des techniques de calculs non triviales (par exemple en faisant appel aux séries de FOURIER ou aux séries entières). L'utilisation des calculs de séries numériques en théorie des probabilités peut fournir des exemples pertinents illustrant cette leçon.

Enfin, si le jury apprécie que le théorème des séries alternées (avec sa version sur le contrôle du reste) soit maîtrisé, il rappelle aussi que ses généralisations possibles utilisant la transformation d'ABEL trouvent toute leur place dans cette leçon.

234 : Fonctions et espaces de fonctions LEBESGUE-intégrables.

Cette leçon porte sur les fonctions intégrables au sens de la théorie générale de l'intégration de LEBESGUE ainsi que les suites et les espaces de telles fonctions. Elle ne se restreint donc pas au seul cas des fonctions intégrables pour la mesure de LEBESGUE mais peut concerner d'autres mesures telles que la mesure de comptage, les mesures absolument continues par rapport à la mesure de LEBESGUE, etc., ou encore les mesures de probabilités, qui entrent tout à fait dans le cadre de la leçon.

Le candidat est invité à étudier le comportement de suites de fonctions LEBESGUE-intégrables. Il est souhaitable que soient mentionnés l'approximation par des fonctions étagées ainsi que les principaux théorèmes de convergence sous l'intégrale de cette théorie (le lemme de FATOU, le théorème de la convergence monotone et le théorème de convergence dominée) en les illustrant par des exemples et des contre-exemples judicieux. Il faut avoir compris que l'intégrale d'une fonction continue contre la mesure de LEBESGUE coïncide avec la notion usuelle d'intégrale dite de RIEMANN, et connaître l'interprétation d'une série absolument convergente comme une intégrale. Cette leçon nécessite de maîtriser la notion de fonction mesurable et la notion de « presque partout » (et les opérations sur les ensembles négligeables qui sont associées) ainsi que la définition des espaces L^1, L^2. Toutefois, une connaissance des questions fines de la théorie de la mesure n'est pas exigée.

Une partie de cette leçon peut éventuellement être consacrée aux espaces L^p, mais il n'est pas requis d'en faire le cœur de la présentation. Évoquer la convolution entre fonctions L^1, et éventuellement entre fonctions de L^1 et de L^p ainsi que les propriétés de régularisation et de densité qui en résultent, font partie des attendus (on prendra garde toutefois d'éviter les raisonnements circulaires entre continuité des translations et approximation par convolution). Un développement original, mais techniquement exigeant, peut consister à étudier les conditions assurant la compacité de suites bornées dans L^p. Enfin, le cas particulier de l'espace hilbertien L^2 mérite attention mais il faut alors se concentrer sur les spécificités d'un espace de fonctions L^2 et éviter de faire un catalogue de propriétés vraies pour n'importe quel espace de HILBERT.

235 : Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

Cette leçon s'intéresse aux problèmes d'interversion limite-limite, limite-intégrale et intégrale-intégrale. Il ne s'agit pas de refaire un cours d'intégration. On pourra toutefois mettre en évidence le rôle important joué par des théorèmes cruciaux de ce cours. À un niveau élémentaire, on peut insister sur le rôle de la convergence uniforme (et donc, dans le cas de séries de fonctions bornées, de la convergence normale.)

Les théorèmes de convergence monotone, de convergence dominée et les théorèmes d'interversion de Fubini-Tonelli et Fubini sont des attendus de cette leçon. On choisira des exemples pertinents pour illustrer l'intérêt de chacun de ces résultats, mais on pourra aussi exhiber des contre-exemples montrant que des hypothèses trop faibles ne permettent pas en général d'effectuer l'interversion voulue. Le jury note que ces différents points posent problème à de nombreux candidats, qui sont mis en difficulté sur des exemples assez simples. Ils sont donc invités à consolider ces notions avant de s'aventurer plus loin.

Pour les candidats qui le souhaitent, on pourra parler de la transformée de Fourier et/ou de la transformée de Laplace avec des exemples et des applications.

236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.

Cette leçon doit être très riche en exemples, que ce soit l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ ou bien d'autres encore. Il est tout à fait pertinent de commencer par les différentes techniques élémentaires (intégration par parties, changement de variables, décomposition en éléments simples, intégrale à paramètres,...). Trop de candidats manquent d'aisance avec le calcul d'intégrales multiples. Le calcul de l'intégrale d'une gaussienne sur $\mathbf{R}^n$ ou le calcul du volume de la boule unité de $\mathbf{R}^n$ ne devraient pas poser de problèmes insurmontables. Le programme du concours indique que la formule d'intégration par parties multi-dimensionnelle qui relie intégrale de volume et intégrale de surface est admise ; il ne faut pas hésiter à l'exploiter et à l'illustrer par des exemples. On peut également présenter des utilisations du théorème des résidus.

On peut aussi penser à l'utilisation du théorème d'inversion de Fourier ou du théorème de Plancherel. Certains éléments de la leçon précédente, comme par exemple l'utilisation des théorèmes de convergence monotone, de convergence dominée et/ou de Fubini, sont aussi des outils permettant le calcul de certaines intégrales.

Enfin, il est tout à fait pertinent d'évoquer les méthodes de calcul approché d'intégrales (méthodes des rectangles, méthode de Monte-Carlo, etc.), une piste qui mériterait d'être davantage explorée.

239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Les candidats incluent les théorèmes de régularité (version segment — a minima — mais aussi version « convergence dominée ») ce qui est pertinent mais la leçon ne doit pas se réduire seulement à cela. Cette leçon doit être riche en exemples, ce qui parfois n'est pas suffisamment le cas. Elle peut être encore enrichie par des études et méthodes de comportements asymptotiques. Les propriétés de la fonction Γ d'Euler fournissent un développement standard, mais non sans risque (on pourra y inclure le comportement asymptotique, voire son prolongement analytique) ; certains candidats sont trop ambitieux pour le temps dont ils disposent. Le jury invite donc à bien préciser ce que le candidat souhaite montrer pendant son développement. Les différentes transformations classiques (Fourier, Laplace,...) relèvent aussi naturellement de cette leçon. On peut en donner des applications pour obtenir la valeur d'intégrales classiques (celle de l'intégrale de Dirichlet par exemple). Le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale est trop peu souvent cité.

Pour aller encore plus loin, on peut par exemple développer les propriétés des transformations mentionnées (notamment la transformée de Fourier, par exemple en s'attardant sur le lien entre régularité de la fonction et décroissance de sa transformée de Fourier), ainsi que de la convolution.

241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

Les résultats généraux sur les différents types de convergence doivent être présentés et maîtrisés. Le jury attend du candidat qu'il évoque les séries de fonctions particulières classiques : séries entières, séries génératrices, séries de Fourier, avec des exemples et des applications. On pourra également s'intéresser à la fonction zêta de Riemann, ou plus généralement aux séries de Dirichlet.

Par ailleurs, la leçon n'exclut pas du tout de s'intéresser au comportement des suites et séries de fonctions dans les espaces de type L^p (notamment pour $p = 1$), ou encore aux séries de variables aléatoires indépendantes.

Pour aller plus loin, on pourra présenter comment identifier la limite au sens des distributions d'une famille qui régularise la masse de DIRAC ou encore aborder des exemples de construction de parties finies de HADAMARD.

Séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

Cette reformulation a pour objectif de clarifier les attendus, dont font partie les propriétés élémentaires des séries entières. Trop de candidats hésitent sur les différentes notions de convergence, les notions de disque de convergence et des domaines où il y a convergence normale ; un effort de préparation doit être fait sur ces notions afin de lever toute imprécision.

Les candidats évoquent souvent des critères (CAUCHY, D'ALEMBERT) permettant d'estimer le rayon de convergence mais oublient souvent la formule de CAUCHY-HADAMARD ou toute technique utilisant une majoration ou un équivalent. Des faiblesses importantes ont été observées quant à ces techniques. Le jury attend bien sûr que le candidat puisse donner des arguments justifiant qu'une série entière en 0 dont le rayon de convergence est R est développable en série entière en un point z_0 intérieur au disque de convergence et de minorer le rayon de convergence de cette série. Sans tomber dans un catalogue excessif, on peut indiquer les formules de développement de fonctions usuelles importantes (exp, log, $1/(1 - z)$, sin,...). S'agissant d'exemples fondamentaux et classiques, le jury attend que le candidat puisse les donner sans consulter ses notes. En ce qui concerne la fonction exponentielle, le candidat doit avoir réfléchi au point de vue adopté sur sa définition et donc sur l'articulation entre l'obtention du développement en série entière et les propriétés de la fonction. À ce propos, les résultats sur l'existence du développement en série entière pour les fonctions dont on contrôle toutes les dérivées successives sur un voisinage de 0 sont souvent méconnus. Le comportement de la série entière dans le disque de convergence en relation avec les différents modes de convergence (convergence absolue, convergence uniforme, convergence normale) doit être maîtrisé.

La présentation des fonctions génératrices d'une variable aléatoire discrète peut tout à fait illustrer cette leçon. Le théorème d'ABEL (radial ou sectoriel) trouve toute sa place mais doit être agrémenté d'exercices pertinents. Réciproquement, les théorèmes taubériens offrent aussi de jolis développements. On peut aller plus loin en abordant quelques propriétés importantes liées à l'analyticité de la somme d'une série entière ou encore la résolution de certaines équations différentielles ordinaires par la méthode du développement en série entière.

245 : Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$. Exemples et applications.

Cet intitulé ne sera pas utilisé pour la session 2020 où il sera remplacé par

Fonctions d'une variable complexe. Exemples et applications.

Cette reformulation a pour objectif d'offrir des points d'entrée plus variés à cette leçon. Ainsi, il est possible, dans un premier temps et si le candidat le souhaite, de parler de polynômes de la variable complexe, de fractions rationnelles, de séries entières, sans immédiatement exposer la théorie des fonctions holomorphes. Le jury attend des exemples illustrant ces notions et montrant la maîtrise des candidats sur ces points.

Concernant les questions d'holomorphie, outre la définition, la signification géométrique des équations de CAUCHY-RIEMANN, la formule de CAUCHY et les résultats concernant l'analyticité, le principe des zéros isolés, ou encore le principe du maximum, sont des attendus de cette leçon. Le lemme de SCHWARZ est un joli résultat permettant de faire un développement élémentaire s'il est agrémenté d'applications pertinentes, comme par exemple déterminer les automorphismes du disque unité. La notation $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ a un sens précis, qu'il faut savoir expliquer. La leçon invite également à présenter le théorème d'holomorphie sous le signe intégral et des exemples de fonctions célèbres (par exemple la fonction Gamma, la fonction zêta,...).

Même si cela ne constitue pas le cœur de la leçon, la définition d'une fonction méromorphe (l'ensemble des pôles doit être une partie fermée discrète) peut être présentée à condition que cette notion soit maîtrisée et accompagnée d'exemples. Le jury attire l'attention sur le fait que le prolongement de la fonction Gamma en fonction méromorphe est très souvent proposé mais insuffisamment maîtrisé. Proposer un développement moins ambitieux mais maîtrisé est une stratégie plus payante, qui ouvre la discussion avec le jury de manière plus positive.

Pour les candidats qui le souhaitent, cette leçon offre des possibilités d'ouverture en lien avec la topologie du plan. La preuve du théorème de l'application conforme de RIEMANN est par exemple un développement de très bon niveau qui ne doit pas être abordé sans une bonne maîtrise des questions en jeu.

246 : Séries de FOURIER. Exemples et applications.

Les différents résultats autour de la convergence (L^2, FEJÉR, DIRICHLET,...) doivent être connus. On prendra garde au sens de la notation $\sum_{n\in\mathbf{Z}}$ (qu'il est plus prudent d'éviter car elle est souvent inadaptée). Il faut avoir les idées claires sur la notion de fonctions de classe C^1 par morceaux (elles ne sont pas forcément continues). Le théorème d'isométrie bijective entre espaces L^2 et ℓ^2 doit apparaître. Dans le cas d'une fonction continue et C^1 par morceaux on peut conclure sur la convergence normale de la série FOURIER sans utiliser le théorème de DIRICHLET. Il est classique d'obtenir des sommes de séries remarquables comme conséquence de ces théorèmes.

On peut aussi s'intéresser à la formule de POISSON et à ses conséquences. L'existence d'exemples de séries de FOURIER divergentes, associées à des fonctions continues (qu'ils soient explicites ou obtenus par des techniques d'analyse fonctionnelle) peuvent aussi compléter le contenu.

Il est souhaitable que cette leçon ne se réduise pas à un cours abstrait sur les coefficients de FOURIER. La résolution d'équations aux dérivées partielles (par exemple l'équation de la chaleur ou l'équation des ondes avec une estimation de la vitesse de convergence) peut illustrer de manière pertinente cette leçon, mais on peut penser à bien d'autres applications (inégalité isopérimétrique, comportements remarquables des fonctions à spectre lacunaire,...).

250 : Transformation de FOURIER. Applications.

Cette leçon offre de multiples facettes. Les candidats peuvent adopter différents points de vue : L^1, L^2 et/ou distributions. L'aspect « séries de FOURIER » n'est toutefois pas dans l'esprit de cette leçon ; il ne s'agit pas de faire de l'analyse de FOURIER sur n'importe quel groupe localement compact mais sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{R}^d$.

La leçon nécessite une bonne maîtrise de questions de base telles que la définition du produit de convolution de deux fonctions de L^1. On ne doit pas se limiter à une analyse algébrique de la transformation de FOURIER. C'est bien une leçon d'analyse, qui nécessite une étude soigneuse des hypothèses, des définitions et de la nature des objets manipulés. Le lien entre la régularité de la fonction et la décroissance de sa transformée de FOURIER doit être fait, même sous des hypothèses qui ne sont pas minimales. Les candidats doivent savoir démontrer le lemme de RIEMANN-LEBESGUE pour une fonction intégrable.

La formule d'inversion de FOURIER pour une fonction L^1 dont la transformée de FOURIER est aussi L^1 est attendue ainsi que l'extension de la transformée de FOURIER à l'espace L^2 par FOURIER-PLANCHEREL. Des exemples explicites de calculs de transformations de FOURIER classiques comme la gaussienne ou $(1+x^2)^{-1}$ paraissent nécessaires.

Pour aller plus loin, la transformation de FOURIER des distributions tempérées ainsi que la convolution dans le cadre des distributions tempérées peuvent être abordées. Les attentes du jury sur ces questions restent modestes, au niveau de ce qu'un cours de première année de master sur le sujet peut contenir. Le fait que la transformée de FOURIER envoie $\mathscr{S}(\mathbf{R}^d)$ dans lui même avec de bonnes estimations des semi-normes doit alors être compris et la formule d'inversion de FOURIER maîtrisée dans ce cadre.

Des exemples de calcul de transformée de FOURIER peuvent être donnés dans des contextes liés à la théorie des distributions comme par exemple la transformée de FOURIER de la valeur principale de $\frac{1}{x}$. Dans un autre registre, il est aussi possible d'orienter la leçon vers l'étude de propriétés des fonctions caractéristiques de variables aléatoires.

La résolution de certaines équations aux dérivées partielles telles que, par exemple, l'équation de la chaleur sur $\mathbf{R}$, peut être abordée, avec une discussion sur les propriétés qualitatives des solutions.

253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

Il s'agit d'une leçon de synthèse, très riche, qui mérite une préparation soigneuse. Même si localement (notamment lors de la phase de présentation orale) des rappels sur la convexité peuvent être énoncés, ceci n'est pas nécessairement attendu dans le plan. Il s'agit d'aborder différents champs des mathématiques où la convexité intervient. On pensera bien sûr, sans que ce soit exhaustif, aux problèmes d'optimisation (par exemple de la fonctionnelle quadratique), au théorème de projection sur un convexe fermé, au rôle joué par la convexité dans les espaces vectoriels normés (convexité de la norme, jauge d'un convexe,...). Les fonctions convexes élémentaires permettent aussi d'obtenir des inégalités célèbres. On retrouve aussi ce type d'argument pour justifier des inégalités de type BRUNN-MINKOWSKI ou HADAMARD. Par ailleurs, l'inégalité de JENSEN a aussi des applications en intégration et en probabilités.

Pour aller plus loin, on peut mettre en évidence le rôle joué par la convexité dans le théorème de séparation de HAHN-BANACH. On peut aussi parler des propriétés d'uniforme convexité dans certains espaces, les espaces L^p pour $p > 1$, par exemple, et de leurs conséquences.

260 : Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

Cette leçon ne sera pas utilisée pour la session 2020 ; les notions qui s'y rapportent peuvent être exploitées dans les leçons 261, 262, 264, 266.

Les candidats doivent connaître la définition des moments centrés et les implications d'existence de moments (décroissance des L^p). Les connaissances sur les variables aléatoires à densité sont parfois fragiles. Le candidat doit pouvoir citer — mais doit surtout savoir retrouver rapidement — les espérances et variances de lois usuelles, notamment BERNOULLI, binomiale, géométrique, POISSON, exponentielle, normale. La variance de la somme de variables aléatoires indépendantes suscite souvent des hésitations. Les inégalités classiques (de MARKOV, de BIENAYMÉ-CHEBYSHEV, de JENSEN et de CAUCHY-SCHWARZ) pourront être données, ainsi que les théorèmes de convergence (lois des grands nombres et théorème central limite). La notion de fonction génératrice des moments est importante ainsi que les liens entre moments et fonction caractéristique.

261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.

Cette leçon est l'occasion de présenter clairement la notion de loi d'une variable aléatoire et de l'illustrer par de nombreux exemples et calculs. On distinguera bien la probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω de la probabilité μ_X définie sur l'ensemble des valeurs de X par $\mu_X(A) = \mathbf{P}(X \in A) = \mathbf{P}(X^{-1}(A))$. Le théorème de transfert qui calcule $\mathbf{E}[f(X)]$ peut alors être donné comme une extension fonctionnelle de cette définition ensembliste. Inversement, on peut s'intéresser à des classes $\mathcal{C}$ de fonctions telles que la connaissance de $\mathbf{E}[f(X)]$ pour $f \in \mathcal{C}$ détermine la loi de X. Ceci mène aux outils usuels de caractérisation de la loi (fonction de répartition, fonction caractéristique, densité éventuelle, mais aussi la fonction génératrice pour des variables entières ou la transformée de LAPLACE de variables positives, ou encore les moments lorsque cela est pertinent). Les principales propriétés des fonctions de répartition des variables réelles doivent être connues. Il est important de savoir qu'il y a une bijection entre les lois sur $\mathbf{R}$ et les fonctions croissantes continues à droite tendant vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$. Il faut savoir interpréter les sauts d'une fonction de répartition, et, lorsque la fonction de répartition est C^1, savoir que la variable admet alors une densité qui est la dérivée de la fonction de répartition. Le jury s'attend à ce que le candidat puisse tracer la fonction de répartition de lois simples. Les principales propriétés des fonctions caractéristiques doivent être également connues : continuité, limite à l'infini, régularité plus forte en fonction de l'existence de moments. Des résultats analogues (et plus élémentaires) portant sur les fonctions génératrices de variables entières ou les transformées de LAPLACE de variables positives ont également toute leur place ici. La caractérisation de l'indépendance de n variables en termes de produit de lois entre dans le cadre de cette leçon. Les variables aléatoires à valeurs vectorielles (en restant dans le cadre de la dimension finie) font aussi partie de la leçon et on évoquera la loi conjointe et les lois marginales. La notion d'indépendance pourra alors être décrite. Cette leçon devra être illustrée par de nombreux exemples de calculs de lois : présentation de lois usuelles en lien avec ce qu'elles modélisent, calculs de fonctions caractéristiques ou de densités selon pertinence, loi de $\phi(X)$ à partir de la loi de X, loi de $\max(X_1, \ldots, X_n)$, $\min(X_1, \ldots, X_n)$, $X_1 + \ldots + X_n$, etc.

262 : Convergences d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.

Les théorèmes limite sont au cœur de cette leçon. Les théorèmes de convergence, lois des grands nombres et théorème central limite, doivent être énoncés et il faut au moins pouvoir en expliquer la signification et en connaître l'architecture des preuves. La maîtrise des différentes définitions des modes de convergence est attendue mais doit être completée par leur mise en pratique dans les différents théorèmes limites. Les différences entre ces théorèmes doivent être abordées avec des exemples et contre-exemples.

Les implications entre les divers modes de convergence, ainsi que les réciproques partielles doivent être connues. Des contre-exemples aux réciproques sont attendus par le jury.

Pour aller plus loin, les candidats pourront s'intéresser au comportement asymptotique de marches aléatoires (en utilisant par exemple le lemme de BOREL-CANTELLI, les fonctions génératrices,...). Enfin, les résultats autour des séries de variables aléatoires indépendantes comme le théorème de KOLMOGOROV peuvent tout à fait se placer dans cette leçon.

On peut aussi s'intéresser aux temps de retour pour une marche aléatoire simple. Pour aller plus loin, et pour les candidats maîtrisant ces notions, on peut suggérer aussi l'étude asymptotique de(s) chaînes de MARKOV, ou encore d'aborder les lois infiniment divisibles, les lois stables, les processus de renouvellement (qui donnent de beaux théorèmes de convergence).

264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.

Le jury attend des candidats qu'ils rappellent la définition d'une variable aléatoire discrète et que des lois usuelles soient présentées, en lien avec des exemples classiques de modélisation. Le lien entre variables aléatoires de BERNOULLI, binomiale et de POISSON doit être discuté. Il peut être d'ailleurs intéressant de mettre en avant le rôle central joué par les variables aléatoires de BERNOULLI.

Les techniques spécifiques aux variables discrètes, notamment à valeurs entières, devront être mises en évidence, comme par exemple la caractérisation de la convergence en loi, la notion de fonction génératrice.

Pour aller plus loin, le processus de GALTON-WATSON peut se traiter intégralement à l'aide des fonctions génératrices et cette voie a été choisie par plusieurs candidats : cela donne un développement de très bon niveau pour ceux qui savent justifier les étapes délicates.

Pour aller beaucoup plus loin, les candidats pourront étudier les marches aléatoires, les chaînes de MARKOV à espaces d'états finis ou dénombrables, les sommes ou séries de variables aléatoires indépendantes.

265 : Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.

La leçon ne doit pas se cantonner au seul champ des fonctions usuelles (logarithme, exponentielle, trigonométriques, hyperboliques et réciproques) ; un candidat doit être en mesure d'en présenter rapidement les définitions et les propriétés fondamentales, savoir les tracer sans difficultés, et mener l'étude aux bornes de leur domaine, ainsi qu'en connaître les prolongements éventuels, leurs développements de TAYLOR ou en série entière, leurs applications au calcul intégral, les équations fonctionnelles associées ou formules particulières, etc. Le jury n'attend pas un catalogue de fonctions mais plutôt un choix pertinent et réfléchi, avec des applications en probabilité, convexité, études de courbes, ou autour des développements asymptotiques. Les déterminations du logarithme complexe peuvent tout à fait mériter une discussion approfondie dans cette leçon et donner lieu à des développements de bon niveau, pouvant aller jusqu'à leur interprétation géométrique.

Le domaine des fonctions spéciales est très vaste. Plutôt qu'un catalogue de fonctions, il vaut bien mieux se concentrer sur des exemples restreints, mais fouillés, comme l'étude approfondie (d'une) des fonctions Γ, ζ ou θ, leurs propriétés fonctionnelles, leurs prolongements, leur étude asymptotique aux bornes et les domaines d'application de ces fonctions.

Il y a des manières, très différentes, de construire cette leçon. Par exemple, on peut bâtir un exposé organisé selon des problématiques et des techniques mathématiques : suites et séries de fonctions, fonctions holomorphes et méromorphes, problèmes de prolongement, développements asymptotiques, calculs d'intégrales et intégrales à paramètres, transformées de FOURIER ou de LAPLACE, etc. Mais on pourrait tout aussi bien suivre un fil conducteur motivé par un domaine d'application :
- en arithmétique pour évoquer, par exemple, la fonction ζ et la distribution des nombres premiers,
- en probabilités avec la loi normale et la fonction erreur, ou les lois Gamma et Bêta, la loi du produit de variables aléatoires normales et indépendantes, les fonctions de BESSEL et leurs liens avec la densité du χ^2 non centrée et celle de la distribution de VON MISES-FISHER,
- en analyse des équations aux dérivées partielles où les fonctions spéciales interviennent notamment pour étudier le problème de DIRICHLET pour le Laplacien ou l'équation des ondes,
- il est aussi possible d'évoquer les polynômes orthogonaux, leurs propriétés et leurs diverses applications, en physique (oscillateur harmonique et polynômes de HERMITE), en probabilités (polynômes de HERMITE pour les lois normales, de LAGUERRE pour les lois Gamma, de JACOBI pour les lois Bêta...), pour l'étude d'équations aux dérivées partielles ou pour l'analyse de méthodes numériques,
- en théorie des représentations de groupes avec les fonctions de BESSEL,
- en algèbre en abordant les fonctions elliptiques et la fonction $\wp$ de WEIERSTRASS.

Pour la session 2020, deux nouvelles leçons seront proposées :

266 : Illustration de la notion d'indépendance en probabilités.

L'indépendance est centrale en probabilités et démarque cette théorie de celle de l'intégration. La motivation de cette leçon est de présenter cette notion de façon cohérente et de l'illustrer par des énoncés fondamentaux et des modèles importants.

À partir de la notion élémentaire de probabilité conditionnelle, on pourra introduire l'indépendance de deux événements, l'indépendance mutuelle d'une suite d'événements, voire celle d'une suite de tribus, puis l'indépendance de familles de variables aléatoires. Ces notions doivent être illustrées par des exemples et des énoncés simples (indépendance deux à deux et indépendance mutuelle, indépendance et opérations ensemblistes, etc). Il est important de pouvoir présenter un espace de probabilité sur lequel sont définies n variables aléatoires indépendantes, au moins à un niveau élémentaire pour des variables discrètes ou à densité. De façon plus sophistiquée, on peut envisager de donner une construction d'un espace de probabilité sur lequel est définie une suite de variables aléatoires réelles indépendantes ayant des lois prescrites.

Au delà des définitions, il est nécessaire de décliner quelques propriétés simples de l'indépendance, notamment celles en lien avec l'espérance et, plus spécifiquement, les notions de variance et de covariance, ce qui peut s'illustrer par exemple par l'obtention de lois faibles des grands nombres. Une autre illustration possible consiste en la représentation des variables usuelles (binomiales, géométriques, hypergéométriques ...) à l'aide d'expériences indépendantes élémentaires. Grâce aux divers critères utilisant les fonctions ou transformées caractérisant les lois (densité, fonction génératrice, fonction de répartition à n variables, fonction caractéristique, etc) il est possible de présenter les propriétés d'indépendance remarquables dont jouissent les lois usuelles (lois de Poisson, lois normales, lois exponentielles, lois de Cauchy ou, pour aller plus loin, par exemple, la traduction de l'indépendance des vecteurs gaussiens en termes d'algèbre bilinéaire).

Les réciproques du lemme de Borel-Cantelli et la loi du 0-1 de Kolmogorov, plus sophistiquée, tiennent une place de choix dans cette leçon ; elles permettent notamment d'obtenir des convergences presque sûres. De manière générale, il est important d'illustrer cette leçon par des exemples tels que l'étude des records ou les propriétés du minimum de variables exponentielles indépendantes ou bien les statistiques d'ordre, ou encore le principe du « singe tapant à la machine », etc. Enfin, la promenade aléatoire simple symétrique sur $\mathbf{Z}$ est une riche source d'exemples.

267 : Exemples d'utilisations de courbes en dimension 2 ou supérieure.

Cette leçon de synthèse doit permettre de montrer la variété d'utilisation des courbes dans le plan (ou, dans une perspective plus ambitieuse, de courbes tracées sur un objet géométrique plus élaboré), que celles-ci soient définies sous une forme paramétrique ou une sous forme implicite. Plutôt qu'une théorie générale ou un catalogue de formules relatives à divers systèmes de coordonnées qui seraient donnés sans motivation, le jury attend plutôt une illustration des applications des courbes planes en topologie, en calcul différentiel, en géométrie ou en analyse complexe à partir d'exemples et de résultats pertinents. Il s'agit d'un sujet suffisamment riche qui permet d'aborder des points de géométrie intéressants tout en restant à un niveau mathématique raisonnable. Cette leçon doit présenter différents aspects de l'utilisation des courbes : on ne pourra se contenter d'un seul. La liste qui suit, qui n'est pas exhaustive, présente plusieurs pistes.

Les propriétés métriques des courbes planes (longueur d'arc, voire courbure) font naturellement partie de cette leçon. Un axe de cette leçon pourrait concerner l'obtention du tracé des courbes et l'étude de mouvements ponctuels dans le plan, qu'ils soient donnés sous forme de lieux (coniques, cycloïdes diverses, etc) ou de solutions d'équations différentielles (par exemple inspirés de problème de mécanique du point, comme le mouvement à deux corps et les lois de Kepler). On peut également penser à l'utilisation d'intégrales premières en vue de l'analyse des solutions de systèmes d'équations différentielles ordinaires (périodicité du mouvement d'un pendule pesant, de solutions du système de Lotka–Volterra, méthode des caractéristiques pour la résolution d'équations de transport, etc.). Il est important que les exemples de tracés de courbes soient motivés.

L'application des courbes planes à la topologie est un point qui peut illustrer naturellement cette leçon : le concept de connexité par arcs, le théorème du relèvement ainsi que la notion d'indice d'un lacet par rapport à un point en lien avec le théorème intégral de Cauchy en analyse complexe... sont des sujets d'investigation pertinents pour cette leçon. Pour aller plus loin, cette leçon peut être l'occasion de s'attarder sur ces techniques d'analyse complexe ainsi que sur les divers résultats qui y sont liés comme par exemple, la formule des résidus, l'existence d'une primitive complexe, voire la méthode du col pour l'obtention de développements asymptotiques, l'étude de certaines transformations conformes (comme la transformation de Joukovski) et leurs applications... Pour les candidats qui le souhaitent, il est enfin possible de développer quelques aspects de géométrie des surfaces en parlant par exemple de vecteurs tangents, de géodésiques sur la sphère ou encore d'extrema liés.

Chapitre 2

Épreuves orales de modélisation

2.1 Déroulement des épreuves de Modélisation

Lors de l'inscription au concours, quatre options sont proposées :

A. Probabilités et Statistiques,
B. Calcul scientifique,
C. Algèbre et Calcul formel,
D. Informatique.

L'épreuve de modélisation comporte une période de préparation de quatre heures et une interrogation dont la durée est d'une heure, modalités qui s'appliqueront encore pour la session 2022.

Le jury rappelle que, même s'il s'agit d'une épreuve plus appliquée ou moins académique que les deux autres épreuves orales, cela ne dispense en aucun cas les candidats de faire preuve de la rigueur mathématique requise : quand on utilise un théorème, il faut impérativement être capable d'en restituer un jeu d'hypothèses. Par jeu d'hypothèses correct, on entend que le théorème soit vrai et qu'il s'applique effectivement au contexte considéré. Le jury n'attend pas nécessairement un énoncé avec les hypothèses les plus générales possibles.

L'épreuve de modélisation permet aux candidats de mettre en avant diverses qualités : les connaissances mathématiques / informatiques, la réflexion et la mise en perspective des connaissances, l'aptitude à les appliquer à des problèmes concrets de modélisation, la pertinence des illustrations informatiques, les qualités pédagogiques de mise en forme d'un exposé construit et cohérent, la capacité à faire preuve d'initiative pour s'exprimer et manifester des qualités pédagogiques et de synthèse. La capacité des candidats à répondre aux questions fait partie intégrante de l'évaluation de cette épreuve. Comme pour l'ensemble des oraux, le caractère vivant de l'exposé est un atout.

Le texte fourni est la base pour construire et exposer un traitement mathématique / informatique (pour l'option D) d'un problème « concret » en s'appuyant sur les éléments, généralement partiels, disséminés dans le texte. La présentation doit s'appuyer sur un dosage cohérent et harmonieux entre introduction motivée de modèles, preuves mathématiques, illustrations informatiques, critiques éventuelles du texte, réponses aux questions, mise en lumière des connaissances. Les candidats doivent utiliser leurs connaissances mathématiques et informatiques pour justifier les points de leur choix parmi ceux évoqués dans le texte, proposer un retour sur le modèle ainsi qu'une conclusion.

2.1.1 Textes

L'épreuve de modélisation repose sur l'exploitation d'un texte d'environ 5 à 6 pages que les candidats choisissent parmi les deux qui leur sont proposés lors du tirage et qu'ils pourront consulter en ligne dans la salle de préparation.

Ces textes sont surmontés, pour les options A, B, C des bandeaux :

> *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte, dont il dispose d'une copie pendant l'interrogation, sans toutefois être censé le connaître. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury recommande qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et doit mettre en lumière vos connaissances, à partir des éléments du texte. Il doit contenir des illustrations informatiques réalisées sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.*

Pour l'option D, le bandeau était :

> *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte, dont il dispose d'une copie pendant l'interrogation, sans toutefois être censé le connaître. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury recommande qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et mettant en lumière vos connaissances, à partir des éléments du texte. Il doit contenir des illustrations informatiques réalisées sur ordinateur, comportant une part significative de programmation dans un ou plusieurs des langages C, CAML, Java ou Python. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.*

Les textes se termineront par les recommandations suivantes pour les options A, B, C, D :

> *Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives et il n'est pas obligatoire de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier, ou non, certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos illustrations informatiques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en œuvre.*

Les textes sont souvent motivés par des problèmes concrets. Ils peuvent présenter des arguments rapides, voire heuristiques, qui sont dans ce cas signalés comme tels, mais ils ne contiennent pas d'assertion délibérément trompeuse et se concluent par une liste de suggestions.

Même si la plupart des textes s'appuient sur des problématiques issues de sciences autres que les mathématiques, aucune connaissance dans ces domaines n'est exigée par le jury. Discuter la modélisation proposée par un texte consiste donc avant tout à dégager les comportements qualitatifs du modèle, la manière dont il dépend d'éventuels paramètres et s'il semble apte à rendre compte des phénomènes qu'il est censé représenter. Toutefois, le jury s'attend à ce que les candidats ne se contentent pas d'un exposé intégralement qualitatif et démontrent certains résultats évoqués dans le texte ; il apprécie particulièrement, sans toutefois l'exiger, qu'un candidat montre sa compréhension du modèle en exhibant par exemple les conséquences d'une variation de paramètres ou de données, notamment dans l'illustration informatique. *A contrario*, des interprétations qualitatives du comportement des modèles sont trop souvent absentes des exposés. Pourtant, montrer que l'on comprend un modèle ne se réduit pas à prouver un théorème, et nécessite d'exposer des expérimentations informatiques à fin d'illustration.

Chaque année, des textes sont rendus publics et sont disponibles sur le site de l'agrégation de mathématiques http://agreg.org. Ces textes sont représentatifs de l'épreuve et permettent aux candidats de se familiariser avec le format des textes, de se faire une idée des attentes du jury, de réfléchir à des illustrations numériques pertinentes dans le cadre du texte, ou, pour l'option D, d'évaluer les exigences de programmation de l'épreuve.

2.1.2 Préparation

Durant les quatre heures de préparation, les candidats ont accès à une bibliothèque numérique et disposent d'un ordinateur dont la configuration est décrite sur le site de l'agrégation de mathématiques, à l'adresse http://agreg.org. Les candidats retrouveront le même environnement sur l'ordinateur de la salle d'interrogation. Il n'est évidemment pas réaliste de découvrir les logiciels à disposition des candidats le jour de l'épreuve : la configuration informatique utilisée pour le concours et sa documentation sont accessibles et téléchargeables sur le site http://clefagreg.dnsalias.org/ et permettent de se familiariser avec l'environnement offert lors de l'épreuve.

Il est instamment demandé aux candidats de pas écrire sur le texte imprimé qui lui est distribué car il est destiné à être utilisé à nouveau pendant la session.

Il est recommandé aux candidats de consacrer une partie de leur temps de préparation à s'interroger sur le discours qu'ils tiendront, la stratégie d'exploitation du tableau et d'utilisation de l'outil informatique et le temps qu'ils vont consacrer à chacune des parties de leur plan, ce qui leur permettra de mettre au mieux en valeur leurs connaissances et leur compréhension du texte ou d'une partie de celui-ci. Proposer un exposé structuré et cohérent ne peut s'improviser au moment de l'oral et doit faire l'objet d'une réflexion préalable durant la préparation. Il est conseillé aux candidats de consacrer quelques minutes à la fin de leur préparation à une prise de recul sur leur plan. Le plan est un élément important pour le jury, qui pourra, en s'y référant, aider les candidats dans leur gestion du temps de l'exposé, notamment en leur rappelant, si ce n'est fait avant les dernières minutes, que l'illustration informatique doit être présentée au cours de la présentation et non pendant le temps d'échange.

2.1.3 Oral

Au début de l'interrogation, le jury rappelle les modalités de l'épreuve, puis invite les candidats à vérifier que les fichiers qu'ils ont créés lors de la préparation ont bien été transférés sur la machine servant pour l'épreuve (dont l'environnement est identique à celui de la salle de préparation). L'épreuve est scindée en deux temps : un exposé de 35 minutes suivi de 25 minutes d'échanges avec le jury. Les candidats ont la recommandation de commencer par donner la structure de leur présentation sous forme d'un plan et le déroulement de l'exposé doit être en cohérence avec cette structure. Grâce à ce plan, le jury pourra ainsi avoir une vision globale de l'exposé et aider, si besoin, les candidats à gérer leur temps. Comme les candidats se le voient rappeler en début d'épreuve, l'exposé doit être accessible à un public qui découvre les problématiques du texte et doit permettre d'en faire comprendre les enjeux à un public qui ne le connaîtrait pas. Le jury, tout en étant conscient des difficultés du concours, attend un minimum d'aisance au tableau, la manifestation d'une certaine volonté de capter l'attention de l'auditoire et un discours clair et précis.

L'exercice de l'exposé en temps limité nécessite un certain entraînement. Il est malheureusement fréquent de voir des exposés un peu trop lents pendant les 20 à 25 premières minutes qui accélerent brutalement dans les 10 dernières minutes et que les candidats peinent à conclure dans le temps imparti. Par ailleurs, si le jury sanctionne un exposé significativement trop bref, la démarche consistant à « jouer la montre » est encore plus sévèrement pénalisée.

Durant l'exposé, les candidats disposent de leurs notes, d'un tableau et d'un ordinateur. Ils peuvent alterner, quand bon leur semble, entre un exposé oral, quelques éléments rédigés au tableau de façon propre et lisible et la présentation de ce qui a été préparé à l'aide de l'outil informatique. Les candidats doivent gérer correctement le tableau et demander, si besoin, au jury les parties qu'ils peuvent effacer, le jury pouvant souhaiter conserver certains passages et y revenir lors des échanges avec les candidats. Le jury n'est pas censé connaître le texte présenté par le candidat, mais chaque membre dispose néanmoins d'un exemplaire papier, afin que les candidats puissent y faire référence pour éviter de recopier les notations, les énoncés complets ou certaines formules. Même si les programmes ne fonctionnent pas comme ils l'auraient souhaité ou si les simulations numériques n'ont pas abouti, les candidats sont invités à expliquer ce qu'ils voulaient mettre en œuvre, illustrer ou programmer. Si, lors de la phase d'exposé, les candidats n'ont pas du tout utilisé l'ordinateur dix minutes avant la fin du temps qui leur est imparti, le jury les en alertera.

Il n'y a pas de « format type » pour cette épreuve. Sur un même texte, des prestations très différentes, tant dans leur forme que dans leur contenu, peuvent conduire également à des notes élevées. Comme dans tout oral, la construction de l'exposé doit être une préoccupation importante des candidats. Une réflexion s'impose afin de produire un tout cohérent et intelligible par un public qui, dans l'esprit de l'épreuve, découvre le texte à travers l'exposé des candidats. Une brève introduction à la problématique avant de s'engager dans une longue digression (succession de définitions, théorèmes,...) sans lien avec le problème de départ ne peut conduire à une prestation jugée comme satisfaisante et sera sanctionné par le jury.

De même, un exposé se réduisant à la présentation de la problématique du texte et à des illustrations informatiques, ou à l'énumération linéaire des pistes de réflexion proposées par le texte, sans contribution des candidats, ne peut conduire au mieux qu'à un résultat médiocre. Un texte traité de façon partielle mais substantielle et en profondeur peut au contraire donner une note élevée. Plutôt qu'un survol superficiel de l'intégralité du texte sans apport mathématique / informatique ou critique scientifique, les candidats doivent préférer une discussion fouillée d'une portion du texte, bâtie sur des arguments mathématiques / informatiques solides, des simulations pertinentes accompagnées de commentaires de bon aloi. Néanmoins, dans l'ensemble, les candidats semblent avoir perçu la nécessité d'utiliser, au mieux, le temps qui leur est dédié. Le jury apprécie de voir de plus en plus de candidats qui se sont approprié le texte et en donnent une présentation pertinente et autre qu'une paraphrase linéaire.

Pour enrichir leur propos, les candidats sont invités à mobiliser leurs connaissances sur des aspects variés du programme, en étayant les arguments seulement esquissés dans le texte par des énoncés précis. Il est totalement illusoire de chercher à impressionner le jury par une logorrhée de mots savants : les textes proposés peuvent être discutés en exploitant un bagage technique qui n'utilise pas les éléments les plus sophistiqués du programme. En particulier, le jury ne manque pas de s'attarder sur toute notion amenée par les candidats durant leur présentation et il est toujours dommageable de s'aventurer sur des terrains méconnus. Bien plus qu'une démonstration de virtuosité technique, le jury attend que les candidats montrent leur maîtrise d'énoncés relativement simples « en situation » : c'est là que réside une des difficultés principales de l'épreuve. Nombre de candidats peinent à formaliser précisément des notions de base du programme ou à mettre en œuvre certaines de leurs connaissances. De plus, même si le jury ne se formalise pas de petites erreurs de calcul lors des questions, il apprécie particulièrement que, lors de l'exposé, les résultats présentés soient justes.

A contrario, utiliser une portion excessive du temps de parole pour recycler un chapitre de cours ou un développement d'une leçon d'Analyse et Probabilités, d'Algèbre et Géométrie ou d'Informatique, en s'éloignant des enjeux du texte, est considéré comme un hors sujet et est sévèrement sanctionné. La paraphrase pure et simple d'amples portions du texte ne constitue en aucun cas un exposé satisfaisant. Les textes fournissent souvent des esquisses de démonstrations qui sont précisément destinées à être complétées et commentées. Les candidats ne doivent pas se contenter de ces esquisses de démonstration. S'ils en font mention, le jury s'assurera que les candidats ont compris en profondeur et qu'ils maîtrisent la démonstration dans sa totalité.

Le jury est sensible à l'honnêteté du discours. Tenter de faire semblant de connaître une notion ou d'avoir compris un point du texte ou une démonstration ou utiliser un extrait du texte comme argument d'autorité sont pénalisés. Un regard critique (« il faudrait prouver que... mais je n'ai pas réussi à le faire », « les hypothèses du théorème de XXX que je connais pour aborder des problèmes similaires ne sont pas satisfaites dans le cas présent »...) est une attitude bien plus payante.

Les candidats sont libres de la gestion de leur exposé ; ils sont encouragés à réfléchir à l'organisation qu'ils vont adopter et qui peut constituer une réelle plus-value. Des formats très différents de prestation ont été valorisés : certains s'éloignant du découpage opéré par le texte et arrangeant les éléments autrement ; d'autres présentant un survol du problème, de la méthode et des résultats obtenus avant de détailler des aspects plus mathématiques ; d'autres au contraire suivant de près la progression du texte mais en y apportant les éclairages et les illustrations nécessaires. De bons exposés ont parfois choisi d'aller loin dans le texte pour en décrire la dynamique globale et l'aboutissement (quitte à ne pas traiter toutes les démonstrations) ; d'autres exposés, tout aussi bons, ont traité un passage plus limité du texte mais de manière détaillée et en fournissant tous les arguments pertinents. L'essentiel est d'*éviter la paraphrase sans plus-value mathématique*. En particulier, *de nombreuses affirmations des textes ne sont pas justifiées et le jury s'attend à ce que le candidat les identifie pendant sa préparation et fournisse les explications manquantes* (ou, à défaut, des pistes). A titre d'exemple, si une preuve très détaillée du texte omet délibérément un point important, le jury déplorera que cette preuve soit intégralement recopiée sans que le point en question ne soit même relevé. Au contraire, le jury valorisera les « lacunes » que le candidat aura repérées et comblées par lui-même. En début d'épreuve, le jury rappelle qu'il a le texte sous les yeux. Ainsi, la réécriture à l'identique et au tableau de longs passages du texte ne présente qu'un intérêt très limité si elle n'est pas accompagnée d'apports du candidat.

2.1.4 Echanges avec le jury

Durant 25 minutes, le jury revient sur certains propos des candidats qui méritent précision. Il peut demander un énoncé précis de théorèmes utilisés pour démontrer une assertion ou des éléments de démonstration d'un théorème énoncé par les candidats.

Les échanges peuvent également porter sur la modélisation, les illustrations informatiques ou la programmation pour l'option D.

2.2 Recommandations du jury, communes aux options A, B, C

Le jury tient à souligner les attentes partagées entre les trois options A (Probabilités et Statistiques), B (Calcul scientifique) et C (Algèbre et Calcul formel).

Le jury regrette de ne pas voir davantage de dessins (soignés) ou schémas explicatifs qui peuvent rendre l'argumentation plus claire et convaincante. La capacité à revenir sur le problème de départ et à conclure quant à l'efficacité de l'approche mathématique proposée pour y répondre est une qualité très appréciée. La rigueur et la clarté de l'organisation, la gestion du temps, la pertinence des choix opérés parmi les différentes questions soulevées par le texte sont des éléments de l'évaluation. Les qualités de synthèse sont aussi appelées à s'exprimer : il vaut mieux indiquer les étapes cruciales d'un raisonnement que de se lancer dans un long calcul fastidieux qu'on aura du mal à mener à bien et à mettre en valeur. Les candidats doivent être attentifs au fait que les arguments présents dans les textes, notamment au cours des démonstrations, peuvent être partiels. Il est très important que les affirmations des candidats soient étayées et que les preuves exposées soient entièrement reprises et *complètes*. L'évaluation repose pour une grande part sur la capacité des candidats à identifier les lacunes et ellipses volontaires des textes. Enfin, l'aspect pédagogique de l'exposé, même si le texte n'est restitué que partiellement mènera à une note bien plus élevée qu'un catalogue de type paraphrase.

Illustration informatique

Le jury rappelle son fort attachement à cet aspect de l'épreuve, dont les ambitions sont clairement délimitées. Il ne s'agit en aucun cas, et pour aucune des trois options, d'un exercice de programmation. L'objectif est d'être capable d'utiliser l'outil informatique pour illustrer, de façon pertinente, le contenu du texte. Il ne s'agit pas d'éblouir le jury par une virtuosité en programmation, au détriment d'un temps raisonnable accord'e à la discussion et l'analyse du modèle.

La réalisation de cet objectif constitue une part incompressible de la note finale attribuée à l'épreuve. Une très bonne évaluation peut résulter d'une exploitation judicieuse de programmes simples, reposant largement sur les routines standards des logiciels fournis. La forme et la nature des illustrations proposées n'obéissent à aucun format préétabli. En revanche, elles doivent faire la preuve d'une véritable réflexion scientifique et être agrémentées de commentaires, sur les résultats et les méthodes. Une analyse sommaire de la complexité des algorithmes est attendue. Une analyse de l'ordre numérique des méthodes, notamment à l'aide de régressions linéaires, peut être demandée aux candidats. Les illustrations informatiques devraient plus souvent permettre de faire un retour sur la problématique du texte et il convient de commenter les résultats obtenus dans le cadre du modèle proposé par le texte. Des illustrations peuvent mettre en valeur les limites du modèle étudié et le jury apprécie particulièrement que les candidats aient un regarde critique sur le texte et ne prennent pas celui-ci pour vérité absolue.

Si un bel effort est produit par la majorité des candidats, un nombre très limité d'entre eux rechignent encore à toucher à l'outil informatique. Cette stratégie, dont on pourrait naïvement penser qu'elle permet de consacrer plus de temps à l'analyse du texte et à la préparation de l'exposé oral, est fortement sanctionnée.

Il est important de se rappeler qu'il s'agit d'une illustration. Les candidats peuvent choisir de présenter leur code, s'ils le souhaitent, mais ils doivent réfléchir à en extraire les points clés ; une présentation exhaustive et linéaire est préjudiciable à l'exposé, car elle risque d'empiéter sur le temps à consacrer à la restitution du texte. Cependant, le jury peut demander des précisions sur un point du code. Dans le cas d'une représentation graphique, il est important de préciser, au moins oralement, ce qui est représenté en abscisses et ordonnées.

Pour finir, le jury est tout à fait conscient de la difficulté de de l'utilisation de l'outil informatique en temps limité et en situation de stress. Il reste bienveillant face aux candidats dont les illustrations informatiques n'ont pas abouti au résultat souhaité. Dans une telle situation les candidats sont encouragés à expliquer ce qu'ils ont fait et quel type de résultats ils espéraient obtenir. Le jury sait prendre en compte dans sa notation la démarche suivie lorsqu'elle est clairement argumentée et permettrait, avec des aménagements mineurs, de mettre en évidence des aspects intéressants du texte.

Liens avec les épreuves d'Analyse-Probabilités et Algèbre-Géométrie

Les candidats ne doivent pas hésiter à s'appuyer sur leurs connaissances spécifiques pour proposer des développements originaux dans les leçons d'Analyse et Probabilités ou d'Algèbre et Géométrie. Par exemple,

A. les candidats de l'option A peuvent nourrir leurs leçons de thèmes et d'exemples probabilistes (la fonction caractéristique d'une variable aléatoire est une transformée de Fourier, le produit de convolution a un sens probabiliste, les espaces L^p d'une mesure de probabilité sont intéressants, l'étude de certaines séries aléatoires est possible, la fonction de répartition est une fonction monotone digne d'intérêt, le calcul intégral est en lien étroit avec les probabilités,...).

B. les candidats de l'option B peuvent centrer leur propos sur des problématiques motivées par les préoccupations du calcul scientifique (approximation de solutions d'équations linéaires ou non linéaires, d'équations différentielles, convergence d'algorithmes, analyse matricielle, calcul effectif d'exponentielle de matrice,...).

C. les candidats de l'option C peuvent s'appuyer sur leurs connaissances spécifiques en algèbre effective. En revanche, comme rappelé plus haut, l'exposé oral en modélisation ne doit pas donner lieu au recyclage d'un développement de leçon du fait que le texte parle d'un sujet similaire.