

Si $Z(\omega) \subset [a, b]$ abs la loi de Z est déterminée par ses moments.

Si la loi de Z est déterminée par ses moments et si $\forall n \in \mathbb{N}, E(Z^n) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} E(Z^m)$ alors $Z_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} Z$

Si $Z(\omega)$ fini et $\subset \mathbb{C}$, la fonction génératrice $G_Z(t) = E(t^Z) \in \mathbb{R}[t]$ détermine la loi de Z .

c) Etude asymptotique : méthode de Laplace

Prop : si $g \in \mathcal{L}^0, h \in \mathcal{L}^2, \int_a^b |g(x)| e^{th(x)} dx < +\infty$ et si h' ne change de signe qu'en un seul $c \in]a, b[$ où h atteint un maximum avec $g(c) \neq 0, h''(c) < 0$ alors

$$\int_a^b g(x) e^{th(x)} dx \sim \int_{t \rightarrow +\infty} g(c) e^{th(c)} \sqrt{\frac{2\pi}{-t h''(c)}}$$

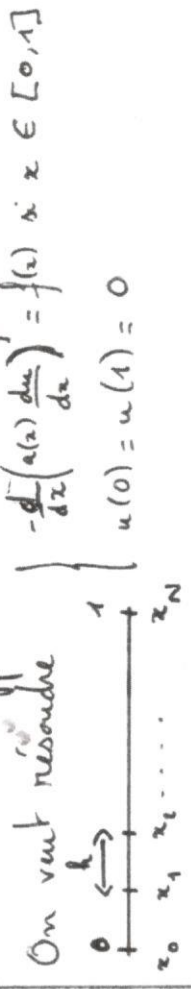
3) Résolution d'équations différentielles / intégrales

a) Résolution exacte

Recherche de solutions particulières polynomiales
Des polynômes orthogonaux classiques sont vecteurs propres opérateurs de Sturm-Liouville du type $Q(x) \frac{d^2}{dx^2} + L(x) \frac{d}{dx}$ vérifiant des équations $Q(x) P_n'' + L(x) P_n' + \lambda_n P_n = 0$

- Les polynômes de Hermite H_n orthogonaux dans $L^2(e^{-x^2} dx)$ donnent les fonctions $h_n(t) = H_n(t) e^{-t^2/2}$ qui sont vecteurs propres de la transformée de Fourier : $\hat{h}_n = \sqrt{2\pi} (-i)^n h_n$

b) Résolution approchée : éléments finis.



On cherche une approximation $u_h \in V_h$ où V_h est l'espace vectoriel

$$V_h = \{ \varphi \in \mathcal{C}^0([0, 1]) \mid \varphi(0) = \varphi(1) = 0; \forall i, \varphi|_{(x_i, x_{i+1})} \in \mathbb{R}_n[x] \}$$

telle que $\int_0^1 a(x) u_h'(x) v_h'(x) dx = \int_0^1 f(x) v_h'(x) dx$ ($\forall v_h \in V_h$)

Ceci équivaut au système $A_h U_h = b_h$ de taille $N-1 = \dim V_h$.

On peut montrer : $\exists C > 0, \|u_h - u\|_\infty \leq C \cdot h$

(on pourrait raffiner en remplaçant $\mathbb{R}_1[x]$ par $\mathbb{R}_2[x]$).

Développement 1 : densité des fonctions polynomiales dans $\mathcal{C}([a, b])$ pour $\| \cdot \|_\infty$, preuve par convolution. Existence d'une fonction continue vers laquelle ses polynômes d'interpolation de Lagrange ne convergent pas (Bernstein - Steinkens).

Développement 2 : méthode d'intégration de Gauss (démonstration de la proposition annoncée et majoration de l'erreur si f est \mathcal{C}^{2m})