Si $Z(\Omega) \subset [a,b]$ alors la loi de Z est déterminée par ses moments.

Si la loi de Z est déterminée par ses moments et si $\forall n \in \mathbb{N}$, $E(Z_k^n) \xrightarrow[k \to +\infty]{} E(Z^n)$ alors $Z_k \xrightarrow[k \to +\infty]{\text{loi}} Z$

Si $Z(\Omega)$ fini et $\subset \mathbb{N}$, la fonction génératrice $G_Z(t) = E(t^Z) \in \mathbb{R}[t]$ détermine la loi de Z.

c) Etude asymptotique : méthode de Laplace

Prop : si g $\mathcal{C}^0$, h $\mathcal{C}^2$, $\int_a^b |g(x)| e^{th(x)} dx < +\infty$ et si h' ne change de signe qu'en un seul $c \in]a,b[$ où h atteint un maximum avec $g(c) \neq 0$, $h''(c) < 0$ alors

$$\int_a^b g(x) e^{th(x)} dx \underset{t \to +\infty}{\sim} g(c) e^{th(c)} \sqrt{\frac{2\pi}{-t h''(c)}}$$

3) Résolution d'équations différentielles / intégrales

a) Résolution exacte

Recherche de solutions particulières polynomiales

Des polynômes orthogonaux classiques sont vecteurs propres opérateurs de Sturm-Liouville du type $Q(x) \frac{d^2}{dx^2} + L(x) \frac{d}{dx}$ vérifient des équations $Q(x) P_n'' + L(x) P_n' + \lambda_n P_n = 0$

- Les polynôme de Hermite H_n (orthogonaux dans $L^2(e^{-x^2}dx)$) donnent les fonctions $h_n(t) = H_n(t) e^{-t^2/2}$ qui sont vecteurs propres de la transformée de Fourier : $\hat{h}_n = \sqrt{2\pi}(-i)^n h_n$

b) Résolution approchée : éléments finis

On veut résoudre $\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{du}{dx}\right) = f(x) \text{ si } x \in [0,1] \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$

$0 \quad \overset{h}{\longleftrightarrow} \quad 1$

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_N$

On cherche une approximation $u_h \in V_h$ où V_h est l'espace vectoriel $V_h = \{ \varphi \in \mathcal{C}^0([0,1]) \mid \varphi(0) = \varphi(1) = 0 ;\ \forall i,\ \varphi_{|[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{R}_1[X] \}$ telle que $\int_0^1 a(x) u_h'(x) v_h'(x) dx = \int_0^1 f(x) v_h(x) dx \quad (\forall v_h \in V_h)$

Ceci équivaut au système $A_h U_h = b_h$ de taille $N-1 = \dim V_h$

On peut prouver : $\exists C > 0$, $\|u_h - u\|_\infty \leq C.h$

(on pourrait raffiner en remplaçant $\mathbb{R}_1[X]$ par $\mathbb{R}_2[X]$).

Développement 1 : densité des fonctions polynomiales dans $\mathcal{C}([a,b])$ pour $\|.\|_\infty$, preuve par convolution. Existence d'une fonction continue vers laquelle ses polynômes d'interpolation de Lagrange ne convergent pas (Banach - Steinhaus).

Développement 2 : méthode d'intégration de Gauss (démonstration de la proposition annoncée et majoration de l'erreur si f est $\mathcal{C}^{2n}$)