b) Outil : formule de Taylor-Young

Si $f^{(n)}(a)$ existe, $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{i=0}^{n} \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(a) + o(h^n)$

Applications : extrêma, points d'inflexion, position par rapport à une tangente.

c) Généralisation à plusieurs variables : f est n-fois différentiable (à valeurs dans un Banach)

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} d^i f(a)(\underbrace{h,\dots,h}_{i \text{ termes}}) + o(\|h\|^n)$$

III) Pourquoi remplacer f par P : quelques exemples d'applications.

1) Polynômes orthogonaux

a) Produit scalaire $\langle\, , \rangle$ sur un espace contenant $\mathbb{R}[X]$

- Algorithme de Gram-Schmidt sur (X^n) : (P_n) orthonormale échelonnée en degré.

b) Si $\mathbb{R}[X]$ est dense pour la norme issue de $\langle .,. \rangle$ alors (P_n) est une base hilbertienne.

Exemple : $L^2(\omega(x)\,dx)$ où $\exists a>0$, $\int e^{a|x|}\omega(x)dx < +\infty$

c) Cas particulier : $L^2(dP)$ où dP est une probabilité

ex : polynômes de Hermite si $dP(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$

2) Etude et calculs d'intégrales

a) Calcul approché d'intégrales

- Newton-Cotes composite : $f \in \mathcal{C}^{m+1}([a,b])$

$a_i = a + i\frac{b-a}{n}$ $(0\leq i\leq n)$; P_i = le polynôme interpolateur de $\mathbb{R}_m[X]$ de f sur la subdivision régulière à $m+1$ points de $[a_i, a_{i+1}]$. Alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} P_i(t)\,dt + O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right) \quad (n \to +\infty)$$

(si $m=1$, méthode des trapèzes)

- Méthode de Gauss : $\exists ! (x_1,\dots,x_n,\omega_1,\dots,\omega_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ t. $x_1 \leq \dots \leq x_n$ et $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, $\int_a^b P(x)\omega(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \omega_i P(x_i)$

($x_1,\dots,x_n$ sont les racines du $n^{\text{ième}}$ polynôme orthogonal associé au poids $\omega(x)$).

b) Intégrale contre une probabilité : moments et fonction génératrice

- $m_n(Z) = \int_\Omega Z^n(\omega)\,dP(\omega) = E(Z^n)$: $n^{\text{ième}}$ moment.

La loi de Z est dite déterminée par ses moments si $\forall Z'$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $m_n(Z) = m_n(Z') \Rightarrow \text{loi}(Z) = \text{loi}(Z')$