Utilisation des polynômes en analyse

Objectif : remplacer une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ sur un ensemble E

I Pourquoi remplacer f par P ?

1) **Avantages algébriques** : $\mathbb{R}[X]$ est une algèbre, stable par composition, base $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$, degré, division euclidienne, $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$

2) **Avantages analytiques** : $\mathbb{R}[X] \subset \mathcal{C}^\infty$, $\mathbb{R}[X]$ stable par dérivation, $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est hiérarchisée pour la négligeabilité en 0 et ∞

II) Comment remplacer f par P ?

1) Sur E fini ; "$f = P$" : interpolation

a) **Théorème** : soient $a_1, \dots, a_n$ distincts et f une fonction. Il existe un unique polynôme $P_f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ t.q. $\forall 1 \leq i \leq n, P_f(a_i) = f(a_i)$ et $P_f = \sum_{i=1}^{n} f(a_i) L_i$ où $(L_1, \dots, L_n)$ est la base de Lagrange, duale de $(Q \mapsto Q(a_i))_{1\leq i\leq n}$

b) **Calcul effectif** de P_f par différences divisées

c) **Mesure de l'erreur** $|f - P_f|$ si f est régulière.

d) **Interpolation d'Hermite** : on ajoute des conditions sur les $P^{(k)}(a_i)$

e) **Splines** : interpolation par des polynômes par morceaux.

2) Sur $E = [a,b]$, "$f \simeq P$" : approximation globale

a) **Formules de Taylor**

Reste : $R_n = f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k$

- $f \in \mathcal{C}^n([a,b]) \cap \mathcal{D}^{n+1}(]a,b[)$: $\exists c \in]a,b[$, $R_n = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$
- $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$: $R_n = \frac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$

Application : inégalités de Kolmogorov

b) **Densité** : $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}^0([a,b])$ pour $\|.\|_\infty$

c) **Meilleure approximation polynomiale**.

$f \in \mathcal{C}^0([a,b])$ et n fixés. Il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui minimise $\|f - P\|_\infty$. Il est caractérisé par l'existence de $x_0, \dots, x_{n+1}$ distincts et $\varepsilon = \pm 1$ t.q $\forall i$, $f(x_i) - P(x_i) = \varepsilon(-1)^i \|f-P\|_\infty$

3) Sur $E = [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, "$f \simeq P$" : approximation locale.

a) **Théorie des développements limités** :

$f(x) \underset{x\to a}{=} P(x) + o(x-a)^n$: unicité et opérations licites sur les D.L.