Épreuve de modélisation

Étude d'un texte de l'option C

Jérôme Von Buhren
jerome.von-buhren@ac-strasbourg.fr

Le 24 septembre 2021

Texte publié en 2021

Le texte sera disponible sur le site du jury de l'agrégation externe

https://agreg.org/

dans la rubrique modélisation.

Description du texte

Résumé : Ce texte étudie la détermination de cylindres passant par 4 et 5 points dans l'espace.

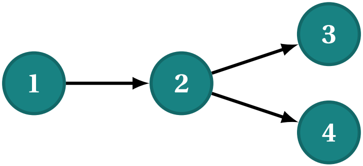
Mots clefs : géométrie, polynômes à plusieurs variables, résultant.

Description du texte

Le texte est composé de quatre parties.

- **1.** Introduction
- **2.** Cylindres passant par quatre points
- **3.** Cylindres passant par cinq points
- **4.** Cylindre de rayon extremum passant par quatre points

La dépendance entre les parties est la suivante.



Description du texte

Remarques :

- La partie 2 est la plus longue : c’est le cœur du texte. Elle repose principalement sur des notions d’algèbre linéaire et de géométrie.
- Les parties 3 et 4 sont indépendantes et plus difficiles : elles n’étaient abordées que par les meilleurs candidats. Le résultant n’est que utilisé dans ces deux parties.

1. Introduction

Dans ce texte, on s'intéresse à la détermination de cylindres qui passent par des points donnés, typiquement un sous-ensemble de points 3D obtenus à l'aide d'un scanner.

Une application simple de ce résultat est par exemple la détermination du rayon d'un objet cylindrique qui n'est que partiellement accessible, ou bien dont on voudrait vérifier le bon usinage avec une grande précision.

2. Cylindre passant par quatre points

Étant donnés 3 points p_1, p_2, p_3 dans l'espace affine réel de dimension 3 et un vecteur non nul $\mathbf{t}$, il existe presque toujours un cylindre de direction $\mathbf{t}$ passant par ces points. En effet, les projetés orthogonaux de ces 3 points sur le plan vectoriel orthogonal à $\mathbf{t}$ sont soit sur un même cercle, qui définit alors la base d'un tel cylindre, soit distincts et alignés. Mais cette dernière situation ne se produit que lorsque les trois points p_1, p_2, p_3 sont distincts et que le vecteur $\mathbf{t}$ est parallèle à un plan passant par p_1, p_2 et p_3. Dans la suite de cette partie, nous nous intéressons donc à la détermination des cylindres passant par quatre points.

Remarques :

- Cette partie est relativement simple : elle permet au candidat de se familiariser avec le problème.
- Il est très pertinent d'utiliser le tableau pour y dessiner une figure représentant la situation.

2. Cylindre passant par quatre points

Soient quatre points p_1, p_2, p_3, p_4 deux à deux distincts et $\mathbf{t} = (l, m, n)$ un vecteur non nul. On cherche à déterminer s'il existe un cylindre de direction $\mathbf{t}$ passant par p_1, p_2, p_3, p_4. Sans perdre en généralité, nous pouvons supposer que

$$p_1 = (0,0,0),\ p_2 = (x_2,0,0),\ p_3 = (x_3,y_3,0),\ p_4 = (x_4,y_4,z_4) \tag{1}$$

Soit Π le plan vectoriel orthogonal au vecteur $\mathbf{t}$ et soit (X, Y, Z) un nouveau système de coordonnées dont les deux premiers axes engendrent Π et le troisième axe est de direction $\mathbf{t}$. En supposant que $(m, n) \neq (0,0)$, on peut faire en sorte que les nouvelles coordonnées (X, Y, Z) d'un point soient données en fonction de celles dans la base canonique par la matrice orthogonale

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{\|\mathbf{t}\|} & -\frac{lm}{\|\mathbf{t}\|\sqrt{m^2+n^2}} & -\frac{ln}{\|\mathbf{t}\|\sqrt{m^2+n^2}} \\ 0 & \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} & -\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}} \\ \frac{l}{\|\mathbf{t}\|} & \frac{m}{\|\mathbf{t}\|} & \frac{n}{\|\mathbf{t}\|} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

2. Cylindre passant par quatre points

Possibilités pour les candidats :

- Expliquer pourquoi l'on peut se ramener à (1).
- Expliquer la construction de la matrice M de (2).

2. Cylindre passant par quatre points

Notons (X_i, Y_i, Z_i) les coordonnées du point p_i dans le système (X, Y, Z). Le projeté orthogonal q_i de p_i sur Π, exprimé dans (X, Y, Z) en fonction des coordonnées (x_i, y_i, z_i) du point p_i dans le système (x, y, z), est donné par

$$\left(x_i \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{\|\mathbf{t}\|} - \frac{lm}{\|\mathbf{t}\|\sqrt{m^2+n^2}} y_i - \frac{ln}{\|\mathbf{t}\|\sqrt{m^2+n^2}} z_i, \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} y_i - \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}} z_i, 0\right). \tag{3}$$

Les points p_1, p_2, p_3, p_4 appartiennent à un même cylindre de direction $\mathbf{t}$ si et seulement si les points q_1, q_2, q_3, q_4 sont cocycliques (dans Π). En supposant que les points p_1, p_2, p_3, p_4 ne sont pas coplanaires, cette dernière condition se traduit par l'égalité

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ X_1^2+Y_1^2 & X_2^2+Y_2^2 & X_3^2+Y_3^2 & X_4^2+Y_4^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

2. Cylindre passant par quatre points

Possibilités pour les candidats :

- Utiliser la matrice de passage de (2) pour calculer (X_i, Y_i, Z_i) en fonction de (x_i, y_i, z_i), puis effectuer la projection sur Π pour obtenir (3).
- Rappeler la propriété : le déterminant est nul si et seulement si les lignes de la matrice sont liées. Conclure en utilisant l'hypothèse que les points p_1, p_2, p_3, p_4 sont supposés non coplanaires.
- Réfléchir à la situation où les points p_1, p_2, p_3, p_4 sont coplanaires.

2. Cylindre passant par quatre points

De tout cela, on déduit que les points p_1, p_2, p_3, p_4, supposés non coplanaires, appartiennent à un même cylindre de direction **t** si et seulement si $C_{p_1,p_2,p_3,p_4}(l,m,n) = 0$ où

$$(5) \quad C_{p_1,p_2,p_3,p_4}(l,m,n) := \\ x_2^2(m^2+n^2)\begin{vmatrix} l & x_3 & x_4 \\ m & y_3 & y_4 \\ n & 0 & z_4 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} m & y_3 & y_4 \\ n & 0 & z_4 \\ 0 & \|\mathbf{t}\|^2\|p_3\|^2-(t.p_3)^2 & \|\mathbf{t}\|^2\|p_4\|^2-(t.p_4)^2 \end{vmatrix}.$$

Cette condition (qui reste valable dans le cas où $(m,n) = (0,0)$) s'exprime donc comme un polynôme de degré 3 en les variables l, m, n. Comme l'on pouvait s'y attendre, c'est un polynôme homogène, c'est-à-dire

$$C_{p_1,p_2,p_3,p_4}(\lambda l, \lambda m, \lambda n) = \lambda^3 C_{p_1,p_2,p_3,p_4}(l,m,n) \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Enfin, remarquons que cette condition est vérifiée pour les six directions particulières qui correspondent aux droites $(p_i p_j)$, $1 \leq i < j \leq 4$.

2. Cylindre passant par quatre points

Possibilités pour les candidats :

- On pouvait s'attendre à obtenir une expression homogène, car $\mathbf{t}$ et $\lambda\mathbf{t}$ décrivent la même direction pour le cylindre.
- Lorsque $(m,n) = (0,0)$, la condition obtenue reste valable, car le vecteur $\mathbf{t} = (l,0,0) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ donne la direction de la droite $(p_1 p_2)$.
- La condition est naturellement vérifiée pour les directions qui correspondent aux droites $(p_i p_j)$, car dans ce cas, les points p_i et p_j ont le même projeté orthogonal sur Π et trois points non alignés dans le plan Π sont cocycliques.
- Illustration informatique : utiliser un logiciel de calcul formel pour calculer une expression de $C_{p_1,p_2,p_3,p_4}(l,m,n)$ sur des exemples.

2. Cylindre passant par quatre points

Exemple 1. *Considérons l'exemple suivant*

$$p_1 = (0,0,0),\ p_2 = (1,0,0),\ p_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right),\ p_4 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

où les quatre points forment un tétraèdre régulier. Alors, il existe un cylindre de direction **t** *passant par ces points si et seulement si*

$$\left(3\,l + \sqrt{3}m - \sqrt{6}n\right)\left(3\,l - \sqrt{3}m + \sqrt{6}n\right)\left(2\,m + \sqrt{2}n\right) = 0.$$

Les directions des cylindres qui passent par ces quatre points s'organisent donc selon les trois plans vectoriels qui contiennent une arête du tétraèdre et qui sont parallèles à l'arête opposée.

2. Cylindre passant par quatre points

Possibilités pour les candidats :

- Expliquer géométriquement pourquoi on s'attend à trouver la réunion de trois plans.
- Illustration informatique : retrouver le polynôme de l'exemple 1 avec un logiciel de calcul formel. Représenter en 3D le tétraèdre et les différents cylindres.

3. Cylindre passant par cinq points

On cherche à présent à déterminer les cylindres passant par cinq points donnés $p_1, \ldots, p_5$ qui sont deux à deux distincts. On conserve les hypothèses (1) sur les coordonnées des points p_1, p_2 et p_3 et on pose $p_4 = (x_4, y_4, z_4)$, $p_5 = (x_5, y_5, z_5)$. D'après l'analyse précédente, il est naturel de considérer le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} C_{p_1,p_2,p_3,p_4}(l,m,n) & = & 0 \\ C_{p_1,p_2,p_3,p_5}(l,m,n) & = & 0. \end{array} \right. \tag{6}$$

Théorème 2. *Par presque tous les choix de cinq points distincts de l'espace affine réel de dimension 3, il passe au plus six cylindres.*

[...]

3. Cylindre passant par cinq points

Possibilités pour les candidats :

- Préciser et expliquer ce que signifie « Par presque tous les choix » dans l'énoncé du théorème 2.
- Illustration informatique : utiliser un logiciel de calcul formel pour vérifier certains passages de la démonstration du théorème 2 (calcul de résultants).
- Expliquer pourquoi les directions $(p_1 p_2)$, $(p_1 p_3)$ et $(p_2 p_3)$ sont des solutions « parasites » du système en général.
- Illustration informatique : utiliser un logiciel de calcul formel pour traiter l'exemple 3.
- Justifier les étapes permettant d'aboutir au système (7).

4. Cylindre de rayon extremum passant par quatre points

Revenons maintenant à la situation présentée dans le paragraphe 2 et intéressons-nous aux cylindres qui passent par quatre points p_1, p_2, p_3 et p_4 et dont le rayon est extremum.

Rappelons tout d'abord que le rayon du cercle circonscrit à un triangle est égal au produit des longueurs de ses côtés divisé par quatre fois l'aire de ce triangle. Le carré du rayon du cylindre de direction $\mathbf{t}$ qui passe par les points p_1, p_2 et p_3 s'obtient donc par la formule

$$(8) \quad \Gamma_{p_1,p_2,p_3}(l,m,n) := \frac{N(l,m,n)}{D(l,m,n)} := \frac{(\|\mathbf{t}\|^2\|p_2\|^2 - (\mathbf{t} \mid p_2)^2)(\|\mathbf{t}\|^2\|p_3\|^2 - (\mathbf{t} \mid p_3)^2)(\|\mathbf{t}\|^2\|p_3 - p_2\|^2 - (\mathbf{t} \mid p_3 - p_2)^2)}{4x_2^2 y_3^2 n^2 \|\mathbf{t}\|^4}$$

en supposant que les projections orthogonales q_1, q_2, q_3 des trois points p_1, p_2, p_3 sur le plan vectoriel Π orthogonal à $\mathbf{t}$ sont situées sur un unique cercle (de rayon le rayon du cylindre). On notera que les polynômes N et D, respectivement numérateur et dénominateur de Γ_{p_1,p_2,p_3}, sont des polynômes homogènes de degré 6 en les variables l, m, n.

[...]

4. Cylindre de rayon extremum passant par quatre points

Possibilités pour les candidats :

- Utiliser les expressions des coordonnées obtenus dans la partie 2 pour justifier (8).
- Expliquer le lien entre les multiplicateurs de Lagrange et la formule (9).
- Illustration informatique : utiliser un logiciel de calcul formel pour traiter l'exemple 4.