

(public 2018 – B6)

Résumé : L'évolution d'une population est décrite par une équation de réaction-diffusion. On étudie l'existence de solutions en ondes progressives puis on propose un schéma de type différences finies semi-implicite en temps pour le calcul d'une solution approchée.

Mots clés : Equations aux dérivées partielles. Equations différentielles ordinaires. Différences finies.

- *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury apprécie qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et mettant en lumière les connaissances, à partir des éléments du texte. Il doit contenir des illustrations informatiques réalisées sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.*

1. Description de l'évolution d'une population

On souhaite décrire l'évolution d'une population que l'on suppose, pour simplifier, répartie sur une droite ou un segment. Cette population se renouvelle grâce à des naissances et des décès et est soumise à un phénomène de migration. La taille de la population au point $x \in \mathbb{R}$ et à l'instant $t \geq 0$ est donnée par $u(x, t)$.

On omet provisoirement les variations en espace et l'on note encore $u(t)$ la taille de la population en fonction du temps. Si l'on suppose que le nombre de naissances, comme le nombre de décès, est proportionnel à la taille de la population avec un taux fixe, on obtient que $u(t)$ doit vérifier

$$(1) \quad \frac{du(t)}{dt} = \alpha u(t),$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha > 0$, cela implique que la taille de la population croît exponentiellement vite. Il semble plus réaliste d'envisager que les taux de natalité et de mortalité dépendent de la taille de la population. En effet, plus la taille de la population augmente, plus son taux de natalité diminue et son taux de mortalité augmente. On peut alors proposer de remplacer le modèle (1) par le modèle suivant :

$$(2) \quad \frac{du(t)}{dt} = \alpha u(t) \left(1 - \frac{u(t)}{\kappa} \right),$$

avec α et κ deux réels strictement positifs. Dans ce cas, on peut trouver explicitement la solution du problème avec condition initiale $u(t = 0) = u_0$. Si $u_0 \in]0, \kappa[$, cette solution est

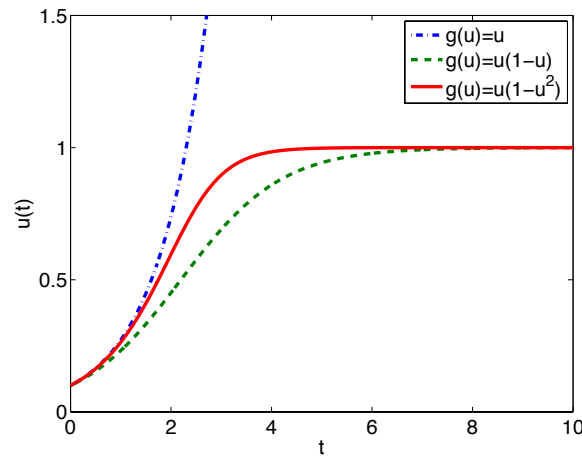


FIGURE 1. Solutions de $\frac{du(t)}{dt} = g(u(t))$ avec $u(0) = 0.1$ pour les fonctions $g(u) = u$, $g(u) = u(1 - u)$, $g(u) = u(1 - u^2)$.

définie pour tout t , est strictement positive et tend vers κ quand t tend vers $+\infty$. La taille de la population reste donc bien finie. On notera que le modèle :

$$(3) \quad \frac{du(t)}{dt} = \alpha u(t) \left(1 - \frac{u(t)^2}{\kappa^2}\right)$$

garantit le même type de comportement. On représente sur la figure 1 les solutions obtenues pour les modèles (1), (2) et (3) avec une même condition initiale. Les paramètres α et κ ont été pris égaux à 1 et on garde cette hypothèse simplificatrice dans la suite du texte.

On souhaite maintenant prendre en compte la variation spatiale de la population $u(x, t)$. Cette variation est due à des phénomènes migratoires. On modélise ce mouvement de population dans l'espace par une loi de diffusion et on superpose cet effet à l'évolution en temps due aux naissances et aux décès. Cela conduit à considérer l'équation suivante pour u :

$$(4) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = v \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + g(u(x, t)),$$

où v est le coefficient de diffusion et où la fonction g peut être égale à $g(u) = u(1 - u)$ ou $g(u) = u(1 - u^2)$. La taille de la population à l'instant initial est donnée par

$$(5) \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

On pourra considérer dans la suite que la population vit sur l'espace non borné \mathbb{R} , ce qui est peu réaliste, ou sur un espace borné de la forme $[-L, L]$. Dans ce cas, on supposera que la population est isolée, ce qui signifie qu'il n'y a pas de flux migratoires aux bornes de l'intervalle :

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(-L, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0.$$

2. Existence de solutions en ondes progressives

Dans cette partie, on suppose que l'espace n'est pas borné et l'on considère le modèle (4) avec $v = 1$ et $g(u) = u(1 - u^2)$. On notera le modèle correspondant (F). L'objectif est de déterminer des solutions explicites du problème.

Pour cela, on cherche des solutions dites en ondes progressives : $u(x, t) = U(\xi)$ avec $\xi = c(x - \lambda t)$, avec c et λ deux constantes réelles non nulles pour que la solution soit effectivement propagative. Une procédure pour la recherche de telles solutions peut formellement s'établir comme suit :

i) On exprime les opérateurs de dérivation en t et x en fonction de la dérivée par rapport à ξ (c'est-à-dire $\frac{\partial}{\partial t} = -c\lambda \frac{d}{d\xi}$). Dans le cas de (F), on obtient

$$(7) \quad c\lambda \frac{dU(\xi)}{d\xi} + c^2 \frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2} + U(\xi) - U^3(\xi) = 0.$$

ii) En introduisant la nouvelle variable $Y = \tanh(\xi)$, on effectue le changement de variable $U(\xi) = S(Y)$ dans (7). On peut exprimer formellement les dérivées premières et secondes par rapport à ξ en fonction des dérivées premières et secondes par rapport à Y .

iii) On cherche ensuite $U(\xi) = S(Y)$ sous la forme d'un polynôme en $Y = \tanh(\xi)$, selon $S(Y) = \sum_{k=0}^M a_k Y^k$. En substituant, on obtient l'équation suivante pour $S(Y)$:

$$(8) \quad c\lambda(1 - Y^2) \frac{dS}{dY} + c^2(1 - Y^2) \left(-2Y \frac{dS}{dY} + (1 - Y^2) \frac{d^2S}{dY^2} \right) + S - S^3 = 0.$$

En examinant les termes de plus haut degré dans (8), on obtient la contrainte pour M : $3M = 2 + 2 + M - 2$, soit $M = 1$. Et donc $S(Y) = a_0 + a_1 Y$.

iv) En substituant $S(Y) = a_0 + a_1 Y$, $S'(Y) = a_1$ et $S''(Y) = 0$ dans (8), on obtient un système d'équations algébriques pour a_0 , a_1 , c et λ . En annulant chacun des coefficients en facteur respectivement de Y^3 , Y^2 , Y^1 et Y^0 , on trouve

$$(9) \quad 2a_1 c^2 - a_1^3 = 0, \quad -a_1 c \lambda - 3a_0 a_1^2 = 0,$$

$$(10) \quad -2a_1 c^2 + a_1 - 3a_0^2 a_1 = 0, \quad a_1 c \lambda + a_0 - a_0^3 = 0.$$

Par substitution, on peut obtenir des solutions de (9)–(10). On cherche des solutions telles que $a_1 \neq 0$ et $c \neq 0$. Un exemple de telles solutions est donné par

$$(11) \quad a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{1}{2}, \quad \lambda = \frac{-3}{\sqrt{2}}, \quad c = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

valeurs qui conduisent à

$$(12) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x + \frac{3}{\sqrt{2}}t\right)\right).$$

3. Approximation par un schéma numérique

Soit $L \neq 0$ et $T > 0$. On s'intéresse maintenant à l'approximation numérique du problème (4)–(5)–(6) posé sur $[-L, L] \times [0, T]$. Pour cela, on se donne une subdivision $(x_j)_{1 \leq j \leq J}$ de l'intervalle $[-L, L]$: $x_j = -L + (j-1)h$ pour $1 \leq j \leq J$, avec $h = \frac{2L}{J-1}$. Notons également τ le pas de temps et $t_n = n\tau$ pour $1 \leq n \leq N$, avec $N\tau = T$.

Le schéma que l'on propose d'étudier est un schéma semi-implicite : le terme de diffusion est approché de manière implicite tandis que le terme non linéaire d'évolution est approché de manière explicite. Le schéma est le suivant :

$$(13) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \nu \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + g(u_j^n), \quad \forall 1 \leq j \leq J, \forall 0 \leq n \leq N-1,$$

$$(14) \quad u_0^{n+1} = u_1^{n+1}, \quad u_{j+1}^{n+1} = u_j^{n+1}, \quad \forall 0 \leq n \leq N-1,$$

$$(15) \quad u_j^0 = u_0(x_j), \quad \forall 1 \leq j \leq J.$$

À chaque pas de temps n , le schéma (13)–(14) s'écrit comme un système linéaire de vecteur inconnu $U^{n+1} = (u_j^{n+1})_{1 \leq j \leq J}$:

$$(16) \quad \mathbb{M}U^{n+1} = U^n + \tau G^n,$$

avec $G^n = (g(u_j^n))_{1 \leq j \leq J}$ (on notera qu'on a multiplié (13) par τ pour l'écrire le système linéaire sous la forme (16)).

Proposition 1. *La matrice \mathbb{M} du schéma numérique est symétrique définie positive.*

Le point essentiel de la démonstration consiste à établir que

$$(17) \quad {}^t V \mathbb{M} V = \sum_{j=1}^J v_j^2 + \frac{\tau \nu}{h^2} \sum_{j=1}^{J-1} (v_{j+1} - v_j)^2, \quad \forall V = (v_j)_{1 \leq j \leq J} \in \mathbb{R}^J.$$

La proposition 1 garantit l'existence et l'unicité d'une solution au schéma numérique à chaque pas de temps.

Proposition 2. *Soit $B = (b_j)_{1 \leq j \leq J} \in \mathbb{R}^J$. Si $b_j \geq 0$ pour tout $1 \leq j \leq J$, alors la solution $V = (v_j)_{1 \leq j \leq J}$ du système linéaire $\mathbb{M}V = B$ vérifie $v_j \geq 0$ pour tout $1 \leq j \leq J$.*

Pour montrer la proposition 2, on peut par exemple utiliser la fonction $s \mapsto s^- = \min(s, 0)$ (fonction croissante sur \mathbb{R}) et associer à $V \in \mathbb{R}^J$ le vecteur $V^- = ((v_j)^-)_{1 \leq j \leq J}$. On a :

$$(18) \quad {}^t (V^-) \mathbb{M} V = \sum_{j=1}^J (v_j^-)^2 + \frac{\tau \nu}{h^2} \sum_{j=1}^{J-1} (v_{j+1}^- - v_j^-)(v_{j+1} - v_j) \geq 0, \quad \forall V \in \mathbb{R}^J.$$

Or, si V est solution de $\mathbb{M}V = B$ avec B à composantes positives, ${}^t (V^-) \mathbb{M} V = {}^t (V^-) B$ est également négatif ou nul. On en déduit que ${}^t (V^-) \mathbb{M} V = 0$ et que $V^- = 0$.

Proposition 3. *Soit u_0 une fonction continue sur $[-L, L]$ à valeurs dans $[0, 1]$. Soit g une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, qui s'annule en 0 et en 1 et qui est positive sur $[0, 1]$. On note*

$\mathcal{G} = \max_{[0,1]} |g'|$. Si le pas de temps vérifie $\tau \mathcal{G} \leq 1$, la solution du schéma numérique (13)–(14)–(15) vérifie

$$(19) \quad 0 \leq u_j^n \leq 1, \quad \forall 1 \leq j \leq J, \quad \forall 0 \leq n \leq N.$$

Cette proposition se démontre par récurrence sur n . Si U^n est un vecteur à coefficients positifs et majorés par 1, on vérifie que $\mathbb{M}U^{n+1}$ et $\mathbb{M}(\mathbf{1} - U^{n+1})$ (où $\mathbf{1}$ est le vecteur de \mathbb{R}^J dont tous les coefficients sont égaux à 1) sont des vecteurs à coefficients positifs.

4. Simulations numériques

Dans les simulations, on prend $L = 40$ et on fixe le coefficient de diffusion $\nu = 1$. Les paramètres numériques sont $J = 50$ et $\tau = 0.01$.

On considère tout d'abord le cas où $g(u) = u(1 - u^2)$ et on prend comme condition initiale $u_0(x) = u(x, 0)$ où u est l'onde progressive donnée par (12). Le domaine étant assez grand, on peut comparer la solution donnée par le schéma numérique avec l'onde progressive à différents instants. Les résultats sont présentés sur la figure 2.

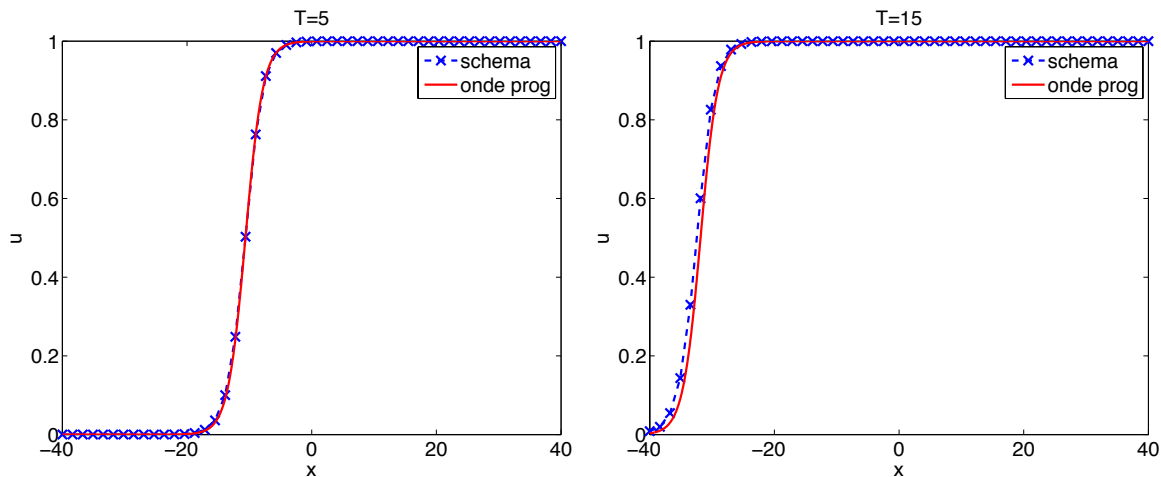


FIGURE 2. Comparaison de la solution en onde progressive et de la solution donnée par le schéma numérique à $T = 5$ et $T = 15$.

On choisit ensuite une condition initiale localisée près de 0 :

$$(20) \quad u_0(x) = \begin{cases} 0.8 \cos\left(\frac{\pi x}{20}\right) & \text{si } |x| \leq 10, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On présente sur la figure 3 les solutions données par le schéma numérique à différents instants pour $g(u) = u(1 - u)$ et $g(u) = u(1 - u^2)$. On constate un comportement similaire avec les deux modèles. Par ailleurs, ces simulations numériques montrent que la population gagne tout l'espace et tend vers la valeur maximale accessible : 1.

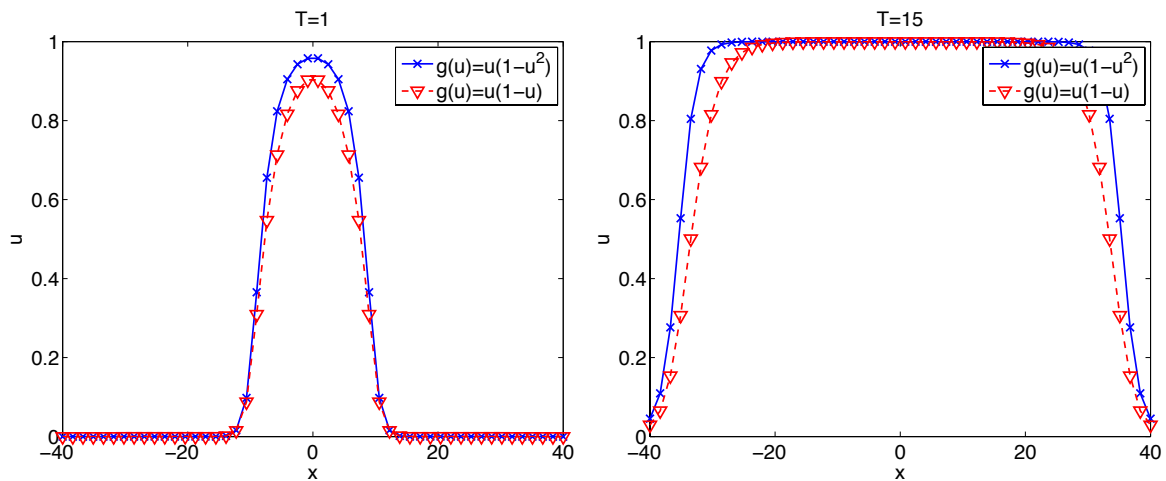


FIGURE 3. Comparaison des solutions données par le schéma numérique pour deux valeurs de g , aux instants $T = 1$ et $T = 15$.

Suggestions et pistes de réflexion

- *Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives et il n'est pas obligatoire de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier, ou non, certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos illustrations informatiques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en œuvre.*
 - Préciser la modélisation (en particulier, l'obtention de (4)).
 - Justifier l'existence et unicité de la solution de (2) ou (3) avec condition initiale u_0 . On pourra également justifier le comportement qualitatif mis en évidence par la figure 1.
 - Préciser les étapes et hypothèses du calcul permettant d'obtenir l'expression (12). On pourra également donner d'autres solutions du système (9)–(10).
 - Justifier le schéma numérique proposé (13)–(14)–(15).
 - Détailler la démonstration des propositions 1 et 2.
 - Démontrer la proposition 3.