

(public 2018 – B5)

Résumé : On étudie diverses stratégies permettant à un investisseur d'optimiser ses placements. Pour cela, on optimise une fonction de risque sous contraintes et on en propose une résolution numérique.

Mots clefs : Optimisation. Algèbre linéaire. Méthodes itératives.

- *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. La présentation, bien que totalement libre, doit être organisée et le jury apprécie qu'un plan soit annoncé en préliminaire. L'exposé doit être construit en évitant la paraphrase et mettant en lumière les connaissances, à partir des éléments du texte. Il doit contenir des illustrations informatiques réalisées sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Des pistes de réflexion, indicatives et largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte.*

Le portefeuille d'un investisseur est composé de K biens ou actifs financiers (actions, obligations, titres de créance, ...), qui sont potentiellement autant de sources de revenus, ou de pertes. On note $R_k > 0$ le rendement de l'actif $k \in \{1, \dots, K\}$. Selon la nature de l'investissement, cette quantité R_k peut être définie comme le rapport du bénéfice par unité d'actif k sur le prix d'une telle unité ou bien comme une mesure de l'évolution relative du prix de l'actif k ¹. On désigne par ω_k la part de l'actif k dans le portefeuille. Cette dernière quantité peut être négative, ce qui correspond à une « vente à découvert » et un pari à la baisse du cours du bien k dont le principe simplifié est le suivant. L'investisseur emprunte des parts d'actif k pour les vendre aussitôt; si le prix de cet actif diminue, il fait un profit en les rachetant sur le marché moins cher que le prix d'emprunt, afin de les rendre au prêteur. Le rendement total du portefeuille s'exprime sous la forme $\sum_{k=1}^K \omega_k R_k$ et les coefficients sont assujettis à la contrainte $\sum_{k=1}^K \omega_k = 1$.

Le risque de la stratégie d'investissement est évalué à l'aide de la matrice de volatilité : les coefficients diagonaux Σ_{ii} mesurent combien le rendement de l'actif i peut varier brutalement (plus la valeur de Σ_{ii} est grande, plus le rendement de l'actif i est sujet à de grandes variations) alors que les coefficients extra-diagonaux Σ_{ij} mesurent comment l'appréciation des actifs i et j peut être liée. Plus précisément, à chaque actif k , on associe une fonction g_k définie sur un certain domaine \mathcal{Z} muni d'une mesure μ normalisée². Cette fonction caractérise la formation du rendement de l'actif k , et on pose

$$(1) \quad \Sigma_{ij} = \int_{\mathcal{Z}} \left(g_i(z) - \int_{\mathcal{Z}} g_i(\zeta) d\mu(\zeta) \right) \left(g_j(z) - \int_{\mathcal{Z}} g_j(\zeta) d\mu(\zeta) \right) d\mu(z), \quad \forall 1 \leq i, j \leq K.$$

1. du type $\frac{P_k(t) - P_k(t - \Delta t)}{P_k(t - \Delta t)}$ où $P_k(t)$ est le prix de l'unité d'actif k à l'instant t et Δt est un certain intervalle de temps « représentatif ».

2. c'est-à-dire telle que $\int_{\mathcal{Z}} d\mu = 1$

Dans toute la discussion, on supposera que pour tout $U \in \mathbb{R}^K \setminus \{0\}$, on a

$$(2) \quad \mu\left(\left\{z \in \mathcal{Z}, \sum_{i=1}^K U_i \left(g_i(z) - \int_{\mathcal{Z}} g_i(\zeta) d\mu(\zeta)\right) \neq 0\right\}\right) > 0.$$

En particulier, ceci implique que $\Sigma_{ii} \neq 0$ pour tout i . Alors, on a $-1 \leq \tilde{\Sigma}_{ij} := \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}} \leq 1$: un coefficient $\tilde{\Sigma}_{ij} = +1$ indique que les biens i et j s'apprécient ou se déprécient ensemble, avec une relation linéaire entre ces évolutions, un coefficient $\tilde{\Sigma}_{ij} = -1$ indique que l'un de ces biens s'apprécie quand l'autre se déprécie, avec encore une relation linéaire entre ces évolutions et un coefficient $\tilde{\Sigma}_{ij} = 0$ signifie que les biens i et j évoluent de façon indépendante. La matrice $\Sigma = (\Sigma_{i,j})_{1 \leq i, j \leq K}$ est symétrique définie positive.

On va voir maintenant comment définir des stratégies de diversification afin de réduire le risque des placements opérés : le principe consiste à détenir des actifs qui ne sont pas ou qui sont peu positivement corrélés. La mesure du risque du portefeuille caractérisé par le vecteur $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_K)$ est définie par la quantité $\sqrt{\Sigma \Omega \cdot \Omega}$, appelée la volatilité du portefeuille. Ici et dans la suite du texte, nous adoptons la convention suivante : on identifie avec la même notation le vecteur $\Omega \in \mathbb{R}^K$ de coordonnées $\omega_1, \dots, \omega_K$ et la matrice colonne qui lui est canoniquement associée et on note $a \cdot b = \sum_{k=1}^K a_k b_k$ le produit scalaire des vecteurs a et b de \mathbb{R}^K .

1. Stratégies de diversification

On introduit le vecteur $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^K$ et on note $R = (R_1, \dots, R_K)$ le vecteur des rendements. On suppose que R et e ne sont pas colinéaires. Une première approche consiste à déterminer le vecteur $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_K)$ vérifiant $\Omega \cdot e = 1$ et qui minimise le risque $\Sigma \Omega \cdot \Omega$ en imposant un certain rendement $R \cdot \Omega = \mathcal{M}$, valeur positive fixée. La solution de ce problème de minimisation s'écrit sous la forme $\Omega = \Sigma^{-1}(\lambda_1 e + \lambda_2 R)$ où λ_1, λ_2 sont deux réels qu'on calcule par les relations

$$(3) \quad \begin{pmatrix} \Sigma^{-1} e \cdot e & \Sigma^{-1} R \cdot e \\ \Sigma^{-1} e \cdot R & \Sigma^{-1} R \cdot R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathcal{M} \end{pmatrix}.$$

En notant $\Delta = (\Sigma^{-1} e \cdot e)(\Sigma^{-1} R \cdot R) - (\Sigma^{-1} e \cdot R)^2 > 0$, on obtient

$$(4) \quad \Omega = \frac{\Sigma^{-1} R \cdot R - \mathcal{M} \Sigma^{-1} R \cdot e}{\Delta} \Sigma^{-1} e + \frac{\mathcal{M} \Sigma^{-1} e \cdot e - \Sigma^{-1} R \cdot e}{\Delta} \Sigma^{-1} R.$$

On peut remarquer que, connaissant les portefeuilles optimaux Ω_1, Ω_2 pour deux niveaux de rendement $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$, le portefeuille associé au rendement \mathcal{M} est donné par $\Omega = \frac{\mathcal{M} - \mathcal{M}_2}{\mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2} \Omega_1 + \frac{\mathcal{M}_1 - \mathcal{M}}{\mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2} \Omega_2$. Enfin, on peut observer que $\Sigma \Omega \cdot \Omega$ s'exprime comme un simple polynôme de degré deux par rapport à \mathcal{M} . Cette analyse définit une courbe dans le plan volatilité/rendement sur laquelle on peut facilement trouver le niveau de rendement qui rend le risque minimal.

Une approche un peu différente consiste à optimiser une quantité mêlant risque et investissement : on cherche le vecteur $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_K)$ vérifiant $\Omega \cdot e = 1$ et qui minimise la

fonctionnelle

$$(5) \quad y \mapsto J(y) = \frac{1}{2} \Sigma y \cdot y - qR \cdot y.$$

Le paramètre $q \geq 0$ mesure l'aversion au risque de l'investisseur : $q = 0$ correspond à une stratégie de risque minimal et augmenter q revient à augmenter la prise de risques. Le portefeuille optimal est alors défini par la résolution du système linéaire

$$(6) \quad \begin{pmatrix} \Sigma & e \\ e^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qR \\ 1 \end{pmatrix},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$. Ce système admet une unique solution (Ω, λ) .

2. Algorithme de résolution

Une difficulté pratique dans les cas réels est liée à la très grande taille de ces systèmes, un portefeuille contenant couramment de 100 à 100 000 positions. Il peut donc être plus intéressant d'utiliser une méthode itérative qu'une méthode directe. Nous allons étudier l'une de ces méthodes. Une autre difficulté tient au fait que la matrice associée au système (6) est symétrique, mais elle n'est pas définie positive. Une stratégie possible consiste à pénaliser les contraintes : pour $\eta > 0$ fixé, on cherche à minimiser sur \mathbb{R}^K la fonctionnelle $J(y) + \frac{1}{2\eta}(e \cdot y - 1)^2$, problème qui conduit à résoudre le système linéaire

$$(7) \quad \mathcal{A}_\eta \mathbf{Y}_\eta = \Phi_\eta, \quad \Phi_\eta = qR + \frac{e}{\eta}, \quad \mathcal{A}_\eta = \Sigma + \frac{ee^T}{\eta}.$$

Pour amorcer l'algorithme, on choisit arbitrairement un vecteur $\mathbf{Y}^{(0)}$ et on pose $\mathbf{E}^{(0)} = \mathbf{Z}^{(0)} = \Phi_\eta - \mathcal{A}_\eta \mathbf{Y}^{(0)}$ (qui est, en général, non nul). Puis, disposant de $\mathbf{Y}^{(k)}, \mathbf{Z}^{(k)} \neq 0, \mathbf{E}^{(k)} \neq 0$:

— on pose

$$(8) \quad \beta^{(k)} = \frac{\mathbf{E}^{(k)} \cdot \mathbf{Z}^{(k)}}{\mathcal{A}_\eta \mathbf{Z}^{(k)} \cdot \mathbf{Z}^{(k)}}, \quad \mathbf{Y}^{(k+1)} = \mathbf{Y}^{(k)} + \beta^{(k)} \mathbf{Z}^{(k)}, \quad \mathbf{E}^{(k+1)} = \Phi_\eta - \mathcal{A}_\eta \mathbf{Y}^{(k+1)};$$

— si $\mathbf{E}^{(k+1)} = 0$, on a trouvé la solution de $\mathcal{A}_\eta \mathbf{Y} = \Phi_\eta$ et l'algorithme s'arrête; sinon on pose

$$(9) \quad \alpha^{(k)} = -\frac{\mathcal{A}_\eta \mathbf{Z}^{(k)} \cdot \mathbf{E}^{(k)}}{\mathcal{A}_\eta \mathbf{Z}^{(k)} \cdot \mathbf{Z}^{(k)}}, \quad \mathbf{Z}^{(k+1)} = \mathbf{E}^{(k+1)} + \alpha^{(k)} \mathbf{Z}^{(k)}.$$

On peut montrer qu'il existe $0 < \ell < 1$ tel que

$$(10) \quad \mathcal{A}_\eta (\mathbf{Y}^{(k)} - \mathbf{Y}) \cdot (\mathbf{Y}^{(k)} - \mathbf{Y}) \leq \ell^k \mathcal{A}_\eta (\mathbf{Y}^{(0)} - \mathbf{Y}) \cdot (\mathbf{Y}^{(0)} - \mathbf{Y}),$$

ce qui prouve la convergence de l'algorithme (en pratique, on arrête le calcul lorsque $\|\mathbf{E}^{(k)}\|$ passe sous un certain seuil, fixé au départ).

En effet, on commence par observer que $\mathcal{A}_\eta \mathbf{Z}^{(k+1)} \cdot \mathbf{Z}^{(k)} = 0$ et $\mathbf{E}^{(k+1)} \cdot \mathbf{Z}^{(k)} = 0$. Il s'ensuit que $\mathbf{Z}^{(k+1)} \neq 0$ et, de plus,

$$\begin{aligned} \text{d'une part :} & \quad \mathcal{A}_\eta \mathbf{Z}^{(k+1)} \cdot \mathbf{Z}^{(k+1)} = \mathcal{A}_\eta \mathbf{E}^{(k+1)} \cdot \mathbf{E}^{(k+1)} - (\alpha^{(k)})^2 \mathcal{A}_\eta \mathbf{Z}^{(k)} \cdot \mathbf{Z}^{(k)}, \\ \text{d'autre part :} & \quad \mathcal{A}_\eta^{-1} \mathbf{E}^{(k+1)} \cdot \mathbf{E}^{(k+1)} = \mathcal{A}_\eta^{-1} \mathbf{E}^{(k)} \cdot \mathbf{E}^{(k)} - (\beta^{(k)})^2 \mathcal{A}_\eta \mathbf{Z}^{(k)} \cdot \mathbf{Z}^{(k)}. \end{aligned}$$

On note

$$(11) \quad \varepsilon^{(k)} = \frac{1}{2} \mathcal{A}_\eta (\mathbf{Y}^{(k)} - \mathbf{Y}) \cdot (\mathbf{Y}^{(k)} - \mathbf{Y}) = \frac{1}{2} \mathcal{A}_\eta^{-1} \mathbf{E}^{(k)} \cdot \mathbf{E}^{(k)}.$$

Grâce au fait que $\mathbf{E}^{(k)} \cdot \mathbf{Z}^{(k)} = \mathbf{E}^{(k)} \cdot \mathbf{E}^{(k)}$, on obtient la relation

$$(12) \quad \varepsilon^{(k+1)} \leq \varepsilon^{(k)} - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{E}^{(k)} \cdot \mathbf{E}^{(k)})^2}{\mathcal{A}_\eta \mathbf{E}^{(k)} \cdot \mathbf{E}^{(k)}},$$

qui permet de conclure. On notera que la constante ℓ peut s'exprimer en faisant apparaître le rapport des valeurs propres extrêmes de \mathcal{A}_η . Ainsi, l'efficacité de la méthode est très sensible aux propriétés de conditionnement de la matrice \mathcal{A}_η . Ce point est pénalisant si on prend η petit puisque $\text{Cond}(A_\eta) \geq \frac{\Lambda}{\eta}$, où Λ ne dépend que de Σ . On pourra mettre en œuvre cet algorithme sur la situation suivante, avec des données issues du marché boursier néerlandais :

	Actifs	Rendements ($\times 10^{-3}$)	Volatilités ($\times 10^{-3}$)					
	Elsevier	0.266	0.345					
	Fortis	0.274	0.150	0.399				
(13)	Getronics	0.162	0.183	0.204	1.754			
	Heineken	0.519	0.088	0.107	0.075	0.243		
	Philips	0.394	0.186	0.236	0.325	0.096	0.734	
	Royal Dutch	0.231	0.090	0.130	0.110	0.064	0.147	0.221
	Unilever	0.277	0.095	0.127	0.091	0.086	0.114	0.093 0.219

Avec ces données, le portefeuille minimisant le risque ($q = 0, \eta = 1$) est

$$(14) \quad \Omega = (0.1313, -0.0029, 0.0137, 0.2883, -0.0113, 0.3162, 0.2647);$$

on investit principalement sur les biens de plus faibles volatilités.

3. Politique de sûreté

La description des problèmes d'optimisation de portefeuille que nous avons faite jusque-là est statique et ne prend pas en compte les évolutions des actifs au cours du temps. En fait, ces variations temporelles jouent de deux façons :

- d'une part dans la construction, masquée dans ce texte, de la matrice Σ où on tient compte de l'historique des cours,

- d'autre part, on cherche à déterminer le rendement des placements dans le futur. C'est cet aspect que nous allons aborder maintenant, du point de vue de critères de régulation.

Les autorités de régulation des marchés imposent des contraintes aux investisseurs afin de limiter les conséquences fâcheuses que pourrait avoir une politique trop risquée. Le critère de régulation fixe un seuil aux pertes potentielles du portefeuille, à une échéance $\tau > 0$ et avec un niveau de confiance $0 < \alpha < 1$ donnés. Ces trois paramètres qui régissent les politiques d'investissement — seuil de pertes, échéance, niveau de confiance — sont imposés par les autorités. On prend en compte l'évolution de la valeur des actifs dans le temps, en désignant par $R(t)$ le vecteur des rendements des actifs du portefeuille à l'instant t . À cet

instant, le rendement du portefeuille est donc $\rho(t) = \Omega \cdot R(t)$, où Ω décrit la stratégie d'investissement à l'instant t (par exemple telle qu'obtenue au paragraphe précédent). Le critère de régulation s'énonce en termes probabilistes : τ et α étant fixés, on cherche $\sigma > 0$ tel que

$$(15) \quad \text{Proba}(\rho(t + \tau) - \rho(t) \geq -\sigma) = \alpha,$$

où σ est la perte potentielle à l'horizon τ . Le portefeuille satisfait au critère de régulation si $\sigma \leq \sigma_{\text{auto}}$, une quantité fixée par les autorités. La difficulté pour déterminer si le portefeuille est valide au regard de ce critère réside dans l'évaluation de l'état $\rho(t + \tau)$ du portefeuille *dans le futur*. On utilise un modèle mathématique, de nature probabiliste, afin de prédire cet état.

Le modèle le plus simple consiste à supposer que $\rho(t + \tau)$ est une variable aléatoire qui suit une loi Gaussienne de moyenne $\tau\Omega \cdot \bar{r}$, où $\bar{r} = (\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_K)$ est le vecteur des rendements moyens (déterminé par l'historique des cours) des actifs du portefeuille, et d'écart-type $\sqrt{\tau\Sigma\Omega \cdot \Omega}$. Il s'ensuit dans ce cas que

$$(16) \quad \sigma = \Psi(\alpha)\sqrt{\tau\Sigma\Omega \cdot \Omega} + \rho(t) - \tau\Omega \cdot \bar{r},$$

où Ψ est l'inverse de la fonction de répartition de la loi Gaussienne centrée réduite. Cette fonction est tabulée³ et le résultat s'obtient donc aisément; ainsi pour $\alpha = \frac{99}{100}$, on a $\Psi(\alpha) \simeq 2.33$.

Une modélisation de nature différente consiste à construire une approximation de $\rho(t + \tau)$ par des simulations. À cette fin, on peut exploiter les logiciels de calcul qui permettent de produire des données aléatoires suivant une loi normale centrée réduite⁴. On modifie ces données pour produire un ensemble de $J \gg 1$ données aléatoires qui suivent une loi normale de moyenne \bar{r} et de matrice de covariance Σ . Cette construction repose sur deux résultats mathématiques, le premier lié à la théorie des probabilités, le second tombant dans le champ de l'algèbre linéaire.

Lemme 1. Soient c_1, \dots, c_n des réels et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi normale centrée réduite. Alors la variable aléatoire $\sum_{i=1}^n c_i X_i$ suit une loi normale centrée de variance $c_1^2 + \dots + c_n^2$. Plus généralement, si A est une matrice $n \times n$ inversible et $X = (X_1, \dots, X_n)$, les composantes Y_1, \dots, Y_n du vecteur aléatoire $Y = AX$ suivent des lois normales. De plus, la matrice de covariance $\Sigma = (\mathbb{E}(Y_i Y_j) - \mathbb{E}(Y_i)\mathbb{E}(Y_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ de Y est $\Sigma = AA^T$.

Lemme 2. Toute matrice symétrique définie positive Σ peut s'écrire sous la forme LL^T où L est triangulaire inférieure (et la décomposition est unique si les coefficients diagonaux de L sont positifs).⁵

L'algorithme suit alors les étapes suivantes :

- On décompose la matrice Σ sous la forme $\Sigma = LL^T$ où L est triangulaire inférieure,
- Disposant d'un vecteur $Z^{(j)} \in \mathbb{R}^N$ dont les coordonnées sont choisies suivant un tirage Gaussien centré et réduit, on pose $\tilde{Z}^{(j)} = LZ^{(j)}$,

3. Voir la table fournie en annexe, ou utiliser par exemple la commande `cdfnor` de Scilab.

4. Utiliser par exemple la commande `rand("normal")` de Scilab

5. Utiliser par exemple la commande `chol` de Scilab.

- On définit une prédiction des rendements futurs par les relations suivantes, qui constituent donc une hypothèse de modélisation,

$$(17) \quad \tilde{R}_i^{(j)}(t + \tau) = R_i(t) \exp\left(\left(\bar{r}_i - \frac{\Sigma_{ii}^2}{2}\right)\tau + \Sigma_{ii} \tilde{Z}_i^{(j)} \sqrt{\tau}\right), \quad \tilde{\rho}^{(j)}(t + \tau) = \Omega \cdot \tilde{R}^{(j)}(t + \tau).$$

- On construit un ensemble de prédictions en effectuant ces opérations pour $j \in \{1, \dots, J\}$, avec $J \gg 1$. On définit σ en utilisant la mesure empirique $\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \delta_{\tilde{\rho}^{(j)}(t+\tau)}$: on trie les composantes du vecteur $\tilde{\rho}^{(j)}(t + \tau) - \rho(t)$ par ordre croissant et la valorisation cherchée correspond à la partie entière de $(1 - \alpha)J$.

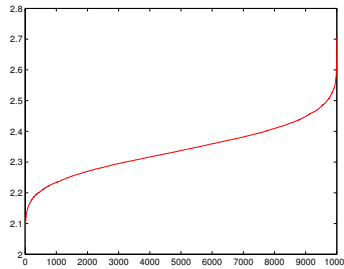


FIGURE 1. Répartition valorisations simulées. Données : $J = 10000$, $\tau = 10$, $\bar{r} = 250R$, R et Σ comme dans la section 2.

Suggestions et pistes de réflexion

- *Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives et il n'est pas obligatoire de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier, ou non, certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. À défaut, si vos illustrations informatiques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en œuvre.*
- Détailler les arguments mathématiques sur lesquels est basée la discussion de la section 1. En particulier, on pourra justifier que la matrice Σ est bien symétrique définie positive.
- Étudier la courbe $(\sqrt{\Omega^T \Sigma \Omega}, \mathcal{M})$ dans le cas de l'optimisation à rendement fixé.
- Expliciter le lien entre la minimisation de la fonctionnelle J et le système linéaire (6).
- Analyser et mettre en œuvre l'algorithme proposé dans la section 2. Éventuellement proposer d'autres méthodes pour résoudre le système (6).
- Expliquer les principes mathématiques qui guident la politique de sûreté décrite dans la section 3.
- Expliquer le principe des algorithmes de décomposition d'une matrice symétrique définie positive sous la forme LL^T exploitée dans la section 3.
- Mettre en œuvre la méthode décrite dans la section 3 sur l'exemple proposé dans la section 2.

Annexe A. Intégrale de la loi Gaussienne centrée réduite

(18)
$$\mathcal{G}(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}, \quad \mathcal{G}(-t) = 1 - \mathcal{G}(t).$$

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986