

# Epreuve de Modélisation

Thierry Goudon

Président délégué du jury de l'Agrégation Externe de Mathématiques

`thierry.goudon@inria.fr`

## Petit historique

- ▶ Début en 1999 : texte ou leçon  
Une épreuve de modélisation pour
  - ▶ faire des math “en situation”
  - ▶ et amener à utiliser l'ordinateur.
- ▶ Thématique dans les premières années (math. bio. par ex.)
- ▶ 2006 : passage aux textes uniquement, sans thèmes précis  
Problème des leçons : format trop proche des épreuves d'algèbre/analyse, n'apprend pas grand-chose de plus sur les candidats  
→ Volonté d'avoir une épreuve (de math !) *différente*
- ▶ Renouvellement régulier des textes et évolution, ajustement des attentes, calibrage des textes...

S'accompagne ces dernières années d'une série d'initiatives, nationales et internationales, pour (dé-)montrer à un large public que “les maths ça sert”

semaine des maths, MC2+, stages hippocampe,

<http://www.breves-de-maths.fr/>, etc

# Fonctionnement

- ▶ 4 heures de préparation
  - ▶ accès à une bibliothèque,
  - ▶ un ordinateur (sans connexion) à disposition
- ▶ 1 heure 05 d'oral, 4 examinateurs
- ▶ 40 minutes totalement libres (notes autorisées)
- ▶ 25 minutes de questions, en lien **direct** avec le texte
- ▶ Il est requis d'illustrer le texte par des simulations sur ordinateur, accessible à tout moment  
(Durant l'épreuve le jury voit le même écran que le candidat mais seul le candidat peut modifier les fichiers)

Au sein du jury : travail d'harmonisation des difficultés et des exigences entre les 3 options.

# Une épreuve très particulière

- ▶ Format peu scolaire. Beaucoup de **liberté** (gestion du temps, du tableau, de l'ordinateur...)
- ▶ Plus que de la technique elle même, la difficulté vient de la **mise en situation**
- ▶ et de la **rupture des cloisonnements thématiques** : les textes font appel à des pans variés du programme (parler d'EDO et d'algèbre linéaire par ex.)
- ▶ Sur un même texte, plusieurs stratégies gagnantes !
- ▶ Place de l'**ordinateur** (la proportion de candidats qui n'utilisent pas du tout l'ordinateur a constamment diminué ; elle est aujourd'hui quasi-nulle)

Les candidats qui ont bien compris le principe de l'épreuve, qui sont à l'aise avec l'ordinateur marquent des points. Une préparation spécifique, commencée suffisamment tôt, est forcément payante.

## Une épreuve très particulière... et qu'il faut préparer

- ▶ Prendre connaissance des textes rendus publics  
<http://agreg.org>
- ▶ Venir voir des épreuves.
- ▶ Une épreuve qui exige, plus que des connaissances pointues et une grande technique, du **recul** ! On y décèle des qualités différentes mais un candidat mal préparé peut être facilement destabilisé.
- ▶ Depuis 2015, il y a un **programme complémentaire pour les épreuves orales** (p. 138 Rapport 2014) ▶ Prg  
Ces notions sont utiles aux 3 options. Les notions utiles pour les épreuves de modélisation le sont aussi pour les 2 autres épreuves :  
penser à illustrer les leçons — en AP et en MG —  
par des problématiques numériques  
(ex.  $x_{n+1} = f(x_n)$ ...).
- ▶ Les rapports du jury contiennent beaucoup d'informations et sont à prendre **au pied de la lettre**

# Critères d'évaluation

- ▶ Connaissances, contenu mathématique :
  - ▶ reconnaître les éléments du programme qui pourraient être utiles dans ce contexte,
  - ▶ sans faire une leçon qui serait Hors Sujet!
  - ▶ adopter un regard critique ("il faudrait prouver que... mais je n'ai pas réussi à le faire", "les hypothèses du théorème de XXX que je connais pour aborder des problèmes similaires ne sont pas satisfaites dans le cas présent" ...)
- ▶ Capacité à commenter la formalisation du problème, à critiquer les hypothèses de modélisation (attention à la paraphrase!).
- ▶ Illustration informatique : ce n'est pas une épreuve de programmation ! Incitation à utiliser les routines des logiciels fournis, commenter les résultats en lien avec les énoncés du texte, évoquer les méthodes numériques et leurs limites.
- ▶ Qualités pédagogiques, organisation
- ▶ Réponses aux questions des examinateurs

## ▶ **Annonce 2015**

*Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Il vous est conseillé de construire un exposé évitant la paraphrase et mettant en lumière vos connaissances, à partir des éléments du texte. Vous êtes libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des pistes de réflexion, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte ; vous n'êtes pas tenu de les suivre. Le propos devra être illustré par des traitements ou des simulations numériques sur ordinateur, ou, à défaut, des propositions de telles illustrations. Le jury souhaiterait que le plan de la présentation soit annoncé au début de l'exposé.*

## ▶ **Suggestions 2015**

## ▶ **Mots clefs**

- ▶ **Annonce 2015**
- ▶ **Suggestions 2015** *Les pistes de réflexion suivantes ne sont qu'indicatives : vous n'êtes pas obligé de les suivre. Vous pouvez choisir d'étudier certains des points proposés, de façon plus ou moins approfondie, mais aussi toute autre question à votre initiative. Vos investigations comporteront une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats. A défaut, si vos traitements ou simulations numériques n'ont pas abouti, il est conseillé d'expliquer ce que vous auriez souhaité mettre en oeuvre.*
- ▶ **Mots clefs**



# Les textes

- ▶ **Annonce 2015**

- ▶ **Suggestions 2015**

- ▶ **Mots clefs**

Eléments du programme

Indications pour la bibliographie

Ex. : problème de Cauchy, méthodes de différences finies, systèmes linéaires, etc

- ▶ Lire et appliquer les indications pour utiliser les jeux de données (option A surtout)

# L'accueil du candidat

- ▶ Choix du texte
- ▶ Modalités de l'épreuve (gestion du temps, tableau, ordinateur...)
- ▶ Présenter une stratégie d'illustration numérique (même si "ça ne marche pas")
- ▶ Annoncer un **plan**  
(il n'est pas interdit de prendre de l'autonomie par rapport au texte).
- ▶ En général le jury n'interrompt pas le candidat en début d'exposé (env. 10 mn) et pose de courtes questions durant la 1ère partie de l'épreuve.

# Les questions

- ▶ Le jury prend la main au bout de 40 mn ou si le candidat s'arrête avant (la mauvaise gestion du temps, par excès ou par défaut, est pénalisée ; l'illustration numérique doit faire partie des 40 mn initiales)
- ▶ Toujours liées au texte
- ▶ Précisions sur des assertions du candidat
- ▶ Détailler des preuves
- ▶ Et si on modifie telle donnée ?
- ▶ Interprétation du modèle
- ▶ Expliquer le fonctionnement des algorithmes (qu'est ce qui se cache derrière la commande  $A \setminus b$  ? ou `edo45` ?, que se passe-t-il quand on diminue  $\Delta t$  et pourquoi ?...)
- ▶ Comment calculer, à quel coût ?

## Quelques difficultés récurrentes

- ▶ Appliquer un théorème connu à un contexte donné **EST une difficulté**
- ▶ Lier un énoncé théorique (“il existe...”) à la résolution effective d'un problème.
- ▶ “Choisir son niveau”.
- ▶ Utiliser un logiciel adapté
- ▶ Calcul matriciel, réduction
- ▶ Dériver des applications  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ , restes des formules de Taylor
- ▶ Analyse d'EDO
- ▶ Difficulté à formaliser et hiérarchiser les notions de convergence, consistance, stabilité, confusion  $X(t_n)$  et  $X_n$  (prohiber les  $\simeq$  !), relier  $N$  et  $\Delta t...$
- ▶ Matrice de discrétisation du laplacien (1D)

### Optimisation de charge

Texte écrit en 2009, rendu public en 2014

<http://agreg.org/Textes/public2015-B3.pdf>

Equations aux dérivées partielles. Problème aux limites. Optimisation. Méthodes de gradient. Différences finies.

# Optimisation de charge

- ▶ Faire un **dessin** (Pythagore!) pour expliquer l'expression (1) et le terme  $\sqrt{(u(x+dx) - u(x))^2 + dx^2} - dx$ .
- ▶ Détailler le calcul qui se cache derrière  $\simeq$  dans (1) et de même expliquer le passage de (3) à (4).
- ▶ Pour un candidat aguerri : existence de solutions (espaces de Sobolev...). Mais on peut aussi dire des choses intéressantes en intégrant directement l'équation.  
**Attention** : ne pas confondre problème aux limites et problème de Cauchy (cf. méthode de tir).
- ▶ Interprétation comme pb d'optimisation : compléter la preuve (passage de (8) à (6) notamment).
- ▶ Pourquoi est-il précisé que  $R$  n'est plus quadratique ?

## Optimisation de charge, II

- ▶ Expliquer les principes de la méthode de discrétisation qui conduit à (12).  
Pourquoi le système est-il inversible (au moins dans le cas  $k$  constant) ?  
Bien distinguer  $u_i$  et  $u(x_i)$  !
- ▶ Principe de la méthode du gradient (dessin) et énoncer un théorème de convergence (même s'il ne s'applique probablement pas ici!).
- ▶ Expliquer les formules (16)-(17).
- ▶ A quel résultat s'attendre si  $k$  est constant ?

# Optimisation de charge, bilan

- ▶ Mise en équation
- ▶ Raisonnements d'analyse (DL, fonction orthogonale à un ensemble de fonctions tests, optimisation de fonctionnelles convexes...)
- ▶ Différences finies.
- ▶ Caractère inversible de la matrice de  $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ .
- ▶ Méthode de gradient



- ▶ Résolution de systèmes d'équations linéaires ; Normes subordonnées, notion de conditionnement, rayon spectral, décomposition LU, méthode de Jacobi. Exemple d'opérateurs aux différences finies. Lien avec l'optimisation de fonctionnelles convexes en dimension finie, méthode du gradient à pas constant pour les systèmes linéaires symétriques définis positifs, moindres carrés. Recherche d'éléments propres : méthode de la puissance, décomposition en valeurs singulières, théorème de Gershgorin-Hadamard.
- ▶ Méthode numérique pour la résolution de systèmes d'équations non linéaires. Méthode de Newton : définition, vitesse de convergence, estimation de l'erreur.
- ▶ Intégration numérique : méthode des rectangles, des trapèzes, de Simpson ; estimation de l'erreur.
- ▶ Equations différentielles ordinaires. Stabilité des points critiques. Aspects numériques du problème de Cauchy : méthodes d'Euler explicite et implicite, consistance, stabilité, convergence, ordre

# Programme commun et probabilités

Le programme commun mentionne aussi des points spécifiques de probabilités qui sont supposés connus de **tous** les candidats

- ▶ Probabilités discrètes : tirages uniformes, échantillons.
- ▶ Chaînes de Markov homogènes à espace d'états finis : définition, irréductibilité, apériodicité.
- ▶ Moyenne et variance empirique.
- ▶ Méthode de Monte Carlo : vitesse de convergence ; applications au calcul d'intégrales multiples (exemple : calcul de volumes).
- ▶ Moindres carrés linéaires (sans contraintes).