Résumé : A partir du problème de la représentation des droites sur un écran d'ordinateur, on étudie la notion de droite discrète, et le mot binaire périodique associé. On met en évidence la relation biunivoque entre droites discrètes et certains mots binaires, puis entre ces mots et les nombres rationnels de $[0,1]$.

Mots clefs : algorithmes, géométrie discrète, mots binaires, topologie

► *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

1. Représentation des segments en infographie

L'écran d'ordinateur peut être assimilé à une partie finie du plan discret $\mathbb{Z}^2$ dont les points sont à coordonnées entières positives.

Nous voulons tracer le segment $[AB]$, avec A de coordonnées entières (a_1,a_2) et B de coordonnées entières (b_1,b_2) où $b_1 > a_1$ et $b_2 \geq a_2$. On pose $n = b_1 - a_1 > 0$: c'est donc l'étendue horizontale du segment à tracer. Le segment $[AB]$ sera représenté par une suite de points $[A_0,A_1,\cdots,A_n]$ où $A_0 = A$, $A_n = B$. L' abscisse de A_i est $x_i = a_1 + i$, pour chaque i : on a $x_0 = a_1$ et $x_n = b_1$. L'ordonnée *géométrique* du point $A_i = (x_i = a_1 + i, y_i)$ est donnée par la formule

$$y_i = \frac{(b_2 - a_2)}{(b_1 - a_1)} \times (x_i - a_1) + a_2$$

Sauf dans certains cas très particuliers, par exemple aux extrémités, cette quantité n'est pas un entier. On va donc choisir pour l'ordonnée de A_i soit la partie entière supérieure $\lceil y_i \rceil$ soit la partie entière inférieure $\lfloor y_i \rfloor$, selon celle qui est la plus proche de l'ordonnée géométrique. On appelle $\widetilde{y_i}$ la coordonnées choisie. On a par construction $\widetilde{y_0} = a_2$ et $\widetilde{y_n} = b_2$.

On fait l'hypothèse supplémentaire dans toute la suite de l'article que la pente de la droite (AB), $\alpha = (b_2 - a_2)/(b_1 - a_1)$ est strictement inférieure à 1. On a alors $\widetilde{y_{i+1}} = \widetilde{y_i}$ ou $\widetilde{y_{i+1}} = \widetilde{y_i} + 1$ suivant la position de A_i et A_{i+1} par rapport aux lignes horizontales d'ordonnées entières.

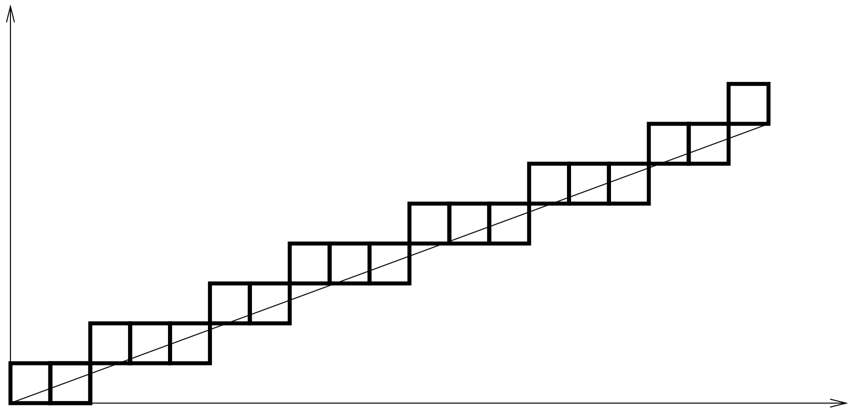

FIG. 1. Algorithme de Bresenham. Par convention, le point de référence des pixels est le point en bas à gauche.

2. Algorithme de Bresenham

On peut implanter l'idée de l'algorithme précédent en évitant le calcul des valeurs *exactes* des y_i. Cette idée a été introduite par Bresenham en 1962.

On calcule incrémentalement $\widetilde{y_{i+1}}$ à partir de $\widetilde{y_i}$, en conservant une valeur d'erreur $e_i = y_i - \widetilde{y_i}$, $y_i = \alpha \times i + a_2$ étant la valeur exacte du point d'abscisse $x_i = a_1 + i$ de la droite.

Au départ cette valeur d'erreur e_0 est nulle. Si $e_i + m \leq 1/2$, on pose $\widetilde{y_{i+1}} = \widetilde{y_i}$ et $e_{i+1} = e_i + m$. Si $e_i + m > 1/2$, on pose $\widetilde{y_{i+1}} = \widetilde{y_i} + 1$ et $e_{i+1} = e_i + m - 1$.

Avec cette définition, e_i est un rationnel multiple entier de $1/(b_1 - a_1)$. On peut donc se ramener à travailler en entiers en considérant $e'_i = e_i \times (b_1 - a_1)$.

Exercice de programmation :

► *Il vous est demandé de rédiger un programme conforme aux spécifications ci-dessous dans l'un des langages C, Caml ou Java à votre choix. Ce programme devra être accompagné d'un exemple d'exécution permettant d'en vérifier le bon fonctionnement. La clarté et la concision du programme seront des éléments importants d'appréciation pour le jury.*

Écrire un programme permettant de représenter le segment $[AB]$, où $A = (a_1, a_2)$ et $B = (b_1, b_2)$, en suivant l'algorithme de Bresenham. On supposera que $a_1 < b_1$, $a_2 \leq b_2$ et que la pente α de la droite est inférieure à 1. La sortie du programme sera la liste des couples (x_i, y_i) des points représentant le segment.

3. Une autre approche

On se place encore dans les mêmes hypothèses qu'en section 2. On veut tracer le segment $[AB]$ où $A = (a_1, a_2)$ et $B = (b_1, b_2)$, de pente $\alpha = (b_2 - a_2)/(b_1 - a_1)$, avec $a_1 < b_1$, $a_2 \leq b_2$ et $\alpha < 1$. On construit une liste de $n+1$ points à coordonnées entières $A_0, \cdots, A_n$, avec $A_0 = A$, $A_n = B$ et $n = b_1 - a_1$, mais cette fois-ci, les points sont *juste en dessous* de la droite.

$$A_i = (x_i = a_1 + i, \widetilde{y_i} = \lfloor \alpha \times i + a_2 \rfloor)$$

Comme précédemment, l'hypothèse $\alpha < 1$ implique que $\widetilde{y_{i+1}} = \widetilde{y_i}$ ou $\widetilde{y_{i+1}} = \widetilde{y_i} + 1$: le saut est d'au plus une unité entre les ordonnées successives.

Posons $r_i = \widetilde{y_i} - \widetilde{y_{i-1}}$, pour $i = 1, \cdots, n$. La suite $r_1, r_2, \cdots, r_n$ code la suite des déplacements : on passe de A_{i-1} à A_i soit en se déplaçant d'une unité horizontalement vers la droite ($r_i = 0$), soit en diagonale vers le haut ($r_i = 1$).

4. Droites discrètes

4.1. *Un exemple*

Considérons ici le segment $[AB]$, où $A = (0,0)$ et $B = (9,4)$. La suite de 9 déplacements r_i obtenue par l'algorithme précédent est 001010101. Si l'on s'intéresse maintenant à la demi-droite d'équation $y = \frac{4}{9}x$, avec $x \geq 0$, la suite des déplacements horizontaux ou diagonaux nécessaires pour longer inférieurement cette demi-droite, *au plus près inférieurement* à partir de l'origine est le mot infini $(001010101)^\omega$.

Réciproquement, on peut se convaincre que la seule demi-droite d'origine $(0,0)$ qui soit longée *au plus près inférieurement* par les déplacements codés par $(001010101)^\omega$ est celle de pente $4/9$.

On dira que le mot binaire périodique $(001010101)^\omega$ code le nombre rationnel $4/9$.

4.2. *Définitions équivalentes*

On représente habituellement la droite de pente a/b et d'ordonnée à l'origine $-\gamma/b$ comme les solutions (réelles) de l'équation $a.x - b.y = \gamma$. Dans le cas des droites discrètes, il est plus pratique de les représenter sous la forme des solutions (entières) d'une double *inéquation*.

Définition 1. *Soient* $0 < a < b$ *deux entiers premiers entre eux et* $\gamma \in \mathbb{Z}$. *La droite* discrète *de pente* a/b *et de borne inférieure* γ *est l'ensemble des solutions* (x, y) entières *de la double inéquation diophantienne :*

$$\gamma \leq a.x - b.y < \gamma + b$$

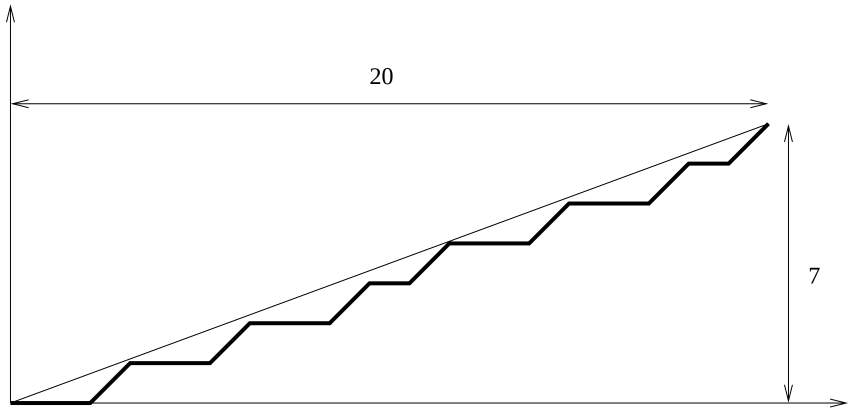

FIG. 2. Algorithme de parcours inférieur. La pente est de $7/20$. Le mot associé au segment est (00100100100100100100101).

Une autre manière de voir cette droite discrète est l'ensemble $\{(x, f(x)), x \in \mathbb{Z}\}$, avec

$$f(x) = \lfloor \frac{a.x - \gamma}{b} \rfloor$$

On dit alors que cette droite (discrète) a pour équation $y = \lfloor (a.x - \gamma)/b \rfloor$.

Théorème 1. *Les droites discrètes D_0 et D_γ de paramétrages respectifs $y = \lfloor a.x/b \rfloor$ et $y = \lfloor (a.x - \gamma)/b \rfloor$ se déduisent l'une de l'autre par une translation de vecteur u à coordonnées entières.*

Dans la suite on considèrera toujours que les paramètres a et b vérifient les hypothèses de la définition 1, à savoir : a et b sont premiers entre eux, et $0 < a < b$.

Remarque 1. *Avec cette définition, on ne s'intéresse qu'aux droites discrètes de pente* $0 < \alpha < 1$. *Nous nous limiterons à ce cadre dans cet article, mais on pourrait néanmoins étendre cette définition pour les généralisations et les applications que l'on peut tirer de ce concept.*

Remarque 2. *Si f est la fonction*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \lfloor \frac{a.x - \gamma}{b} \rfloor \end{array} \right.$$

alors, pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $f(x+1) - f(x) \in \{0, 1\}$.

4.3. *Périodicité*

On considère une droite discrète d'équation $y = \lfloor (a.x - \gamma)/b \rfloor$. C'est donc l'ensemble des solutions des équations diophantiennes $ax - by = \delta$, avec δ entier compris entre γ et $\gamma + b - 1$. Or, l'équation diophantienne $a.x - b.y = \delta$ est invariante par la translation de vecteur (b, a).

La droite discrète est donc périodique, et sa période minimale est (b,a). Tout sous-segment de longueur b peut être pris pour période.

Un période sera dite canonique si le premier point est solution de l'équation $a.x - b.y = \gamma$.

4.4. *La 8-connexité*

Définition 2. *Soit $M = (x,y)$ un point de coordonnées entières. Le* 8-voisinage *(discret) de M est l'ensemble des huit points entiers de coordonnées $(x+\varepsilon_1, y+\varepsilon_2)$ où $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1,1,0\}$ et $(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \neq (0,0)$. On note cet ensemble $V_8(M)$.*

Définition 3. *On appelle* courbe discrète *un ensemble de points de $\mathbb{Z}^2$.*

Définition 4. *Soit Γ une courbe discrète. On dit qu'elle est 8-connexe (par arcs) si pour tout couple de points M, M' de Γ, il existe une suite de points $M_0 = M, M_1, \cdots, M_n = M'$ de Γ, et $M_{i+1} \in V_8(M_i)$ pour tout $0 \leq i \leq n-1$.*

Théorème 2. *Une droite discrète est une courbe 8-connexe.*

5. Mots binaires

On considère les mots binaires, c'est à dire les mots du langage $\{0,1\}^*$.

La *longueur* d'un mot fini μ, notée $\ell(\mu)$ est le nombre de ses lettres et le *poids* de μ, noté $p(\mu)$ est la somme de ses lettres.

Un mot infini de la forme $\sigma = \mu.(\pi)^\omega$, où π est un mot fini est dit ultimement périodique, π étant une de ses périodes.

Il est périodique s'il est de la forme $\sigma = (\pi)^\omega$.

On remarque que si σ est un mot périodique admettant π pour période, il est également ultimement périodique, toute permutation circulaire de π étant une période.

(On rappelle que la notation $(\pi)^\omega$ veut dire $\pi\pi\pi\cdots$.)

Une période π d'un mot ultimement périodique sera dite *irréductible* si et seulement s'il n'existe pas de mots μ' et π' avec $\ell(\pi') < \ell(\pi)$ tels que $\mu'.(\pi')^\omega = \mu.(\pi)^\omega = \sigma$.

Définition 5. *Un mot binaire (infini) σ est dit équilibré si : pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, pour tous μ, ν facteurs de σ de même longueur h, on a $|p(\mu) - p(\nu)| \leq 1$.*

Par exemple, le mot $\sigma = (001010010101)^\omega$ est équilibré.

On considère une demi-droite discrète d'équation $y = \lfloor (a.x - \gamma)/b \rfloor$. Soit $(M_i)_i$ la suite des points $(i, y_i = \lfloor (a.i - \gamma)/b \rfloor)$. On pose $m_i = y_i - y_{i-1}$ pour tout $i > 0$. La suite $(m_i)_i$ est donc la suite des déplacements élémentaires, 0 (vers la droite) ou 1 (en diagonale), pour *longer au plus près inférieurement* la droite demi-droite $a.x - b.y = \gamma$.

Définition 6. *Considérons le mot binaire infini $\sigma = m_1 m_2 \cdots$ formé par les déplacements successifs. On dira que c'est le* mot binaire associé *à la demi-droite.*

6. Transformation mot-courbe discrète

Soit A un point fixé. On peut associer à un mot binaire $\sigma = m_1 m_2 \cdots$ une suite de points $(M_i = (x_i, y_i))_{i \in \mathbb{N}}$, en choisissant $M_0 = A$, et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $x_i = x_{i-1} + 1$, $y_i = y_{i-1} + m_i$.

On obtient une courbe discrète 8-connexe.

Par exemple, au mot $\sigma = 01101$ on associe la courbe discrète $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$ avec $M_0 = (0,0)$, $M_1 = (1,0)$, $M_2 = (2,1)$, $M_3 = (3,2)$, $M_4 = (4,2)$, $M_5 = (5,3)$.

7. Codage d'un nombre rationnel

7.1. *Mot associé à une demi-droite discrète*

Le mot associé à une demi-droite discrète d'équation $y = \lfloor \frac{ax}{b} \rfloor$ est un mot binaire, périodique et équilibré.

En effet, soit σ le mot binaire associé à cette demi-droite, $\sigma = m_1 m_2, \cdots$. On vérifie aisément qu'il est périodique.

En remarquant que, pour tout i, $m_i = \lfloor \frac{ai}{b} \rfloor - \lfloor \frac{a(i-1)}{b} \rfloor$, on a donc,

pour tout h un entier strictement positif et μ, ν deux facteurs de σ de longueur h

$|p(\mu) - p(\nu)| \leq 1$, ce qui prouve que σ est un mot équilibré.

Il en est de même pour une demi-droite d'équation $y = \lfloor \frac{ax - \gamma}{b} \rfloor$.

7.2. *Un exemple*

Considérons la demi-droite d'équation $y = \lfloor \frac{2x}{3} \rfloor$.

Le mot associé est $\sigma = (011)^\omega$.

On remarque que 101 est également une période de ce mot, considéré en tant que mot ultimement périodique.

Le mot $\sigma' = (101)^\omega$ est associé à la demi-droite discrète d'équation $y = \lfloor \frac{2x+1}{3} \rfloor$, qui se déduit de la précédente par une translation entière.

On peut dire que $(011)^\omega$ et $(101)^\omega$ codent le même rationnel, $\frac{2}{3}$ (ainsi que $(110)^\omega$).

7.3. *Mots associés à un rationnel de* $]0,1[$.

Théorème 3. *Soit* $\frac{a}{b}$ *un rationnel de* $]0,1[$. *Soit* $\sigma = (\pi)^\omega$ *le mot binaire associé à la demi-droite d'équation* $y = \lfloor \frac{ax}{b} \rfloor$. *Alors les mots de la forme* $(\pi')^\omega$, *où* π' *est une permutation circulaire de* π *sont tous associés à des demi-droites discrètes de pente* $\frac{a}{b}$. *On a* $\frac{a}{b} = \frac{p(\pi)}{\ell(\pi)}$.

7.4. *Rationnel associé à un mot binaire, périodique et équilibré.*

Théorème 4. *Soit* $\sigma = (\pi)^\omega$ *un mot binaire, périodique et équilibré. Alors la courbe discrète associée (en prenant O comme point de départ) est une demi-droite discrète, de pente* $\frac{p(\pi)}{\ell(\pi)}$, *rationnel de* $[0,1]$.

Il est assez aisé de démontrer que la courbe discrète (Γ) associée à un tel mot est "fonctionnelle", c'est à dire $(\Gamma) = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{N}\}$, (où f est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) et qu'elle est incluse dans le premier octant du plan $\mathbb{Z}^2$. Il est plus délicat de démontrer que c'est effectivement une demi-droite discrète.

A tout mot binaire, périodique et équilibré, on associe donc un unique rationnel de $[0,1]$.

Suggestions pour le développement

► *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*

– Sur l'algorithme de Bresenham et l'exercice de programmation
  (1) Dans l'algorithme de Bresenham que se passe-t-il dans le cas d'une droite de pente 1 ou de pente 0 ?
  (2) Quel est l'intérêt de se ramener au cas où e_i est entier, plutôt que de calculer avec des rationnels ?
  (3) Comment pourrait-on faire pour tracer des droites dans les autres quadrants ?
  (4) Quelle est la complexité de l'algorithme ?
  (5) Comment pourrait-on adapter cette idée pour tracer d'autres courbes, par exemple des cercles ?
– Sur les droites discrètes.

(1) Vérifiez que le mot associé au rationnel $4/9$ est bien $(001010101)^{\omega}$.

(2) Que se passerait-il si on considérait un rationnel a/b tel que a et b ne sont pas premiers entre eux ?

(3) Pourquoi n'y a-t-il qu'une *seule* demi-droite d'origine $(0,0)$ qui soit longée *au plus près inférieurement* par les déplacements codés par $(001010101)^{\omega}$? Donnez une interprétation géométrique.

(4) Démontrez que la définition 1 correspond bien à l'intuition de longer au plus près inférieurement la droite (réelle) de pente a/b et d'ordonnée à l'origine $-\gamma/b$.

(5) Démontrez que la définition 1 des droites (discrètes) est bien équivalente à la forme fonctionnelle présentée.

(6) Démontrez le théorème 1.

(7) Montrer qu'une droite discrète est bien 8-connexe.

– Sur les mots binaires équilibrés et périodiques.

  (1) Détailler la démonstration du paragraphe 8.1.

  (2) Donner d'autres exemples pour illustrer le propos de l'exemple 8.2.

  (3) Démontrer le théorème 3.

  (4) Détailler les remarques du paragraphe 8.4. (Attention, c'est difficile de démontrer que l'on a une demi-droite discrète).

  (5) Proposer un algorithme qui donne le mot binaire associé à une demi-droite discrète.

  (6) Que se passe-t-il avec une droite (réelle) de pente non-rationnelle ?