Résumé : Les figures que l'on peut réaliser lorsqu'on jongle avec des balles peuvent être représentées par des mots, appelés alors *mots jonglables*. Le texte est consacré à la modélisation du problème et à l'étude de certaines propriétés du langage des mots jonglables.

Mots clefs : langages, automates finis, réécriture

► *Il est rappelé que le jury n'exige pas une compréhension exhaustive du texte. Vous êtes laissé(e) libre d'organiser votre discussion comme vous l'entendez. Des suggestions de développement, largement indépendantes les unes des autres, vous sont proposées en fin de texte. Vous n'êtes pas tenu(e) de les suivre. Il vous est conseillé de mettre en lumière vos connaissances à partir du fil conducteur constitué par le texte. Le jury appréciera que la discussion soit accompagnée d'exemples traités sur ordinateur.*

Aussi vieille que le monde, l'activité de jongler avec des objets – que nous nommerons ici *jonglage*, même si ce mot n'est pas accepté actuellement par le dictionnaire qui lui préfère le terme *jonglerie* plus péjoratif – pouvait jusqu'à récemment être qualifiée de « traditionnelle ». Depuis une petite trentaine d'années, une étude mathématique a apporté de nouvelles perspectives tout à fait intéressantes à cet art, en proposant d'abord une notation simple et cohérente des figures et en permettant aussi de mieux comprendre les mécanismes en jeu. En particulier, cette théorie permet d'énumérer toutes les figures théoriquement jonglables. D'ailleurs, elle s'est vite propagée chez les jongleurs professionnels et on l'enseigne aujourd'hui dans nombre d'écoles du cirque.

Dans ce texte, nous nous limitons à l'étude du jonglage dit *simple*.

1. Modèle de jonglage

1.1. *Principes du jonglage simple*

Les objets avec lesquels on jongle sont appelés *balles*. On s'intéresse ici exclusivement au jonglage à deux mains produit par un jongleur seul.

Le modèle général considéré pour représenter l'action de jongler obéit aux règles suivantes. En premier lieu, on ne tient compte que des instants où une balle est lancée ou rattrapée. De plus, on suppose jongler à fréquence constante, c'est-à-dire que l'intervalle de temps entre deux instants successifs a toujours la même durée $\Delta t > 0$; cette valeur Δt n'ayant en théorie pas d'importance, on peut convenir que $\Delta t = 1$. Ces deux premières hypothèses de travail permettent donc de discrétiser le temps par l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels : chaque *lancer* ou *rattrape* de balle se fait à un instant $n \in \mathbb{N}$. Enfin, on suppose que lorsqu'une balle est rattrapée, elle est immédiatement relancée au même instant (par la même main qui l'a rattrapée), comme si la balle était brûlante (principe de la « patate chaude »).

Avec ces hypothèses, tout lancer de balle se produit donc à un instant entier $n \in \mathbb{N}$ et est entièrement déterminé par sa *durée* $d \in \mathbb{N}^*$. Notons qu'en pratique, cette valeur d est bornée : les meilleurs jongleurs effectuent des lancers de durée inférieure ou égale à 12 ou 13 ; pour des considérations techniques de représentation, on supposera cependant dans tout le texte que d est toujours majorée par 9.

La spécificité du jonglage simple réside dans les deux hypothèses supplémentaires suivantes :
(R1) : à un instant donné, seule l'une des deux mains est susceptible de travailler (c'est-à-dire rattraper une balle et la relancer aussitôt) (par opposition au *jonglage simultané* où les deux mains peuvent travailler en même temps) ;
(R2) : à un instant donné, une main ne peut se trouver que dans l'un des deux états suivants : ou bien elle est vide, ou bien elle rattrape *une seule* balle qu'elle relance aussitôt (par opposition au *jonglage multiplexe* où chaque main peut rattraper, contenir ou relancer plusieurs balles à un instant donné).

Remarquons que l'hypothèse (R1) autorise, du moins en théorie, à considérer qu'on ne jongle que d'une seule main. Dans un souci de simplification, c'est ce que nous supposerons désormais, pour ne pas avoir à distinguer les mains droite et gauche.

On a vu qu'on pouvait associer, à chaque instant où une balle est lancée, l'entier naturel non nul correspondant à la durée du lancer effectué. On convient d'associer la valeur 0 aux instants où aucune balle n'est lancée : une main vide est assimilée à un lancer de durée nulle. Ainsi, d'après la règle (R2), on peut donc, en jonglage simple, associer à tout instant un unique entier naturel correspondant à la durée du lancer effectué à cet instant.

1.2. *Mots jonglables*

Dernière contrainte pratique enfin, une figure de jonglage doit être périodique : lorsqu'on sait la réaliser, on doit pouvoir l'enchaîner avec elle-même autant de fois qu'on le souhaite. Par conséquent, avec les conventions précédentes, à toute figure de jonglage simple est associé un mot $m = a_0a_1 \dots a_{p-1}$ sur l'alphabet $\{0, 1, \dots, 9\}$ correspondant à la séquence des durées $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ (majorées par 9, rappelons le) des p lancers effectués à p instants consécutifs. Dans tout le texte, on appelle *mot* un mot sur l'alphabet $\{0, 1, \dots, 9\}$.

Remarquons que, d'après l'hypothèse de périodicité, ce mot m représente aussi une infinité de lancers à laquelle est associée la suite $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, \dots$

L'entier p est appelé *longueur* ou plutôt *période* du mot m (il ne s'agit peut-être pas de la plus petite période de la suite définie précédemment à l'aide du mot m).

Cependant, tout mot m ne correspond pas, réciproquement, à une figure de jonglage simple. Par exemple, le mot 433 ne convient pas car, si l'on considère la suite associée $433433433\dots$, les balles de durée 4 et de durée 3 lancées respectivement aux instants n et $n+1$ retombent au même instant $n+4$, en violation de la règle (R2). En revanche, 441 et 5340 sont des mots qui conviennent.

Un mot est dit *jonglable* s'il décrit une figure de jonglage simple. A un mot jonglable, on peut associer un *diagramme de jonglage*, où chaque lancer est matérialisé par une flèche dont la portée représente la durée du lancer. Ainsi, au mot jonglable 441 peut être associé le diagramme de la figure 1 ci-après. Un diagramme de jonglage simple possède donc la propriété suivante : à chaque instant part et arrive une et une seule flèche (cette flèche étant réduite à une « boucle » pour un lancer de durée nulle).

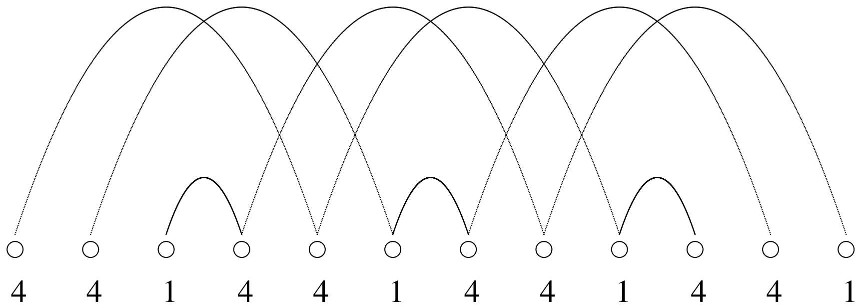

FIG. 1. diagramme de jonglage associé au mot jonglable 441.

Tous les mots auxquels on ne peut pas associer de diagramme de jonglage ne sont évidemment pas jonglables. En revanche, deux mots de même longueur $m = a_0a_1 \dots a_{p-1}$ et $m' = b_0b_1 \dots b_{p-1}$ correspondent à la même figure jonglable s'il existe $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ tel que, pour tout $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, $b_i = a_{(i+k)[p]}$ (où $x[p]$ désigne x modulo p, reste de la division euclidienne de x par p) : on dit alors que les mots m et m' sont *conjugués*, et l'on note $m \sim m'$. Par exemple, 441, 414 et 144 sont des mots jonglables conjugués. Les mots jonglables conjugués sont souvent confondus, ce qui revient à quotienter l'ensemble des mots jonglables par la relation de conjugaison $\sim$. En pareil cas, le représentant choisi pour une classe de conjugaison donnée est le mot le plus élevé de cette classe pour l'ordre lexicographique sur les mots (441 pour l'exemple précédemment choisi).

La première figure qu'un jongleur débutant essaie de réaliser avec b balles est celle qui consiste à lancer sur chaque temps une balle de durée b. On l'appelle la *cascade* à b balles et elle correspond au mot jonglable b (ou bb, bbb, noté b^p si l'on s'intéresse au mots jonglables de période p).

2. Quelques propriétés des mots jonglables

2.1. *Transitions entre mots jonglables*

Un numéro de jonglage ne peut se réduire à l'enchaînement sempiternel de la même figure, et il faut pouvoir passer d'une figure jonglable à une autre. On s'intéresse ici à un mécanisme de transfert d'un mot jonglable à un autre basé sur le principe d'échange de deux lancers : l'idée sous-jacente est donc plutôt naturelle (et assez comparable à celle du passage d'une permutation du groupe symétrique à une autre permutation « voisine » par l'action d'une transposition, qui échange deux entiers).

On souhaite donc échanger deux lancers d'un diagramme de jonglage, l'un ayant lieu à l'instant n et de durée d_n, et l'autre à l'instant $n+k$ et de durée d_{n+k}. Si $0 \le k \le d_n \le d_{n+k} + k$, ces deux lancers s'enchevêtrent : le premier lancer retombe à l'instant $n+d_n$ ultérieur à l'instant $n+k$ du second lancer mais antérieur à l'instant $n+d_{n+k}+k$ de retombée de ce second lancer. On peut donc facilement, sans rien changer aux autres lancers, « démêler » ces deux lancers : il suffit que le lancer à l'instant n soit de durée $d_{n+k}+k$ et que le second lancer soit de durée d_n-k. On vérifie aisément qu'il résulte de cette opération un nouveau diagramme de jonglage.

Formellement, au niveau des mots jonglables, on obtient donc la définition suivante. Soient i et j deux entiers distincts de $\{0,1,\ldots,p-1\}$; si l'on note $e=(j-i)[p]\geq 1$ l'écart positif pour aller de i à j modulo p (c'est-à-dire en passant par $i,i+1,\ldots,j-1,j$ et éventuellement $p-1$ et 0 si $j<i$), alors un mot jonglable $m=a_0a_1\ldots a_{i-1}a_ia_{i+1}\ldots a_{j-1}a_ja_{j+1}\ldots a_{p-1}$ peut être modifié en un autre mot jonglable $m'=a_0a_1\ldots a_{i-1}a'_ia_{i+1}\ldots a_{j-1}a'_ja_{j+1}\ldots a_{p-1}$ en posant $a'_i=a_j+e$ et $a'_j=a_i-e$, à condition d'avoir $1\leq e\leq a_i\leq a_j+e$. On dit alors que m' a été obtenu à partir de m par *échange des lancers aux positions* (i,j).

Par exemple, le mot jonglable 5241 donne le mot jonglable 6231 par échange des lancers aux positions $(0,2)$, et le mot jonglable 0246 par échange aux positions $(3,0)$.

Un cas particulier intéressant (car c'est le plus facile à mettre en oeuvre en pratique) est l'échange de lancers à des positions consécutives : alors $e=1$, $j=(i+1)[p]$ et la condition à satisfaire pour que l'échange puisse avoir lieu est $1\leq a_i\leq a_j+1$; on parle alors d'*échange de lancers adjacents à la position i*.

2.2. *Caractérisation des mots jonglables*

Un problème qui se pose immédiatement consiste à tester si un mot est jonglable ou pas. On dispose pour cela de trois algorithmes de test. Le premier, appelé *test de moyenne*, ne donne qu'une condition nécessaire pour qu'un mot soit jonglable ; les deux autres, appelés respectivement *test de permutation* et *test de réécriture* fournissent quant à eux des conditions nécessaires et suffisantes.

Test de moyenne :: Si un mot est jonglable, alors la moyenne de ses lettres est un entier naturel égal au nombre de balles avec lequel la figure de jonglage qu'il décrit est réalisée.

Test de permutation :: Un mot $m=a_0a_1\ldots a_{p-1}$ de période p est jonglable si et seulement si le mot $\omega=s_0s_1\ldots s_{p-1}$, obtenu à partir de m en posant $s_k=(k+a_k)[p]$ pour tout entier k compris entre 0 et $p-1$, réalise une permutation des lettres $0,1,\ldots,p-1$ (c'est-à-dire s'il existe une permutation σ de l'ensemble $\{0,1,\ldots,p-1\}$ telle que $s_k=\sigma(k)$ pour tout k compris entre 0 et $p-1$).

Test de réécriture :: Un mot de période p est jonglable avec b balles si et seulement s'il s'obtient à partir de la cascade b^p par le système de réécriture consistant à réécrire un mot en un autre par échange de lancers adjacents.

Par exemple, le mot 433 n'est pas jonglable car il ne passe pas le test de moyenne ; en revanche, le mot 432 n'est pas jonglable alors qu'il satisfait à ce test. Les mots 441 et 5340 sont jonglables car ils passent le test de permutation (les mots ω associés étant respectivement 120 et 1023) ; ils correspondent tous deux à des figures de jonglage à 3 balles et on peut leur associer les réécritures suivantes : $333\rightarrow 423\rightarrow 441$ et $3333\rightarrow 4233\rightarrow 4413\rightarrow 5313\rightarrow 5340$.

Exercice de programmation :

► *Il vous est demandé de rédiger un programme conforme aux spécifications ci-dessous dans l'un des langages C, Caml ou Java à votre choix. Ce programme devra être accompagné d'un exemple d'exécution permettant d'en vérifier le bon fonctionnement. La clarté et la concision du programme seront des éléments importants d'appréciation pour le jury.*

Implanter dans l'un des langages de programmation autorisés l'algorithme de test de permutation.

3. Enumération des mots jonglables

La question qui nous préoccupe désormais est d'énumérer certaines parties du langage J des mots jonglables : on cherche donc à obtenir une liste (éventuellement infinie) des éléments de ces sous-ensembles de J.

En pratique, trois paramètres – non indépendants, d'après le test de moyenne – entrent en ligne de compte pour un jongleur lorsqu'il souhaite réaliser une figure : le nombre b de balles que la figure utilise, la période p de cette figure (qu'il pourra à loisir reproduire ou éventuellement enchaîner à d'autres figures) et la durée maximale d des lancers de la figure. Plus le jongleur est expert, plus ces nombres sont élevés ; mais, sur le plan de l'apprentissage, une bonne méthode consiste à essayer d'incrémenter l'un de ces trois paramètres en laissant les deux autres fixes.

En fait, deux types de parties de J intéressent particulièrement les jongleurs : l'ensemble des mots jonglables à nombre de balles b et période p constants, notons le $BP(b,p)$, et celui des mots jonglables à nombre de balles b et durée maximale d constants, noté $BD(b,d)$.

3.1. *Enumération des mots jonglables à b et p fixés*

On peut aisément s'assurer que les ensembles $BP(b,p)$ sont de cardinal fini. De plus, pour éviter la redondance due aux mots conjugués, il suffit de s'intéresser à l'ensemble $BP_\sim(b,p)$ obtenu en quotientant $BP(b,p)$ par la relation de conjugaison $\sim$. A titre d'exemples, $BP_\sim(3,3) = \{333,423,441,504,522,531,603,612,630,711,720,801,900\}$ contient 13 éléments, $BP_\sim(3,4)$ en contient 46.

On peut imaginer au moins trois manières d'énumérer un tel ensemble $BP_\sim(b,p)$:

Enumération naïve :: Cela consiste à dresser la liste de tous les mots de longueur p qui vérifient le test de moyenne. Ces mots sont en nombre fini et il suffit de ne conserver parmi eux que ceux qui satisfont en outre au test de permutation. On termine alors éventuellement en ne gardant qu'un seul représentant de chaque classe de conjugaison.

Enumération par « remontée » du test de permutation :: Cela consiste en quelque sorte à inverser le test de permutation. En effet, en notant φ l'application décrite dans ce test qui, à tout mot jonglable m, associe un mot ω décrivant une permutation de l'ensemble

$\{0,1,\ldots,p-1\}$, $BP(b,p)$ apparaît comme l'image réciproque par φ de l'ensemble des permutations sur $\{0,1,\ldots,p-1\}$.

Un algorithme d'obtention de $BP(b,p)$ consiste donc :

• à énumérer l'ensemble des mots ω (pour cette étape, la connaissance d'un algorithme efficace d'énumération des permutations d'un ensemble s'avère évidemment précieuse) ;

• pour chaque mot ω, à déterminer l'ensemble $\varphi^{-1}(\{\omega\})$;

• à en déduire $BP(b,p)$ et même $BP_{\sim}(b,p)$ en évitant les redondances.

Enumération par échanges de lancers adjacents :: Cela consiste à énumérer l'ensemble $BP_{\sim}(b,p)$ à partir de la cascade b^p en engendrant à chaque étape tous les nouveaux mots jonglables que l'on peut obtenir par échanges de lancers adjacents seulement à partir des mots précédemment obtenus.

3.2. *Enumération des mots jonglables à b et d fixés*

Les ensembles $BD(b,d)$ sont quant à eux de cardinal infini, mais ils peuvent être décrits à partir d'automates finis. On suppose ici que $d \geq b$.

Considérons un jongleur en train de jongler avec b balles qu'il lance avec des durées inférieures ou égales à d et plaçons nous à un instant n donné ou, pour être très précis, immédiatement après l'instant n, si bien que le lancer prévu à l'instant n (s'il y en a un) vient tout juste d'être effectué : les b balles sont en l'air avec des durées de retombées toutes différentes. On peut donc coder l'état de jonglage par un mot $q = q_1 \ldots q_d$ de longueur d sur l'alphabet $\{0,1\}$ défini de la manière suivante : pour i compris entre 1 et d, q_i vaut 1 si l'une des balles doit retomber à l'instant $n+i$, et vaut 0 sinon. Le nombre de 1 d'un tel mot est donc toujours égal à b. L'état $q' = q'_1 \ldots q'_d$ dans lequel on va se trouver à l'instant suivant $n+1$ dépend de la valeur de q_1 :

- si $q_1 = 0$, alors on ne rattrape (et donc ne relance) aucune balle à l'instant $n+1$; la figure de jonglage évolue « toute seule », d'où les relations : $q'_d = 0$ et $q'_i = q_{i+1}$ pour i compris entre 1 et $d-1$;
- si $q_1 = 1$, alors on rattrape une balle à l'instant $n+1$ qu'il faut relancer immédiatement, avec une durée j égale à d ou telle que $q_{j+1} = 0$; l'état q' est donc décrit par les relations suivantes : q'_d vaut 0 si $j < d$ et 1 si $j = d$, et, pour i compris entre 1 et $d-1$, $q'_i = q_{i+1}$ sauf éventuellement pour q'_j, qui vaut 1 si $j < d$.

On vient donc de décrire les deux types de transitions de l'automate : on passe de l'état q à l'état q' par lecture de la lettre 0 dans le premier cas, par lecture de la lettre j dans le second. On choisit pour seul état à la fois initial et final celui qui correspond à la cascade à b balles : $q_0 = 1^b 0^{d-b}$.

Les mots de $BD(b,d)$ sont exactement les mots étiquetant les boucles dans cet automate. En particulier, le langage reconnu par l'automate est celui des mots jonglables que l'on peut concaténer à la cascade et auxquels on peut concaténer la cascade : ces mots correspondent aux figures jonglables dites *fondamentales* ; les autres mots jonglables correspondent à des figures jonglables dites *excitées*. Par exemple, 441 correspond à une figure jonglable fondamentale (car

3^i4413^j est un mot jonglable) ; 450 correspond à une figure jonglable excitée (car 34503 n'est pas un mot jonglable) : en revanche $3^i445023^j$ est un mot jonglable, ce qui signifie que pour jongler la figure 450 à partir de la cascade à trois balles, on peut passer par la figure de transition consistant à lancer une balle de durée 4 et que l'on peut retourner à la cascade à partir de la figure 450 par le lancer d'une balle de durée 2.

Suggestions pour le développement

► *Soulignons qu'il s'agit d'un menu à la carte et que vous pouvez choisir d'étudier certains points, pas tous, pas nécessairement dans l'ordre, et de façon plus ou moins fouillée. Vous pouvez aussi vous poser d'autres questions que celles indiquées plus bas. Il est très vivement souhaité que vos investigations comportent une partie traitée sur ordinateur et, si possible, des représentations graphiques de vos résultats.*

- D'un point de vue théorique, on pourra apporter une preuve des tests de moyenne et de permutation.
- On pourra également étudier le système de réécriture par échanges de lancers adjacents et en établir quelques propriétés.
- Concernant l'énumération des mots jonglables à b et p fixés, on pourra sélectionner un ou plusieurs des trois algorithmes proposés et :
  - le (ou les) mettre en oeuvre sur l'exemple de l'ensemble $BP_{\sim}(3,3)$;
  - proposer une preuve de correction et éventuellement de terminaison, ainsi qu'une étude de complexité ;
  - présenter (de manière plus ou moins approfondie) des modalités d'implantation pratique (choix des structures de données,...).
- Concernant l'énumération des mots jonglables à b et d fixés, on pourra :
  - expliquer ce que peut apporter à un jongleur professionnel la construction de l'automate fini ;
  - représenter l'automate fini correspondant à l'ensemble $BD(3,5)$, par exemple ;
  - préciser le nombre d'états et de transitions de l'automate en fonction de b et d et établir que l'ensemble $BD(b,d)$ est engendré, dans un sens que l'on précisera, par un nombre fini de mots jonglables dont on bornera la période ;
  - proposer, une fois l'automate supposé construit, un algorithme d'énumération de cette famille génératrice.
- On pourra aussi réfléchir aux manières d'étendre la modélisation du jonglage simple étudié dans ce texte à des situations plus complexes, par exemple :
  - suppression du principe de la « patate chaude » dans le jonglage simple ;
  - jonglage multiplexe (à une main) ;
  - jonglage simultané (à plusieurs mains).